

CABIRIA ANDREIAN GAZACU

Teoria funcțiilor de mai multe variabile complexe

MINISTERUL ÎNVĂȚĂMÎNTULUI
UNIVERSITATEA BUCUREȘTI

Prof. dr. doc. CABIRIA ANDREIAN CAZACU

T **Teoria** **funcțiilor** **de** **mai multe** **variabile** **complexe**



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI—1971

INTRODUCERE

1. Teoria funcțiilor de mai multe variabile complexe constituie una din acele discipline de sinteză caracteristice matematicii actuale, în care realizări hotărâtoare se obțin prin îmbinarea procedeelor proprii cu procedee specifice altor discipline. Folosind metode create în algebră, topologie, geometrie diferențială sau analiză funcțională, teoria funcțiilor de mai multe variabile străbate o etapă de dezvoltare impetuoasă. Rînd pe rînd probleme, care își așteptaseră decenii soluționarea, sînt considerate dintr-un nou punct de vedere și rezolvate într-o formă mai generală. Abia constituită o treaptă de dezvoltare a teoriei și cadrul se lărgeste, problemele fundamentale sînt reluate, instrumentele împrumutate din celelalte ramuri matematice se perfecționează și de data aceasta teoria funcțiilor, prin noțiunile noi pe care le introduce, influențează dezvoltarea acestor discipline. Rod al acestor pasionate cercetări — o nouă sinteză se desăvîrșește. Procesul de generalizare și simultan aprofundare reîncepe însă, stimulat neconținut de multiplele aplicații, pe care teoria funcțiilor de mai multe variabile complexe le găsește în mecanica cuantică sau în alte capitole ale fizicii matematice. Astfel din 1950 și pînă astăzi s-au construit succesiv teoria varietăților analitice complexe, teoria spațiilor analitice complexe tot mai generale, teoria spațiilor analitice banachice.

Primele rezultate fundamentale în teoria funcțiilor analitice de mai multe variabile complexe au fost obținute în a doua jumătate a secolului trecut de K. Weierstrass și în jurul anului 1900 de către P. Cousin, F. Hartogs și H. Poincaré. Teoria funcțiilor analitice de o singură variabilă complexă constituia un model. Astfel, celebrele probleme ale lui Cousin cereau generalizarea la funcții de mai multe variabile complexe a teoremelor clasice ale lui Weierstrass și Mittag-Leffler [30]. Dar în același timp apăreau, o dată cu dificultățile inerente caracterului complex al subiectului,

primele rezultate specifice cazului $n(>1)$ -dimensional. Să menționăm în acest sens exemplul lui F. Hartogs, care arată că există domenii din spațiul $\mathbb{C}^2$ cu proprietatea următoare: toate funcțiile olomorfe în aceste domenii se prelungesc analitic la domenii mai largi [45].

Inițial teoria funcțiilor analitice de mai multe variabile complexe s-a construit pe deschisele din $\mathbb{C}^n$, dar însăși studiul global al funcțiilor pe baza prelungirii analitice ridică problema definirii unei noțiuni corespunzătoare aceleia de suprafață riemanniană. Totuși, datorită stadiului de dezvoltare insuficientă a matematicii din acea epocă, rezolvarea acestei probleme avea să fie realizată abia în ultimii ani, prin introducerea spațiilor analitice. Urmind modelul suprafețelor riemanniene abstracte ale lui H. Weyl ([81], vol. II, cap. VII), H. Behnke și P. Thullen au construit în 1934, în monografia [9], noțiunea concretă de domeniu riemannian de existență a unei funcții analitice, care constituia o acoperire realizată de un omeomorfism local (neramificată, analogă prelungirii weierstrassiene) a lui $\mathbb{C}^n$. Această monografie sintetiza rezultatele obținute pînă atunci, dintre care menționăm prelungirea analitică după P. Thullen și H. Cartan, varietățile formate de singularități după F. Hartogs și E. E. Levi, reprezentările lui S. Bergman etc., iar domeniile riemanniene, numite și domenii de olomorfie, au format cadrul teoriei pînă la mijlocul secolului. Succesiv într-o serie de 9 memorii publicate în perioada 1936—1953, K. Oka rezolvă multe probleme importante [69], iar baza algebrică pentru etapa ulterioară este stabilită de H. Cartan [18] — [20].

În preajma anului 1950, dezvoltarea celorlalte ramuri ale matematicii, în special algebra omologică și topologia, au permis definirea varietăților analitice complexe și construirea teoriei pe aceste varietăți prin opera lui H. Cartan și J. P. Serre pe de o parte, H. Behnke și K. Stein pe de alta. Seminarul H. Cartan 1951—1952, lucrările Colocviului de la Bruxelles din 1953 ([21], [75]) și raportul prezentat de H. Behnke la Congresul Internațional de la Amsterdam din 1954 [5] corespund acestui moment.

Cu toate rezultatele obținute, teoria varietăților analitice complexe nu era pe deplin satisfăcătoare, deoarece ea nu cuprindea

toate domeniile riemanniene de existență ale funcțiilor analitice.*) S-a introdus atunci, **) de către Cartan și Serre pe o cale, de către Behnke și Stein pe alta, noțiunea de spațiu analitic, iar echivalența celor două definiții a fost stabilită de H. Grauert și R. Remmert [39]. Punctul de vedere al lui Cartan și Serre bazat pe noțiunea de spațiu inelat a dobândit o formă clasică prin expunerile lui A. Grothendieck ținute în seminarul H. Cartan 1960—1961, [42]. S-a ajuns astfel la noțiunea actuală de spațiu analitic.***)

Vom încheia această sumară schiță istorică menționând încă unele realizări: S-au definit spații analitice cu o infinitate de dimensiuni (banachice, A. Douady [34]) și s-a înlocuit corpul de bază $\mathbb{C}$ cu alte corpuri (construindu-se, de exemplu, o teorie nearhimediană a funcțiilor, H. Grauert și R. Remmert [41]). Teorema de pregătire a lui Weierstrass, unul dintre cele mai puternice instrumente de demonstrare din teoria funcțiilor analitice de mai multe variabile complexe, a fost extinsă de B. Malgrange pentru funcții diferențiabile, în expunerile pe care le-a ținut la Seminarul H. Cartan, 1962—1963. Legătura dintre teoria funcțiilor analitice de mai multe variabile complexe și teoria ecuațiilor cu derivate parțiale a fost esențial lărgită prin opera lui L. Hörmander, [47].

În țara noastră, teoria funcțiilor de mai multe variabile complexe a început să fie sistematic studiată în anul 1956, din inițiativa lui Simion Stoilov, în seminarul pe care îl conducea la Institutul de matematică al Academiei. Această direcție de cercetări a fost îmbrățișată de la început de M. Jurchescu, care a prezentat în cadrul seminarului diferite aspecte ale teoriei. Specialiști în domenii conexe au susținut expuneri de teoria categoriilor și a fasciculelor (I. Bucur), teoria dimensiunii (A. Deleanu), teoria curenților (C. Constantinescu), algebră locală (A. Lascu, N. Radu),

*) De exemplu, domeniul de existență al funcției $\sqrt{z_1 z_2}$ nu este o varietate, fiindcă nici o vecinătate a punctului corespunzător lui $z_1 = 0, z_2 = 0$ nu este omeomorfă cu un deschis din $\mathbb{C}^2$.

**) A se vedea expunerile de sinteză prezentate de H. Behnke și H. Grauert la Colocviul de la Princeton 1957, [6] și de H. Cartan la Congresul Internațional de la Edinburgh 1958, [23].

***) Colecția [63] cuprinde câteva dintre cele mai importante lucrări relative la spațiile complexe.

spații Fréchet și spații nucleare (C. Foiaș), distribuții, analiză funcțională și teoria ecuațiilor cu derivate parțiale (G. Gussi), teoria spațiilor Teichmüller (C. Andreian Cazacu). Au fost aprofundate Seminarul Cartan 1960—1961, [42] și [48] (M. Jurchescu, O. Stănișilă, C. Bănică, A. Duma), monografia lui Hörmander [47] (G. Gussi), și alte memorii. Pe această cale s-a format la Institutul de matematică al Academiei Republicii Socialiste România un mănunchi valoros de tineri cercetători, care lucrează în teoria spațiilor analitice sub îndrumarea lui M. Jurchescu [3], [4], [78]. Prin lucrările sale, M. Jurchescu a adus contribuții remarcabile atât în teoria suprafețelor riemanniene și în teoria spațiilor analitice cât și în unele domenii conexe (teoria categoriilor, algebra omologică, topologie) [50] — [57].

2. Importanța deosebită dobândită de teoria funcțiilor de mai multe variabile complexe în cercetarea matematică actuală m-a determinat să aleg în toamna anului 1964 această teorie ca subiect al cursului special, pe care îl predau la Facultatea de matematică și mecanică a Universității din București. La aceasta au contribuit în mod hotărâtor prelegerile unuia dintre creatorii acestei discipline matematice H. Cartan, pe care le-am audiat la Varenna în 1963 [24].

Lucrarea de față constituie o introducere în teoria funcțiilor de mai multe variabile complexe, luând ca punct de plecare lecțiile pe care le-am ținut la Facultatea de matematică și mecanică în anii 1964—1968. Ea își propune să familiarizeze studenții și viitorii cercetători cu noțiunile de bază specifice acestui domeniu.

Din vastul câmp de rezultate care constituie astăzi teoria funcțiilor de mai multe variabile complexe, cursul nostru îmbrățișează anumite aspecte fundamentale grupate în jurul teoriei lui Oka și Cartan, iar pentru simplificarea expunerii am ales drept cadru varietățile analitice complexe.

Capitolul I prezintă teoria funcțiilor analitice pe deschise din C^n : integrala Cauchy cu numeroasele ei consecințe, seriile Taylor și proprietățile algebrice locale ale funcțiilor analitice, dominate de teorema de pregătire a lui Weierstrass.

În capitolul II am reunit instrumentele necesare, în special de natură algebrică și topologică: elemente de teoria fasciculelor și a fibratelor.

În capitolul III se introduc varietățile analitice complexe și fascicolul germenilor de funcții analitice, cu ajutorul căruia varietatea se organizează ca spațiu analitic. Se demonstrează teorema lui Oka despre coerența acestui fascicol și se aprofundează categoria fasciculelor analitice coerente. Sînt expuse prelungirea analitică și unele proprietăți ale subvarietăților analitice, se definește fascicolul germenilor de funcții meromorfe.

Capitolul IV este consacrat problemelor lui Cousin. Cu acest prilej sînt dezvoltate alte rezultate, care folosesc ca auxiliare importante în teoria funcțiilor: lema despre integrala Pompeiu, teoreme de aproximare și teorema matricilor olomorfe a lui Cartan.

Capitolul V tratează probleme legate de coomologia varietăților. Folosind teorema lui de Rham și alte rezultate din capitolul II, se stabilește teorema lui Dolbeault și se formulează teoremele A și B ale lui Cartan, care sînt demonstrate pentru anumite compacte din C^n .

În capitolul VI prezentăm cazul deosebit de important al varietăților Stein, pentru care s-au extins principalele propoziții din teoria suprafețelor riemanniene necompacte. Se demonstrează teoremele A și B pentru varietățile Stein și sînt analizate diferite consecințe.

Acest material constituie o bază care va permite cititorului studiul diferitelor monografii (dintre care recomandăm în primul rînd [50], [44], [47], [42]) și aprofundarea memoriilor de specialitate.

Bibliografia conține pe lîngă principalele monografii și unele dintre acele lucrări, a căror apariție a contribuit esențial la dezvoltarea teoriei și care au fost citate în cuprinsul cărții. Ea poate fi completată folosind indicațiile bibliografice din [6], [9], [35], [36] și în special [44].

Potrivit scopului propus, am urmărit ca redactarea să fie cît mai clară și accesibilă. În acest sens au fost aprofundate cu deosebită atenție elementele auxiliare utilizate, cu excepția cîtorva rezultate de topologie care sînt, în general, tratate în literatura românească de specialitate.

În cuprinsul aceluiași capitol referirile s-au făcut indicînd numa paragraful și numărul respectiv; pentru rezultate citate din alte capitole s-a indicat capitolul, paragraful și numărul.

Pentru simplificarea expunerii adoptăm următoarele *convenții*:

1) Denumirea de vecinătate s-a folosit în sensul de vecinătate deschisă, exceptând câteva cazuri în care s-a menționat că se consideră vecinătăți închise sau vecinătăți compacte.

2) Aceeași convenție pentru acoperiri.

3) Dacă $\{U_i\}_{i \in I}$ constituie o acoperire sau o familie de mulțimi, s-a notat $U_{i_0 \dots i_p}$ în loc de $U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}$, pentru orice submulțime finită de indici din I .

4) Uneori s-a înlocuit notația $f|_A$, ce reprezintă restricția aplicației f la mulțimea A , cu f . De asemenea s-a notat corestricția în același mod ca și aplicația inițială.

5) 1_A reprezintă aplicația identică $A \rightarrow A$.

6) Aplicațiile au fost înzestrate în mod natural cu structura algebrică, corespunzătoare codomeniului lor de definiție.

7) Denumirile de funcție analitică și funcție olomorfă au același sens.

Autoarea aduce mulțumiri acad. prof. Miron Nicolescu pentru sfaturile primite în legătură cu alegerea și organizarea materialului prezentat în acest curs.

I FUNCȚII ANALITICE ÎN $\mathbb{C}^n$

§ 1. Spațiul numeric complex n -dimensional $\mathbb{C}^n$

1. Fie $\mathbb{R}$ corpul numerelor reale înzestrat cu topologia obișnuită — dreapta reală — și $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{\text{de } n \text{ ori}}$ spațiul vectorial n -dimensional peste $\mathbb{R}$, înzestrat cu topologia produs — spațiul euclidian n -dimensional.

Vom nota cu $\mathbb{C}$ corpul numerelor complexe înzestrat cu topologia planului euclidian, deci omeomorf cu $\mathbb{R}^2$.

Spațiul numeric complex n -dimensional $\mathbb{C}^n = \underbrace{\mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C}}_{\text{de } n \text{ ori}}$ este mulțimea sistemelor ordonate de n numere complexe $(z_1, z_2, \dots, z_n)$, $z_k = x_k + iy_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \dots, n$, mulțime organizată ca spațiu vectorial n -dimensional peste $\mathbb{C}$ și înzestrată cu topologia produs.

Un element $(z_1, \dots, z_n)$ din $\mathbb{C}^n$ va fi notat prescurtat z sau (z_k) .

Între mulțimile $\mathbb{C}^n$ și $\mathbb{R}^{2n}$ există bijecția $\tau^n: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, prin care $z \rightarrow (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$.

În $\mathbb{C}^n$ se definesc în mod obișnuit varietățile liniare afine complexe p -dimensionale prin $n-p$ ecuații liniare: $f^v(z) = b^v$, $v = 1, \dots, n-p$, unde $f^v(z) = \sum_{j=1}^n a_j^v z_j$, $a_j^v \in \mathbb{C}$, $f^v(z)$ sînt forme liniar independente peste $\mathbb{C}$, iar $b^v \in \mathbb{C}$. În particular dacă $p = 1, 2$ resp. $n - 1$, varietatea se numește dreaptă complexă, plan complex, resp. hiperplan complex.

Remarcăm că mulțimea $\mathbb{C}^n$ formează și un spațiu vectorial $2n$ -dimensional peste $\mathbb{R}$, care este izomorf prin τ^n cu $\mathbb{R}^{2n}$ și în care se definesc varietăți liniare reale. Vom identifica acest spațiu

cu $\mathbb{R}^{2n}$ și vom păstra notația $\mathbb{C}^n$ pentru spațiul vectorial peste $\mathbb{C}$. Orice varietate liniară complexă de dimensiune p din $\mathbb{C}^n$ corespunde prin τ^n unei varietăți liniare reale de dimensiune $2p$ din $\mathbb{R}^{2n}$. Reciproca nu are însă loc. De exemplu, $\mathbb{R}^n$ se poate considera scufundat în $\mathbb{C}^n$, prin identificare cu mulțimea $\{z \mid z \in \mathbb{C}^n, y_k = 0, k = 1, \dots, n\}$, dar nu este varietate liniară complexă în $\mathbb{C}^n$, deși este varietate liniară reală în $\mathbb{R}^{2n}$.

Să notăm cu p_k proiecția: $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, care asociază: $z \rightarrow z_k, k = 1, \dots, n$. Se știe că topologia produs pe $\mathbb{C}^n$ este topologia cea mai puțin fină a lui $\mathbb{C}^n$, pentru care toate aplicațiile p_k sînt continue [84], p. 56. Prin urmare, o bază pentru mulțimile deschise din $\mathbb{C}^n$ este dată de mulțimile

$$U_{R_1, \dots, R_n}(z_1^0, \dots, z_n^0) = \{z \mid z \in \mathbb{C}^n; |z_k - z_k^0| < R_k, k = 1, \dots, n\}, \quad (1)$$

unde $z^0 = (z_j^0) \in \mathbb{C}^n$ și $R = (R_1, \dots, R_n) \in \mathbb{R}_+^{n*}$, numite *polidiscuri* ** (deschise) sau *policilindre* (deschise). Punctul z^0 se numește *centrul* polidiscului (1), iar R *poliraza* lui. Vom nota prescurtat acest polidisc cu $U_R(z^0)$.

Evident, o bază echivalentă este dată și de mulțimile—numite *cuburi*—

$$K_{a,b}(z^0) = \{z \mid z \in \mathbb{C}^n, |x_k - x_k^0| < a_k, |y_k - y_k^0| < b_k, k = 1, \dots, n\}, \quad (2)$$

unde a_k și $b_k \in \mathbb{R}_+^*$.

Înzestrat cu această topologie, $\mathbb{C}^n$ este spațiu vectorial topologic. Aplicația τ^n este un omeomorfism între spațiile topologice $\mathbb{C}^n$ și $\mathbb{R}^{2n}$.

Mulțimea ***)

$$\bar{U}_R(z^0) = \prod_{k=1}^n \bar{D}_k = \{z \mid |z_k - z_k^0| \leq R_k, k = 1, \dots, n\} \quad (3)$$

) Convenim să însemnăm cu $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ și cu $\mathbb{R}_+^ = (0, +\infty)$. Submulțimea $\mathbb{R}_+^n$ se numește și octantul absolut al lui $\mathbb{R}^n$.

**) În general, dacă D_k este un domeniu din planul z_k , $D = D_1 \times \dots \times D_n \subset \mathbb{C}^n$ se numește *polidomeniu*.

***) Notăm pentru orice mulțime A dintr-un spațiu topologic cu A' , $\bar{A}$, A , ∂A , CA , resp. mulțimea derivată, închiderea, interiorul, frontiera, complementul.

se numește *polidiscul închis cu centrul z^0 și poliraza R* , iar

$$\partial_0 U_R(z^0) = \prod_{k=1}^n \partial D_k = \{z \mid |z_k - z_k^0| = R_k, k = 1, \dots, n\} \quad (4)$$

frontiera distinsă sau scheletul polidiscului $U_R(z^0)$. Evident *frontiera polidiscului* este $\partial U_R(z^0) = \{z \mid z \in \bar{U}_R(z^0), \text{ cu } |z_j - z_j^0| = R_j \text{ pentru cel puțin un indice } j\}$.

2. Se știe că luind ca valoare absolută modulul, $\mathbb{C}$ este un corp valuat*), nediscret, local compact, complet.

Spațiul $\mathbb{C}^n$ este un spațiu vectorial normat, cu norma

$$\|z\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |z_k|^2}, \quad z \in \mathbb{C}^n. \quad (5)$$

El devine spațiu metric luind distanța între două puncte $z', z'' \in \mathbb{C}^n$

$$d(z', z'') = \|z' - z''\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |z'_k - z''_k|^2}. \quad (6)$$

Vom nota *sfera plină sau bila n -dimensională complexă* cu centrul $z_0 \in \mathbb{C}^n$ și raza $R > 0$ cu

$$B_R(z^0) = \{z \mid d(z, z^0) < R\}, \quad (7)$$

bila închisă cu $\bar{B}_R(z^0)$ și sfera cu

$$S_R(z^0) = \{z \mid d(z, z^0) = R\}. \quad (8)$$

*) Un corp valuat este un corp k înzestrat cu o aplicație $k \rightarrow \mathbb{R}_+$ numită valoare absolută: $a \in k \rightarrow |a| \in \mathbb{R}_+$, cu următoarele proprietăți: 1° $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$, 2° $|a + b| \leq |a| + |b|$, 3° $|ab| = |a| |b|$ ($a, b \in k$). Orice corp valuat este înzestrat cu topologia definită de distanța $d(a, b) = |a - b|$, și formează astfel un corp topologic ([50], p. 25).

Se verifică imediat următoarele relații de incluziune:

$$1^\circ B_R(z^0) \subset U_{R_1, \dots, R_n}(z^0), \text{ unde } R \leq \min_k R_k.$$

$$2^\circ U_{R_1, \dots, R_n}(z^0) \subset B_R(z^0), \text{ unde } R \geq \sqrt{n} \cdot \max_k R_k.$$

Prin urmare topologia lui C^n coincide cu cea corespunzătoare spațiului metric dat de (6). Aplicația τ^n este o izometrie între C^n și R^{2n} . Toate structurile din R^{2n} se transpun în mod natural prin intermediul lui τ^n pe C^n . De exemplu, măsura Lebesgue pe R^{2n} devine o măsură pe C^n .

3. Un șir de puncte $\{z^m\}_{m=1}^\infty$, $z^m = (z_k^m) \in C^n$, converge la un punct $z^0 = (z_k^0) \in C^n$, atunci și numai atunci când cele n șiruri de numere complexe $\{z_k^m\}_{m=1}^\infty$ converg respectiv la z_k^0 ($k = 1, \dots, n$). Spațiul C^n este complet, deci este un spațiu Banach.

4. În studiul funcțiilor de mai multe variabile complexe metoda inducției relative la numărul variabilelor este ades aplicată. Pentru prescurtarea scrierii vom folosi consecvent următoarele notații:

Un punct din C^{n-1} va fi notat $z' = (z_1, \dots, z_{n-1})$; în particular $0' = (\underbrace{0, \dots, 0}_{\text{de } (n-1) \text{ ori}})$ și $R' = (R_1, \dots, R_{n-1}) \in R^{n-1}$. Atunci un punct din C^n ,

$z = (z_1, \dots, z_n)$ se va scrie și $z = (z', z_n)$. Nu vom marca dimensiunea unui polidisc decât prin indicarea centrului și razelor. De exemplu, $U_{R'}(0')$ este un polidisc în C^{n-1} în timp ce $U_{R'R_n}(0) = U_{R'}(0') \times \{z_n \mid |z_n| < R_n\}$ un polidisc din C^n .

§ 2. Funcții și aplicații de n variabile complexe

1. Fie $M \subset C^n$. O aplicație $f: M \rightarrow C$, prin care fiecărui punct $z \in M$ îi corespunde un punct $\omega \in C$ se numește *funcție complexă de n variabile complexe** și va fi notată $\omega = f(z_1, \dots, z_n)$ sau $\omega = f(z)$.

O aplicație $F: M \rightarrow C^m$, care asociază fiecărui punct $z \in M$, un punct $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m) \in C^m$, va fi notată $\omega = F(z)$ și corespunde

*) Dacă $f(M) \subset R$, f se va numi funcție reală de n variabile complexe.

unui sistem de m funcții complexe de n variabile complexe $w_j = F_j(z_1, \dots, z_n)$, $j = 1, \dots, m$. Evident $F_j = p_j \circ F$, unde $p_j: w \rightarrow w_j$ este proiecția j a lui $\mathbb{C}^m$ pe $\mathbb{C}$.

O aplicație $F: M \rightarrow \mathbb{C}^m$ echivalează cu o aplicație $\Phi: \mu \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ definită de $2m$ funcții reale de $2n$ variabile reale, unde $\mu = \tau^n(M) \subset \mathbb{R}^{2n}$, $\Phi = \tau^m \circ F \circ (\tau^n)^{-1}$, iar cele $2m$ funcții componente ale lui Φ sînt părțile reale și imaginare ale funcțiilor componente ale lui F .

Funcțiile complexe $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ definite pe mulțimea M formează o algebră peste $\mathbb{C}$. Notăm

$$\|f\|_M = \sup_{z \in M} |f(z)|. \quad (1)$$

Se verifică ușor că funcțiile complexe $f: M \rightarrow \mathbb{C}$, cu $\|f\|_M < +\infty$, formează o algebră Banach peste $\mathbb{C}^*$, în care norma este $\|\cdot\|_M$ și care va fi notată $\mathcal{F}(M)$.

Definițiile și proprietățile relative la convergența șirurilor și seriilor de funcții pe M sînt cele obișnuite. Dintre ele amintim numai următoarele: Seria $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ converge normal pe M , dacă $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_M < +\infty$. Convergența normală implică convergența absolută și uniformă.

Analog, aplicațiile $F: M \rightarrow \mathbb{C}^m$ formează un spațiu vectorial peste $\mathbb{C}$, în care definim

$$\|F\|_M = \max_j \|F_j\|_M, \quad (2)$$

dacă F_j sînt funcțiile componente ale lui F . Aplicațiile F , pentru care $\|F\|_M < +\infty$, formează un spațiu Banach cu norma $\|\cdot\|_M$, care se va identifica cu $\mathcal{F}(M)^m$. Evident se poate lua norma echivalentă $\sum_{j=1}^m \|F_j\|_M$.

*) Se numește *algebră Banach* un spațiu vectorial normat complet, (spațiu Banach), care este simultan o algebră și în care norma $\|\cdot\|$ satisface inegalitatea $\|a \cdot b\| \leq \|a\| \|b\|$, pentru orice pereche de elemente din spațiu ([31], p. 83).

Procedînd ca mai sus, putem considera $\mathbb{C}$ -algebra funcțiilor complexe definite pe o mulțime M arbitrară, resp. $\mathbb{C}$ -spațiul vectorial al aplicațiilor: $M \rightarrow \mathbb{C}^m$, pentru care vom păstra notațiile (1) și (2).

2. *Continuitatea* funcțiilor și aplicațiilor de mai multe variabile complexe se obține imediat din definiția generală a continuității unei aplicații între două spații topologice. Ea este echivalentă cu continuitatea unor funcții reale de variabile reale.

Vom folosi mereu următoarele proprietăți ale funcțiilor continue: Fie K un compact din $\mathbb{C}^n$ și $f: K \rightarrow \mathbb{C}$. Dacă f este continuă pe K , atunci f este uniform continuă pe K . Dacă $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă pe K , atunci f este mărginită inferior și superior pe K și își atinge marginea inferioară, resp. superioară pe K . În particular, rezultatul acesta se aplică funcției $|f|$, pentru $f: K \rightarrow \mathbb{C}$ funcție continuă.

Funcțiile complexe continue pe un compact $K \subset \mathbb{C}^n$ formează spațiu vectorial normat

$$\|f\|_K = \sup_{z \in K} |f(z)| = \max_{z \in K} |f(z)|, \quad (3)$$

pe care îl vom nota $\mathcal{C}(K)$. În acest spațiu, convergența în normă revine la convergența uniformă pe K și cum limita unui șir uniform convergent de funcții continue este continuă, $\mathcal{C}(K)$ este complet, deci un spațiu Banach. Mai mult $\mathcal{C}(K)$ formează o algebră Banach. Considerații analoge pot fi făcute relativ la aplicațiile $F: K \rightarrow \mathbb{C}^m$ continue pe K , în care caz se obține un spațiu Banach, izomorf cu $\mathcal{C}(K)^m$.

În general, pe un spațiu topologic arbitrar E , vom nota $\mathbb{C}$ -algebra funcțiilor complexe continue cu $\mathcal{C}(E)$ și vom identifica $\mathbb{C}$ -spațiul vectorial sau $\mathcal{C}(E)$ -modulul aplicațiilor continue: $E \rightarrow \mathbb{C}^m$ cu $\mathcal{C}(E)^m$. Pentru orice compact K din E , prin (3) se definește o normă pe $\mathcal{C}(K)$ și o seminormă pe $\mathcal{C}(E)$, iar (2), în care luăm $M = K$, ne dă o normă pe $\mathcal{C}(K)^m$ resp. o seminormă pe $\mathcal{C}(E)^m$.

3. *Diferențiabilitate*. Fie D un deschis din $\mathbb{C}^n$ și $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, $P = \operatorname{Re} f$ și $Q = \operatorname{Im} f: \tau^n(D) \rightarrow \mathbb{R}$.

Definiția 1. Funcția f se numește *diferențiabilă* (în sensul Stolz-Fréchet) în punctul $z \in D$, dacă diferența $\Delta f = f(z + \Delta z) - f(z)$ — pentru $z + \Delta z \in D$, $\Delta z = (\Delta z_1, \dots, \Delta z_n)$ și $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$, $k = 1, \dots, n$ — se poate scrie sub forma

$$\Delta f = \sum_{k=1}^n A_k(z) \Delta x_k + \sum_{k=1}^n B_k(z) \Delta y_k + \sum_{k=1}^n \varepsilon_k(z, \Delta z) \Delta z_k, \quad (4)$$

unde $\varepsilon_k(z, \Delta z)$ sînt funcții complexe de z și Δz cu proprietatea: $\varepsilon_k(z, \Delta z) \rightarrow 0$, cînd $\Delta z \rightarrow 0$. Funcția f este *diferențiabilă* în D , dacă este diferențiabilă în orice punct din D .

Evident, funcția f este diferențiabilă în z (în D) atunci și numai atunci cînd funcțiile P și Q sînt diferențiabile în $\tau^n(z)$ (resp. în $\tau^n(D)$) din $\mathbb{R}^{2n}$.

Ca de obicei se numește *diferențiala* lui f suma $df = \sum_{k=1}^n A_k \Delta x_k + \sum_{k=1}^n B_k \Delta y_k$. Se obține $dz_k = dx_k + i dy_k = \Delta z_k$, $A_k = \frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial P}{\partial x_k} + i \frac{\partial Q}{\partial x_k}$ și $B_k = \frac{\partial f}{\partial y_k} = \frac{\partial P}{\partial y_k} + i \frac{\partial Q}{\partial y_k}$. Prin urmare,

$$df = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_k} dy_k. \quad (5)$$

Totodată se definesc funcțiile diferențiabile de clasă C^r , r număr întreg nenegativ, sau de clasă C^∞ , funcții care admit derivate parțiale în raport cu x_k și y_k , $k = 1, \dots, n$, continue pînă la ordinul r inclusiv, resp. de orice ordin.

Definiția 2. O aplicație $F: D \rightarrow \mathbb{C}^m$ se numește *diferențiabilă* (*diferențiabilă de clasă C^r , resp. C^∞*) în punctul $z \in D$ (sau în D), dacă funcțiile componente F_j sînt diferențiabile (diferențiabile de clasă C^r , resp. C^∞) în z (resp. D).*)

Compunerea a două aplicații diferențiabile (de clasă C^r resp. C^∞), atunci cînd este posibilă, dă o aplicație diferențiabilă (de aceeași clasă).

*) Definițiile 1 și 2 se formulează ca în [67], vol. II, 19.31, interpretînd $\mathbb{C}^n$ și $\mathbb{C}$ resp. $\mathbb{C}^m$ ca $\mathbb{R}$ -spații vectoriale normate.

Definiția 3. O aplicație $F: D \rightarrow F(D) \subset \mathbb{C}^n$, unde D este un deschis din $\mathbb{C}^n$, se numește *difeomorfism* (de clasă C^r , resp. C^∞), dacă este un omeomorfism și dacă atât F cât și aplicația inversă F^{-1} sînt diferentiabile (de aceea clasă).

În acest caz, $F(D)$ este un deschis din $\mathbb{C}^n$, conform teoremei lui Brouwer *).

Definițiile 2 și 3 sînt analoge definițiilor utilizate pentru aplicații $\Psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$, unde Ω este un deschis din $\mathbb{R}^q$. Dacă Ψ este o aplicație diferentiabilă, vom nota cu J_Ψ matricea funcțională și, în cazul $p = q$, cu $\det J_\Psi$ determinantul funcțional. Din teorema funcțiilor implicite, ([67], vol. II, XX), se obțin imediat următoarele rezultate: Dacă Ψ este un difeomorfism al lui Ω pe $\Psi(\Omega)$, ($p = q$), $\det J_\Psi$ este diferit de zero în Ω . Dacă Ψ este o aplicație injectivă diferentiabilă de clasă C^r , resp. C^∞ , și $\det J_\Psi \neq 0$ în Ω , atunci Ψ este un difeomorfism de aceeași clasă.

Fie D un deschis din $\mathbb{C}^n$. Se verifică ușor că aplicația $F: D \rightarrow \mathbb{C}^m$ este diferentiabilă de clasă C^r , resp. C^∞ , atunci și numai atunci cînd aplicația $\Phi = \tau^m \circ F \circ (\tau^n)^{-1}: \tau^n(D) \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ este diferentiabilă de clasă C^r , resp. C^∞ . De asemenea F este un difeomorfism de o anumită clasă, dacă și numai dacă Φ are această proprietate. Putem formula deci următoarele propoziții:

Propoziția 1. Dacă F este un difeomorfism, iacobianul $\det J_\Phi$ este diferit de zero în $\tau^n(D)$.

Propoziția 2. Dacă F este o aplicație injectivă diferentiabilă de clasă C^r , resp. C^∞ , și $\det J_\Phi \neq 0$ pe $\tau^n(D)$, atunci F este un difeomorfism de clasă C^r , resp. C^∞ .

Dacă Δ și Δ^* sînt deschise din $\mathbb{C}^n$, iar $F: \Delta \rightarrow F(\Delta) \subset \Delta^*$ resp. $G: \Delta^* \rightarrow G(\Delta^*) \subset \mathbb{C}^n$ sînt difeomorfisme, atunci $G \circ F: \Delta \rightarrow G[F(\Delta)]$ este un difeomorfism. Inversul unui difeomorfism este tot un difeomorfism.

*) Dăm enunțul acestei teoreme, care va fi aplicată și ulterior: Dacă Ψ este un omeomorfism al unui deschis Ω din $\mathbb{R}^p$ în $\mathbb{R}^p$, atunci $\Psi(\Omega)$ este un deschis din $\mathbb{R}^p$.

Consecință: Dacă $\mathbb{R}^p$ și $\mathbb{R}^q$ sînt omeomorfe, rezultă $p = q$, ([32], p. 53 — 54, [82]).

4. *Operatorii diferențiali d' și d'' .* Folosind transformarea liniară formală

$$z_k = x_k + iy_k, \quad \bar{z}_k = x_k - iy_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (6)$$

vom introduce după Poincaré operatorii diferențiali formali

$$\frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i \frac{\partial}{\partial y_k} \right) \text{ și } \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i \frac{\partial}{\partial y_k} \right). \quad (*) \quad (7)$$

Dacă $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ este o funcție diferențiabilă în deschisul $D \subset \mathbb{C}^n$, diferențiala ei (5) se poate scrie

$$df = d'f + d''f, \quad (8)$$

unde

$$d'f = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k \text{ și } d''f = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k \quad (**). \quad (9)$$

Operatorii diferențiali d' și d'' sînt liniari și satisfac legea de derivare a produsului. Vom numi $\frac{\partial f}{\partial z_k}$ și $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k}$, $k = 1, \dots, n$, *derivate parțiale formale* ale funcției f în raport cu z_k , resp. $\bar{z}_k$ și le vom nota prescurtat f_{z_k} , resp. $f_{\bar{z}_k}$.

5. *Forme diferențiale exterioare alternate.* În încheierea acestui paragraf, vom aminti unele elemente de calcul diferențial exterior, care ne vor fi necesare.

Fie D un deschis din $\mathbb{C}^n$. Vom nota $\mathbb{C}$ -algebra funcțiilor complexe de clasă C^∞ pe D cu $\mathcal{O}^\infty(D)$.

*) $\frac{\partial}{\partial z_k}$ se mai numește derivata medie, reprezentînd media derivatelor pe direcția axelor x_k și y_k din planul variabilei z_k , iar $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}$ derivata Pompeiu, deoarece pentru funcții de clasă C^1 de o variabilă complexă z_k ea coincide cu derivata areolară [70], p. 141 și [85].

**) Uneori se notează d' cu ∂ și d'' cu $\bar{\partial}$.

Definiția 4. Numim *formă diferențială exterioară* sau *alternată* de tip (p, q) în D , p și q fiind întregi: $0 \leq p, q \leq n$, o expresie

$$\omega^{(p, q)} = \sum_{\substack{0 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n \\ 0 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n}} a_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q}(z) dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q} \quad (10)$$

dacă p și $q > 0$,

$$\omega^{(p, 0)} = \sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} a_{i_1 \dots i_p}(z) dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \quad (10')$$

dacă $p > 0$,

$$\omega^{(0, q)} = \sum_{0 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n} a_{j_1 \dots j_q}(z) d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q} \quad (10'')$$

dacă $q > 0$, resp.

$$\omega^{(0, 0)} = a(z), \quad (10''')$$

unde $a_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q}$, $a_{i_1 \dots i_p}$, $a_{j_1 \dots j_q}$, $a \in \mathcal{O}^\infty(D)$ și $\wedge$ este semnul înmulțirii exterioare.

Formele diferențiale de tip (p, q) , cu p sau $q > n$, sînt identice nule. Gradul unei forme de tip (p, q) este $r = p + q$.

Definiția 5. Numim *formă diferențială exterioară de grad r* în D o expresie

$$\omega^{(r)} = \sum_{\substack{p, q \geq 0 \\ p+q=r}} \omega^{(p, q)}. \quad (11)$$

Formele diferențiale exterioare de tip (p, q) în D alcătuiesc un $\mathcal{O}^\infty(D)$ -modul, care va fi notat $\mathcal{E}^{(p, q)}(D)$.

Suma directă a acestor module

$$\mathcal{E}^{(r)}(D) = \sum_{\substack{p, q \geq 0 \\ p+q=r}} \mathcal{E}^{(p, q)}(D)$$

este $\mathcal{C}^\infty(D)$ -modulul formelor diferențiale exterioare de grad r .
Suma directă

$$\mathcal{L}(D) = \sum_{r=0}^n \mathcal{L}^{(r)}(D)$$

se organizează ca o $\mathcal{C}^\infty(D)$ -algebră în raport cu înmulțirea exterioară a formelor diferențiale: dacă $\varphi \in \mathcal{L}^{(r)}(D)$, iar $\psi \in \mathcal{L}^{(s)}(D)$, atunci

$$\varphi \wedge \psi = (-1)^{rs} \psi \wedge \varphi. \quad (12)$$

Aplicînd operatorii (7), definim *derivatele parțiale* ale unei forme (10) în modul următor

$$\frac{\partial^{(p,q)} \omega}{\partial z_h} = \sum_{\substack{0 < i_1 < \dots < i_p \leq n \\ 0 < j_1 < \dots < j_q \leq n}} \frac{\partial a_{i_1 \dots j_q}}{\partial z_h} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_q} \quad (13)$$

și

$$\frac{\partial^{(p,q)} \omega}{\partial \bar{z}_h} = \sum_{\substack{0 < i_1 < \dots < i_p \leq n \\ 0 < j_1 < \dots < j_q \leq n}} \frac{\partial a_{i_1 \dots j_q}}{\partial \bar{z}_h} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_q} \quad (13')$$

$h = 1, \dots, n$ și analog procedăm pentru forme (10'), (10'') și (10''').
De asemenea definim

$$\frac{\partial^{(r)} \omega}{\partial z_h} = \sum_{\substack{p, q \geq 0 \\ p+q=r}} \frac{\partial^{(p,q)} \omega}{\partial z_h} \quad \text{și} \quad \frac{\partial^{(r)} \omega}{\partial \bar{z}_h} = \sum_{\substack{p, q \geq 0 \\ p+q=r}} \frac{\partial^{(p,q)} \omega}{\partial \bar{z}_h} \quad (13'')$$

și extindem derivatele parțiale prin liniaritate relativ la $\mathbb{C}$ pentru orice formă ω din $\mathcal{L}(D)$.

*) $\mathcal{L}^{(0,0)}(D) = \mathcal{L}^{(0)}(D) = \mathcal{C}^\infty(D)$, iar $\mathcal{L}^{(p,q)}(D)$ este modulul liber peste $\mathcal{C}^\infty(D)$ generat de $\binom{n}{p} \binom{n}{q}$ elemente $dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_q}$. $\mathcal{L}(D)$ este algebra exterioară a modulului $\mathcal{L}^{(1)}(D)$. Legătura cu algebra formelor diferențiale în real se obține identificînd $\mathbb{C}^n$ cu $\mathbb{R}^{2n}$ prin bijectia τ^n și ținînd seama de relațiile (6).

Introducem acum *operatorii diferențiali* d' și d''

$$d'\omega = \sum_{h=1}^n dz_h \wedge \frac{\partial \omega}{\partial z_h}, \quad d''\omega = \sum_{h=1}^n d\bar{z}_h \wedge \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}_h} \quad (14)$$

și *diferențiala exterioară*

$$d\omega = d'\omega + d''\omega. \quad (15)$$

Acești operatori diferențiali pot fi definiți și succesiv: Dacă ω este de grad 0, $\omega = a$, atunci $d\omega$ coincide cu diferențiala (8) a funcției a . Dacă $\omega = \omega_{(p,q)}$, atunci

$$d\omega = \sum_{\substack{0 < i_1 < \dots < i_p \leq n \\ 0 < j_1 < \dots < j_q \leq n}} da_{i_1 \dots i_p j_q} \wedge dz_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}. \quad (16)$$

Analog se definesc operatorii d' și d'' .

Evident, $d: \mathcal{E}^{(r)}(D) \rightarrow \mathcal{E}^{(r+1)}(D)$, $d': \mathcal{E}^{(p,q)}(D) \rightarrow \mathcal{E}^{(p+1,q)}(D)$ și $d'': \mathcal{E}^{(p,q)}(D) \rightarrow \mathcal{E}^{(p,q+1)}(D)$.

Se verifică ușor următoarele proprietăți:

a) Operatorii d' , d'' și d sînt *locali*: Dacă $\omega = 0$ pe un deschis $U \subset D$, atunci $d'\omega = d''\omega = d\omega = 0$ pe U .

b) Ei sînt *C-liniari*.

c) $d'(\varphi \wedge \psi) = d'\varphi \wedge \psi + (-1)^r \varphi \wedge d'\psi$, oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{E}^{(r)}(D)$ și $\psi \in \mathcal{E}(D)$. Relații analoge au loc pentru d'' și pentru d .

d) $d' \circ d' = 0$, $d' \circ d'' + d'' \circ d' = 0$, $d'' \circ d'' = 0$ și deci $d \circ d = 0$.

e) Operatorul d este invariabil de difeomorfisme de clasă C^∞ : dacă $\bar{z} = F(z)$ este un difeomorfism de această clasă: $D \rightarrow \bar{D} = F(D)$ și dacă $\omega \in \mathcal{E}(D)$, notînd cu $\tilde{\omega}$ forma diferențială transformată din $\mathcal{E}(\bar{D})$, avem $\tilde{d}\omega = d\tilde{\omega}$.

§ 3. Funcții olomorfe sau analitice

1. În cazul unei singure variabile complexe se cunosc diferite definiții echivalente ale funcțiilor analitice. Astfel în teoria lui Cauchy se presupune existența derivatei, care implică nu numai

existența derivatelor de orice ordin, dar și dezvoltarea în serie Taylor. Generalizînd acest punct de vedere, vom da

Definiția 1. Fie D un deschis din $\mathbb{C}^n$. Funcția $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ se numește *olomorfă* sau *analitică* în D dacă, oricare ar fi punctul $z \in D$, $k = 1, \dots, n$ și $\Delta z_k \in \mathbb{C} - \{0\}$ astfel încît $(z_1, \dots, z_k + \Delta z_k, \dots, z_n) \in D$, raportul

$$\frac{f(z_1, \dots, z_k + \Delta z_k, \dots, z_n) - f(z_1, \dots, z_n)}{\Delta z_k} \quad (1)$$

ține la o limită finită bine determinată, cînd $\Delta z_k \rightarrow 0$. Această limită este numită *derivata parțială* a funcției $f(z)$ în raport cu z_k în punctul z .

Prin urmare, $f(z)$ este olomorfă în D , dacă și numai dacă oricare ar fi $z^0 \in D$ și $k = 1, \dots, n$, funcția $f(z_1^0, \dots, z_{k-1}^0, z_k, z_{k+1}^0, \dots, z_n^0)$ de variabila z_k este olomorfă*) într-o vecinătate a lui z_k^0 , (de fapt în $D \cap C_k(z^0)$, unde $C_k(z^0) = \{z \mid z_j = z_j^0, j \neq k, j = 1, \dots, n\}$). Rezultă că $f(z)$ are în fiecare variabilă complexă separat proprietățile unei funcții olomorfe de o variabilă complexă.

Funcțiile olomorfe în D formează o $\mathbb{C}$ -algebră comutativă cu element unitate, pe care o vom nota cu $O(D)$ și care este o subalgebră a lui $\mathcal{O}(D)$.

Iată, de exemplu, cîteva proprietăți diferențiale ale funcțiilor olomorfe, care se obțin imediat din teoria funcțiilor analitice, de o singură variabilă complexă [81], vol. I, cap. III.

Fie D un deschis din $\mathbb{C}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} f = P$ și $\operatorname{Im} f = Q$.

Propoziția 1. Funcția f este olomorfă în D , dacă și numai dacă oricare ar fi punctul $z^0 \in D$ și $k = 1, \dots, n$, funcțiile

$$P(x_1^0, \dots, x_k, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_k, \dots, y_n^0) \text{ și } Q(x_1^0, \dots, x_k, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_k, \dots, y_n^0)$$

*) În tratatul [81] funcțiile derivabile de o singură variabilă complexă sînt numite monogene și abia după ce se demonstrează faptul că ele sînt dezvoltabile în serie Taylor li se atribuie denumirea de funcții olomorfe. Menționăm de asemenea că uneori și în cazul mai multor variabile prin funcție analitică se înțelege noțiunea globală obținută prin realizarea tuturor prelungirilor analitice, în timp ce pentru funcții olomorfe se folosește denumirea de funcții analitice regulate.

definite pe deschisul $\tau^2[D \cap \mathbb{C}_k(z^0)] \subset \mathbb{R}^2$, sînt diferențiabile în punctul (x_k^0, y_k^0) și satisfac în acest punct ecuațiile Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial P}{\partial x_k} = \frac{\partial Q}{\partial y_k}, \quad \frac{\partial P}{\partial y_k} = -\frac{\partial Q}{\partial x_k}. \quad (2)$$

Folosind operatorii diferențiali formali $\frac{\partial}{\partial z_k}$ și $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}$, (7), § 2, propoziția 1 admite formularea echivalentă

Propoziția 1'. Funcția $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ este olomorfă în D , dacă și numai dacă este diferențiabilă în raport cu fiecare variabilă z_k separat și dacă $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} = 0$, $k = 1, \dots, n$.

Propoziția 2. Dacă $f(z)$ este olomorfă în D , derivata formală $\frac{\partial f}{\partial z_k}$, § 2, coincide cu derivata parțială în raport cu z_k . Prin urmare în cazul funcțiilor olomorfe notația $\frac{\partial f}{\partial z_k}$ sau f_{z_k} (care în general exprimă numai derivata formală) reprezintă efectiv derivata parțială a lui f în raport cu z_k .

Propoziția 3. Dacă $f(z)$ este olomorfă în D , atunci P și Q sînt funcții armonice în $\tau^2[D \cap \mathbb{C}_k(z^0)]$ în variabilele x_k, y_k , oricare ar fi $k = 1, \dots, n$ și $z^0 \in D$, i.e. sînt verificate ecuațiile lui Laplace: $\Delta_k P = \Delta_k Q = 0$ sau $\Delta_k f = 0$, unde $\Delta_k = \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_k^2}$. Remarcăm că folosind operatorii formali, putem scrie $\Delta_k = \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \bar{z}_k}$.

Ca și în cazul unei singure variabile complexe, existența derivatelor parțiale ale unei funcții în raport cu z_k , $k = 1, \dots, n$, ar putea fi cerută numai într-un punct $z^0 \in D$, dar atunci nu se obțin consecințe suficient de bogate.

Definiția 2. Prin olomorfie într-un punct z^0 sau într-un închis $F \subset \mathbb{C}^n$, vom înțelege olomorfie într-un deschis, care conține z^0 , resp. include F .

2. Teorema lui Hartogs. Din definiția 1 rezultă imediat că o funcție olomorfă într-un deschis D din $\mathbb{C}^n$ este continuă în raport cu fiecare dintre variabilele z_k , $k = 1, \dots, n$. Vom demonstra însă

că o funcție olomorfă în D este o aplicație continuă a lui D în $\mathbb{C}$. În acest scop este suficient să stabilim

Teorema 1. (*Teorema fundamentală a lui Hartogs* *.) Dacă $f(z)$ este olomorfă în polidiscul închis $\bar{U}_R(0)$ (i.e. într-un deschis care include acest polidisc), atunci $f(z)$ este continuă în $\bar{U}_R(0)$.

Vom folosi inducția relativ la numărul n al variabilelor. În cazul $n = 1$, teorema este evidentă. O vom presupune adevărată pentru $n-1$ variabile. Pentru a demonstra cazul funcțiilor de n variabile vom stabili mai întâi două leme.

Lema 1. (*Hartogs*.) Dacă $f(z)$ este olomorfă în polidiscul închis $\bar{U}_R(0)$ și mărginită într-un polidisc închis $\bar{U}_{\rho_k}(0)$, unde $\rho_k > R_k$ pentru $k = 1, \dots, n-1$, atunci $f(z)$ este continuă în $\bar{U}_R(0)$.

Demonstrația acestei leme constă în scrierea funcției $f(z)$ ca sumă a unei serii uniform convergente în $\bar{U}_R(0)$ de funcții continue în $\bar{U}_R(0)$.

Deoarece $f(z)$ este olomorfă într-un deschis, care include $\bar{U}_R(0)$, putem alege numerele $\tilde{R}_k > R_k$, $k = 1, \dots, n$, astfel încît $\tilde{R}_k \leq \rho_k$ pentru $k = 1, \dots, n-1$ și $f(z)$ să fie olomorfă în $\bar{U}_{\tilde{R}}(0)$. Fie z' un punct arbitrar din $\bar{U}_{\tilde{R}}(0')$, pe care îl păstrăm fix. Atunci f rămîne funcție de o singură variabilă z_n și conform ipotezei este olomorfă în $|z_n| \leq \tilde{R}_n$. Prin urmare $f(z)$ se dezvoltă în jurul lui $z_n = 0$ într-o serie Taylor, cu coeficienții depinzînd de z' și raza de convergență $> \tilde{R}_n$

$$f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} f_v(z') z_n^v. \quad (3)$$

Seria (3) este convergentă absolut și uniform în $|z_n| \leq \tilde{R}_n$ și coeficienții ei sînt

$$f_v(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_n|=r_n} \frac{f(z', \zeta_n)}{\zeta_n^{v+1}} d\zeta_n, \quad (4)$$

*) Teorema aceasta a fost stabilită de F. Hartogs în 1905, [45], folosind rezultate datorite lui W. Osgood, care în 1900 obținuse o demonstrație în ipoteza suplimentară că funcția considerată este mărginită. În această ipoteză, C. Constantinescu și A. Cornea au dat teoremei o demonstrație deosebit de simplă, bazată pe lema lui Schwarz, [50] p. 85, teorema 1.4.

unde putem lua $r_n \in (0, \tilde{R}_n]$. Deoarece prin ipoteză există o constantă M astfel încît $|f(z)| < M$ în $\bar{U}_\rho(0)$, dacă $r_n \leq \min(\rho_n, \tilde{R}_n)$

$$|f_\nu(z')| \leq \frac{M}{r_n^\nu} \quad (5)$$

(inegalitățile lui Cauchy), $\nu = 0, 1, \dots$, [81], vol. I, cap. III, 43 și 46.

Seria (3) exprimă funcția $f(z)$ ca o serie de funcții $f_\nu(z')$ z_n^ν în $\bar{U}_{\tilde{R}}(0)$, deci în $\bar{U}_R(0)$. Vom demonstra că

a. $f_\nu(z')$ z_n^ν este continuă în $\bar{U}_R(0)$, $\nu = 0, 1, \dots$ și

b. seria (3) converge uniform în $\bar{U}_R(0)$.

a. Această afirmație se obține stabilind, prin inducție după ν , că funcțiile $f_\nu(z')$ sînt olomorfe în $U_{\tilde{R}}(0')$. Cum teorema lui Hartogs este presupusă verificată pentru funcții de $n-1$ variabile prin ipoteza inducției relative la n , deducem că $f_\nu(z')$ este continuă în $\bar{U}_R(0')$. Funcția z_n^ν este de asemenea continuă în $|z_n| \leq R_n$, astfel încît produsul $f_\nu(z')$ z_n^ν rezultă continuu în $\bar{U}_R(0)$.

a. 1) Pentru $\nu = 0$, funcția $f_0(z') = f(z', 0)$ care este olomorfă în $\bar{U}_{\tilde{R}}(0')$ prin ipoteză.

a. 2) Presupunem $f_\nu(z')$ olomorfă în $U_{\tilde{R}}(0')$ pentru $\nu = 1, 2, \dots, m-1$ și demonstrăm olomorfia funcției $f_m(z')$:

Fie pentru $z \in \bar{U}_{\tilde{R}}(0') \times (0 < |z_n| \leq \tilde{R}_n)$,

$$\psi_m(z) = \frac{f(z) - \sum_{\nu=0}^{m-1} f_\nu(z') z_n^\nu}{z_n^m} = \sum_{k=0}^{\infty} f_{m+k}(z') z_n^k. \quad (6)$$

Prin ipoteza relativă la ν , funcția $\psi_m(z)$ este olomorfă în $U_{\tilde{R}}(0') \times (0 < |z_n| < \tilde{R}_n)$. Dar pentru z' fixat în $\bar{U}_{\tilde{R}}(0')$, suma seriei Taylor $\sum_{k=0}^{\infty} f_{m+k}(z') z_n^k$ este continuă în $|z_n| \leq \tilde{R}_n$ și tinde la $f_m(z')$, cînd $z_n \rightarrow 0$. Prin urmare

$$\lim_{z_n \rightarrow 0} \psi_m(z) = f_m(z'). \quad (7)$$

a. 3) Limita (7) este uniformă în raport cu $z' \in \bar{U}_{\tilde{R}}(0')$. Într-adevăr, ținând seama de (5) și presupunând $|z_n| < r_n$,

$$|\psi_m(z) - f_m(z')| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_{m+k}(z') z_n^k \right| \leq \frac{M}{r_n^m} \frac{|z_n|}{r_n - |z_n|},$$

majorare independentă de z' și care tinde la 0 o dată cu z_n .

a. 4) Pentru a demonstra că $f_m(z')$ este olomorfă în $U_{\tilde{R}}(0')$ trebuie să verificăm după definiție că este olomorfă în fiecare variabilă z_k separat, $k = 1, \dots, n-1$. Fie deci k unul dintre acești indici și să fixăm z_j pentru $j \neq k, j=1, \dots, n-1$, în $|z_j| < \tilde{R}_j$. Astfel $f_m(z')$ devine funcția numai de z_k în $|z_k| < \tilde{R}_k$ și pentru fiecare z_n fixat în $0 < |z_n| < \tilde{R}_n$, $\psi_m(z) = \psi_m(z', z_n)$ este o funcție de z_k olomorfă în $|z_k| < \tilde{R}_k$. Interpretând z_n ca o mulțime de indici, $\psi_m(z', z_n)$ formează o familie de funcții olomorfe în $|z_k| < \tilde{R}_k$, care tinde uniform în $|z_k| < \tilde{R}_k$ la $f_m(z')$ cînd $z_n \rightarrow 0$. Teorema lui Weierstrass relativă la șiruri uniform convergente de funcții olomorfe de o variabilă complexă se aplică familiei $\{\psi_m(z', z_n)\}_{z_n}$ (luînd de exemplu șirul de funcții $\psi_m(z', \frac{1}{q})$, q număr natural, $q > \tilde{R}_n^{-1}$) și se obține că $f_m(z')$ este olomorfă în $|z_k| < \tilde{R}_k$, oricare ar fi $|z_j| < \tilde{R}_j, j \neq k$. În acest mod, afirmația a. este complet demonstrată.

b. Dacă $\rho_n > R_n$, putem presupune $R_n < \tilde{R}_n \leq \rho_n$ și, luînd $r_n = \tilde{R}_n$ în (5), deducem că seria (3) este majorată în $\bar{U}_R(0)$ de seria $\sum_{v=0}^{\infty} M \left(\frac{R_n}{\tilde{R}_n} \right)^v$, prin urmare este uniform convergentă.

Rămîne să demonstrăm că seria (3) este uniform convergentă în $\bar{U}_R(0)$ în ipoteza $\rho_n \leq R_n$.

Termenul general al seriei (3) este majorat în $\bar{U}_R(0)$ de

$$|f_v(z')| \tilde{R}_n^v \left(\frac{R_n}{\tilde{R}_n} \right)^v.$$

Fie $\varepsilon > 0$ suficient de mic ca $e^\varepsilon R_n < \tilde{R}_n$. Vom stabili că, pentru v suficient de mare și $z' \in \bar{U}_{R'}(0')$, avem

$$|f_v(z') \tilde{R}_n^v| < e^{\varepsilon v}, \quad (8)$$

aplicind următoarea leamnă, pe care o vom demonstra ulterior (a se vedea nr. 3 al acestui paragraf) cu ajutorul funcțiilor subarmonice:

Lema 2. Fie $U_{R^*}(0)$ un polidisc din C^p și $g(z)$, $z = (z_1, \dots, z_p)$, o funcție continuă și olomorfă în $\bar{U}_{R^*}(0)$. Să notăm cu $I^p = \{\theta \mid \theta = (\theta_1, \dots, \theta_p), 0 \leq \theta_k \leq 2\pi, k = 1, \dots, p\}$, cu $Q = \{\theta \in I^p \mid |g(\zeta)| > 1, \zeta_k = R_k^* e^{i\theta_k}, k = 1, \dots, p\}$ și cu μ măsura mulțimii $Q \subset I^p$. Atunci pentru orice polidisc închis $\bar{U}_R(0) \subset U_{R^*}(0)$, are loc inegalitatea

$$\ln |g(z)| \leq K\mu \ln \|g\|_x, \quad (9)$$

unde $z \in \bar{U}_R(0)$, $K = \frac{1}{(2\pi)^p} \prod_{k=1}^p \frac{R_k^* + R_k}{R_k^* - R_k}$, iar $x = \{\zeta \in \partial_0 U_{R^*}(0) \mid |g(\zeta)| > 1\}$.

Vom lua $p = n - 1$, $g = f_v(z') \tilde{R}_n^v$ și $U_{R^*}(0')$ astfel încît $R_k < R_k^* < \tilde{R}_k$, $k = 1, \dots, n - 1$. Aplicind (5) pentru $r_n = \rho_n$, putem scrie pentru $z' \in \bar{U}_{R'}(0')$

$$\frac{1}{v} \ln |f_v(z') \tilde{R}_n^v| \leq K\mu_v \ln (M^{\frac{1}{v}} \tilde{R}_n \rho_n^{-1}), \quad (10)$$

unde μ_v este măsura mulțimii $Q_v = \{\theta \in I^{n-1} \mid |f_v(\zeta') \tilde{R}_n^v| > 1, \zeta_k = R_k^* e^{i\theta_k}, k = 1, \dots, n - 1\}$.

Să arătăm că $\lim_{v \rightarrow \infty} \mu_v = 0$. În acest scop, vom nota cu $E_N = \bigcup_{v=N}^{\infty} Q_v$ și cu m_N măsura lui E_N în I^{n-1} . Evident, $E_N \supset E_{N+1}$. Deoarece $\sum_{v=0}^{\infty} f_v(z') \tilde{R}_n^v$ converge absolut pe $\partial_0 U_{R^*}(0')$, rezultă că $\bigcap_N E_N = \emptyset$.

Prin urmare, $m_N \rightarrow 0$, cînd $N \rightarrow \infty$, [68], p. 174, și cum $\mu_v \leq m_v$, $\mu_v \rightarrow 0$ cînd $v \rightarrow \infty$.

În concluzie, dacă v este suficient de mare, membrul drept al inegalității (10) este majorat de ε , de unde rezultă (8).

Lema 3. (Osgood.) Dacă $f(z)$ este olomorfă în $\bar{U}_R(0)$, atunci $f(z)$ este mărginită într-un polidisc închis $\bar{U}_\rho(0', z_n^0)$, unde $|z_n^0| < R_n$ și $\rho_k > R_k$, $k = 1, \dots, n-1$.

Să luăm un polidisc închis $\bar{U}_{\rho', R_n}(0)$ cu $\rho_k > R_k$, $k = 1, \dots, n-1$, în care $f(z)$ este olomorfă.

Pentru fiecare punct z_n cu $|z_n| \leq R_n$ (pe care îl păstrăm fixat) funcția $f(z', z_n)$ este olomorfă în $\bar{U}_{\rho'}(0')$ și conform teoremei lui Hartogs pentru funcții olomorfe de $n-1$ variabile (valabilă prin ipoteza inducției), $f(z', z_n)$ este continuă în $\bar{U}_{\rho'}(0')$. Să notăm cu $M(z_n) = \max_{z' \in \bar{U}_{\rho'}(0')} |f(z', z_n)|$.

Fie $U_N = \{z_n \mid |z_n| < R_n, M(z_n) > N\}$, N număr natural. Evident $U_N \supset U_{N+1}$. Se verifică imediat că mulțimile U_N sînt deschise și că $\bigcap_N U_N = \emptyset$. Conform teoremei lui Baire (a se vedea nr. 4 de mai jos) aplicată în $\mathbb{C}$ pentru $U = \{z_n \mid |z_n| < R_n\}$ și pentru mulțimile U_N , există un indice N_1 astfel încît $\bar{U}_{N_1} \not\subset U$, deci un punct $z_n^0 \in U$ și o vecinătate a sa $v = \{z_n \mid |z_n - z_n^0| < r_n, 0 < r_n \leq R_n - |z_n^0|\}$ astfel încît $v \cap U_{N_1} = \emptyset$, i.e. oricare ar fi $z_n \in v$, $M(z_n) \leq N_1$ sau, luînd $0 < \rho_n < r_n$, $|f(z)| \leq N_1$ în $\bar{U}_\rho(0', z_n^0)$.

Demonstrarea teoremei lui Hartogs

Prin ipoteză $f(z)$ este olomorfă în $\bar{U}_R(0)$. Să luăm un polidisc închis $\bar{U}_{\tilde{R}', R_n}(0)$, $\tilde{R}_k > R_k$ pentru $k = 1, \dots, n-1$, în care $f(z)$ să fie olomorfă.

Aplicînd lema lui Osgood funcției $f(z)$ în polidiscul $\bar{U}_{\tilde{R}', \frac{R_n}{3}}(0)$, deducem că $f(z)$ este mărginită într-un polidisc $\bar{U}_\rho(0', z_n^0)$, unde $\rho_k > \tilde{R}_k$, $k = 1, \dots, n-1$, și $|z_n^0| < \frac{R_n}{3}$.

Cum $\bar{U}_{\tilde{R}', \frac{2R_n}{3}}(0', z_n^0) \subset \bar{U}_{\tilde{R}', R_n}(0)$, funcția $f(z)$ este olomorfă în $\bar{U}_{\tilde{R}', \frac{2R_n}{3}}(0', z_n^0)$ și mărginită în $\bar{U}_\rho(0', z_n^0)$. Lema lui Hartogs (care este valabilă indiferent de centrul polidiscului considerat) implică continuitatea funcției $f(z)$ în $\bar{U}_{\tilde{R}', \frac{2R_n}{3}}(0', z_n^0)$.

Dar $\bar{U}_{\tilde{R}', \frac{R_n}{3}}(0) \subset \bar{U}_{\tilde{R}', \frac{2R_n}{3}}(0', z_n^0)$, deci $f(z)$ este continuă și prin urmare mărginită în $\bar{U}_{\tilde{R}', \frac{R_n}{3}}(0)$. Aplicînd din nou lema lui Hartogs pentru funcția $f(z)$ olomorfă în $\bar{U}_R(0)$, mărginită în $\bar{U}_{\tilde{R}', \frac{R_n}{3}}(0)$, deducem că $f(z)$ este continuă în $\bar{U}_R(0)$.

3. Vom demonstra acum lema 2, pe care am folosit-o mai sus. În acest scop, ne vom baza pe unele proprietăți ale funcțiilor subarmonice.

Definiția 3. Fie Ω un deschis din C . O funcție $u: \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty)$ se numește *subarmonică*, dacă:

1° Este superior semicontinuă.

2° Oricare ar fi compactul $K \subset \Omega$ și oricare ar fi funcția $h: K \rightarrow \mathbb{R}$, continuă pe K , armonică în $\overset{\circ}{K}$ și care verifică inegalitatea $h(z) \geq u(z)$ pentru orice $z \in \partial K$, avem $h(z) \geq u(z)$ pentru orice $z \in K$.*)

În considerațiile noastre este suficient să ne limităm la funcții subarmonice continue și vom folosi denumirea de funcție subarmonică în sensul restrîns de funcție subarmonică continuă.

Se verifică direct următoarele proprietăți ale funcțiilor subarmonice **).

Propoziția 4. Dacă u este subarmonică și $c \in \mathbb{R}_+$, atunci cu este subarmonică.

*) Funcția $-\infty$ este subarmonică. Este suficient ca propoziția 3° să aibă loc pentru domenii jordanice sau chiar pentru cercuri $K \subset \Omega$.

**) Propozițiile de mai jos sînt valabile pentru funcții subarmonice în sensul general din definiția 3.[89]. În teoria funcțiilor de mai multe variabile complexe, funcțiile subarmonice constituie un instrument. Cu ajutorul lor se definește noțiunea importantă de funcție plurisubarmonică, [50], p. 106—108.

Propoziția 5. Dacă funcțiile u_k , $k = 1, \dots, n$, sînt subarmonice, atunci $\max(u_1, \dots, u_n)$ este subarmonică.

Propoziția 6. Fie $z_0 \in \Omega$ și $n > 0$, astfel încît $\bar{U}_r(z_0) = \{z \mid |z - z_0| \leq r\} \subset \Omega$. Dacă funcția u este subarmonică în Ω , atunci

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta. \quad (11)$$

Într-adevăr, $u(z_0) \leq h(z_0)$, unde $h(z)$ este funcția continuă în $\bar{U}_r(z_0)$, armonică în $U_r(z_0)$, egală cu $u(z)$ pe $\partial U_r(z_0)$. După formula mediei a lui Gauss ([81], vol. II, p. 16), $h(z_0)$ este egal cu membrul drept din (11).

Propoziția 7. Reciproc, o funcție $u: \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty)$, continuă în Ω , cu proprietatea: oricare ar fi $z_0 \in \Omega$ există un număr $r_0(z_0) > 0$, astfel încît pentru $r \in (0, r_0)$ să fie verificată inegalitatea (11), este subarmonică.

Fie K un compact din Ω și h o funcție cu proprietățile din condiția 2°. Funcția $v = u - h$ este continuă în K și $v \leq 0$ pe ∂K . Vom nota cu $M = \max_K v$.

Dacă $M \leq 0$, atunci $u \leq h$ în K , ceea ce trebuia demonstrat. Să presupunem prin reducere la absurd că $M > 0$. Atunci mulțimea $A = \{z \in K \mid v(z) = M\}$ este nevidă, compactă și $A \subset \overset{\circ}{K}$. Fie $d = d(A, \partial K) > 0$ și $z_0 \in A$, astfel încît $d(z_0, \partial K) = d$. Luînd $r < \min[d, r_0(z_0)]$, avem inegalitatea $v(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$.

Pe circumferința $|z - z_0| = r$ există arce, care nu aparțin lui A . Fie $\sigma > 0$ lungimea acestor arce măsurată în radiani. Atunci din inegalitatea de mai sus deducem $M < \frac{M\sigma}{2\pi} + \frac{M(2\pi - \sigma)}{2\pi} = M$, ceea ce este absurd.

Propozițiile 6 și 7 dau o caracterizare a funcțiilor subarmonice și arată că subarmonicitatea este o *proprietate locală*. Cu ajutorul acestei observații, verificăm imediat

Propoziția 8. Fie $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ o funcție olomorfă și $\epsilon > 0$. Atunci funcția $g_\epsilon(z) = \ln \max(|g(z)|, \epsilon)$ este subarmonică.

Să arătăm că g_ε este subarmonică în vecinătatea fiecărui punct $z_0 \in \Omega$: 1) Dacă $|g(z_0)| < \varepsilon$, există o vecinătate a lui z_0 , în care $g_\varepsilon = \ln \varepsilon$, deci în care g_ε este subarmonică. 2) Dacă $|g(z_0)| > \varepsilon$, există o vecinătate a lui z_0 , în care $|g(z)| > \varepsilon$, deci în care g_ε este subarmonică. 3) Dacă $|g(z_0)| = \varepsilon$, există o vecinătate a lui z_0 , în care $|g(z)| > \frac{\varepsilon}{2}$, prin urmare după propoziția 5, o vecinătate în care g_ε este subarmonică.

Cu ajutorul acestor propoziții elementare putem trece acum la *Demonstrația lemei 2*. Pentru $\zeta \in \partial_0 U_{R^*}(0)$ și $z \in U_{R^*}(0)$, vom nota $\zeta_k = R_k^* e^{i\theta_k}$ și $z_k = r_k e^{i\varphi_k}$, $r_k < R_k^*$, $k=1, \dots, p$ și vom stabili inegalitatea

$$\begin{aligned} & \ln |g(z)| \leq \\ & \leq \frac{1}{(2\pi)^p} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \prod_{k=1}^p \frac{R_k^{*2} - r_k^2}{R_k^{*2} - 2R_k^* r_k \cos(\theta_k - \varphi_k) + r_k^2} \ln |g(\zeta)| d\theta_1 \dots d\theta_p. \end{aligned} \quad (12)$$

În cursul demonstrației z va fi un punct fix, dar arbitrar din $U_{R^*}(0)$, astfel încît notăm un punct variabil din $\bar{U}_{R^*}(0)$ cu $Z = (Z_1, \dots, Z_p)$.

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar și $g_\varepsilon(Z) = \ln \max(|g(Z)|, \varepsilon)$, $Z \in \bar{U}_{R^*}(0)$.

Funcția $g(Z_1, z_2, \dots, z_n)$ este olomorfa în $|Z_1| \leq R_1^*$, deci după propoziția 8, funcția $g_\varepsilon(Z_1, z_2, \dots, z_n)$ este subarmonică și continuă în $|Z_1| \leq R_1^*$. Să notăm cu $h_\varepsilon(Z_1, z_2, \dots, z_n)$ funcția armonică în $|Z_1| < R_1^*$, continuă în $|Z_1| \leq R_1^*$ și egală cu g_ε pe $|Z_1| = R_1^*$. Această funcție este dată de integrala lui Poisson ([81], vol. II, p. 23) și $g_\varepsilon(z) < h_\varepsilon(z)$, astfel încît

$$g_\varepsilon(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R_1^{*2} - r_1^2}{R_1^{*2} - 2R_1^* r_1 \cos(\theta_1 - \varphi_1) + r_1^2} g_\varepsilon(\zeta_1, z_2, \dots, z_p) d\theta_1.$$

Pentru fiecare ζ_1 fixat cu $|\zeta_1| = R_1^*$, să considerăm $g_\varepsilon(\zeta_1, Z_2, z_3, \dots, z_p)$ ca funcție de Z_2 în $|Z_2| \leq R_2^*$. Repetînd raționamentul anterior

$$\begin{aligned} & g_\varepsilon(\zeta_1, z_2, z_3, \dots, z_p) \leq \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R_2^{*2} - r_2^2}{R_2^{*2} - 2R_2^* r_2 \cos(\theta_2 - \varphi_2) + r_2^2} g_\varepsilon(\zeta_1, \zeta_2, z_3, \dots, z_p) d\theta_2. \end{aligned}$$

Continuind, obținem

$$g_\varepsilon(\zeta_1, \dots, \zeta_{p-1}, z_p) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R_p^{*2} - r_p^2}{R_p^{*2} - 2R_p^* r_p \cos(\theta_p - \varphi_p) + r_p^2} g_\varepsilon(\zeta) d\theta_p,$$

prin urmare

$$g_\varepsilon(z) \leq \frac{1}{(2\pi)^p} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \prod_{k=1}^p \frac{R_k^{*2} - r_k^2}{R_k^{*2} - 2R_k^* r_k \cos(\theta_k - \varphi_k) + r_k^2} g_\varepsilon(\zeta) d\theta_1 \dots d\theta_p, \quad (13)$$

unde conform teoremei lui Fubini în membrul stîng avem o integrală multiplă extinsă pe $I^p \subset \mathbb{R}^p$. Cum nucleul integralei Poisson este pozitiv și cum $g_\varepsilon \searrow \ln|g|$ cînd $\varepsilon \searrow 0$, teorema de convergență monotonă a lui Lebesgue-Beppo Levi ([68], p. 191) ne dă inegalitatea (12).

Ținînd seama de inegalitățile lui Harnack ([81, vol. II, p. 37] din (12) deducem (9).

4. În demonstrația teoremei lui Hartogs am aplicat și teorema lui Baire. Se știe că într-un spațiu topologic local compact (i.e. un spațiu în care orice punct are o vecinătate compactă) și separat, fiecare punct admite o bază de vecinătăți compacte.

Teorema 2. (Baire). Fie F un spațiu topologic local compact și separat (în particular un spațiu metric complet), U un deschis din E și U_N , $N = 1, 2, \dots$, un șir de mulțimi deschise din U , dense în U : $U_N \subset U$ și $\overline{U_N} \supset U$. Atunci $\bigcap_N \overline{U_N} \supset U$.

Vom arăta că orice punct $a_0 \in U$ este punct aderent al mulțimii $\bigcap_N U_N$, i.e. oricare ar fi vecinătatea v_{a_0} a lui a_0 , $v_{a_0} \cap (\bigcap_N U_N) \neq \emptyset$. Este suficient să presupunem $v_{a_0} \subset U$. Deoarece $a_0 \in \overline{U_1}$, există $a_1 \in v_{a_0} \cap U_1$. Putem lua o vecinătate v_{a_1} a lui a_1 și un compact K_1 , astfel încît $a_1 \in v_{a_1} \subset K_1 \subset v_{a_0} \cap U_1$. Cum $a_1 \in \overline{U_2}$, repetînd procedeul obținem: $a_2 \in v_{a_2} \subset K_2 \subset v_{a_1} \cap U_2$ și în general, $a_N \in v_{a_N} \subset K_N \subset v_{a_{N-1}} \cap U_N$. Compactele K_N sînt nenule și formează șir monoton $K_N \supset K_{N+1}$, astfel încît există $a \in \bigcap_N K_N$. Dar $\bigcap_N K_N \subset v_{a_0} \cap (\bigcap_N U_N)$.

§ 4. Reprezentarea funcțiilor olomorfe cu ajutorul formulei integrale a lui Cauchy. Aplicații

1. Vom începe studiul funcțiilor olomorfe de mai multe variabile prin extinderea formulei integrale a lui Cauchy, ceea ce ne va permite să stabilim numeroase proprietăți fundamentale ale acestor funcții printre care diferențiabilitatea de orice ordin și dezvoltabilitatea în serie Taylor.

Teorema 1. (*Formula integrală a lui Cauchy.*) Fie Δ_k un domeniu din planul variabilei z_k și D_k un domeniu a cărui frontieră C_k constă dintr-un număr finit de curbe jordaniene rectificabile, disjuncte două câte două, și astfel încît $D_k \cup C_k \subset \Delta_k$; presupunem frontiera C_k orientată în sens direct față de D_k , $k = 1, \dots, n$. Vom nota în $\mathbb{C}^n$ cu $\Delta = \Delta_1 \times \dots \times \Delta_n$, cu $D = D_1 \times \dots \times D_n$ și cu $\partial_0 D = C_1 \times \dots \times C_n$.

Fie $f: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ o funcție olomorfă în Δ . Atunci pentru orice punct $z \in D$, are loc formula integrală a lui Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C_1} \int_{C_2} \dots \int_{C_n} \frac{f(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2) \dots (\zeta_n - z_n)} d\zeta_1 d\zeta_2 \dots d\zeta_n, \quad (1)$$

unde $\zeta \in \partial_0 D$, iar $\int_{C_1} \dots \int_{C_n}$ reprezintă integrala iterată, luată succesiv pe drumurile $C_n, C_{n-1}, \dots, C_1$. Ordinea efectuării integrării este arbitrară.

Aplicăm un procedeu analog cu cel utilizat pentru a demonstra inegalitatea (12) din § 3.

Fie z un punct fixat, dar arbitrar din D și Z un punct variabil în Δ .

Funcția $f_1(Z_1) = f(Z_1, z_2, \dots, z_n)$ este olomorfă în Δ_1 , iar formula integrală a lui Cauchy aplicată acestei funcții ne dă în punctul $Z_1 = z_1$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta_1, z_2, \dots, z_n)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1. \quad (2)$$

Pentru fiecare punct ζ_1 din C_1 , pe care îl considerăm fixat, funcția $f_2(Z_2) = f(\zeta_1, Z_2, z_3, \dots, z_n)$ este olomorfă în Δ_2 , astfel încît cu ajutorul formulei integrale a lui Cauchy putem scrie în punctul $Z_2 = z_2$

$$f(\zeta_1, z_2, \dots, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2, z_3, \dots, z_n)}{\zeta_2 - z_2} d\zeta_2. \quad (3)$$

Înlocuind $f(\zeta_1, z_2, \dots, z_n)$ din (2) prin (3) și observînd că factorul $\frac{1}{\zeta_1 - z_1}$ poate fi scris sub $\int_{C_2}$, deducem

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2, z_3, \dots, z_n)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} d\zeta_1 d\zeta_2.$$

Repetînd procedeul, stabilim formula (1). Demonstrația arată că ordinea efectuării integralelor pe curbele C_k nu influențează rezultatul.

Observația 1. Cum integrandul din formula (1) este o funcție continuă pe compactul $C_1 \times \dots \times C_n$ pentru z fix din D , integrala iterată (1) se poate înlocui printr-o integrală multiplă

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_0 D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_n - z_n)} d\zeta_1 \dots d\zeta_n. \quad (1')$$

Observația 2. Formula integrală a lui Cauchy arată că valorile luate de funcția $f(z)$ olomorfă în $\bar{D}$ depind de valorile luate pe $\partial_0 D$. În particular, ea este valabilă pentru un polidisc $U_R(z^0)$ și orice funcție $f(z)$ olomorfă în $\bar{U}_R(z^0)$.

Observația 3. În cazul unei singure variabile complexe, formula integrală a lui Cauchy se stabilește și pentru funcții olomorfe într-un domeniu D (limitat de un număr finit de curbe jordaniane rectificabile C) și continue în $\bar{D}$. Se obține o generalizare corespunzătoare pentru funcțiile de mai multe variabile, olomorfe în $D = D_1 \times \dots \times D_n$ și continue în $\bar{D}$, repetînd raționamentul precedent, dar cu completări corespunzătoare. Fie $z \in D$, $\zeta \in \partial_0 D$ și $Z \in \bar{D}$. Relația (2) se scrie direct, însă pentru (3) este necesar să știm că oricare ar fi ζ_1 fixat pe C_1 , funcția $f(\zeta_1, Z_2, z_3, \dots, z_n)$ este olomorfă în D_2 . În acest scop, să ținem seama că $f(Z)$ este uniform

continuă în $\bar{D}$ și $f(\zeta_1, Z_2, z_3, \dots, z_n) = \lim_{Z_1 \rightarrow \zeta_1, Z_1 \in D_1} f(Z_1, Z_2, z_3, \dots, z_n)$, limită uniformă în raport cu $Z_2 \in D_2$. Vom aplica apoi teorema lui Weierstrass despre șiruri uniform convergente de funcții olomorfe în D_2 , ca în § 3, nr. 2. a. 4). Procedeu continuă în mod analog.

2. Grupăm aici câteva *proprietăți ale integralelor curbilinii repetate*, ale căror demonstrații sînt în general simple aplicații ale definițiilor și ale continuității uniforme pe compacte, dar care vor fi mereu folosite.

Observația 4. Fie K un spațiu compact, E un spațiu topologic oarecare și $g: K \times E \rightarrow \mathbb{C}$ o aplicație continuă: $w = g(\zeta, p)$, $\zeta \in K$ și $p \in E$.

1) Oricare ar fi punctul $p_0 \in E$ și numărul $\varepsilon > 0$, există o vecinătate v_{p_0} a lui p_0 în E , astfel încît în $K \times v_{p_0}$,

$$|g(\zeta, p) - g(\zeta, p_0)| < \varepsilon. \quad (4)$$

2) Să presupunem K spațiu metric și să notăm cu $d_K(\zeta', \zeta'')$ distanța între două puncte ζ' și ζ'' din K . Oricare ar fi $p_0 \in E$ și $\varepsilon > 0$, există o vecinătate v_{p_0} a lui p_0 în E și un număr $\eta > 0$, astfel încît îndată ce $d_K(\zeta', \zeta'') < \eta$, $\zeta', \zeta'' \in K$ și $p \in v_{p_0}$,

$$|g(\zeta', p) - g(\zeta'', p_0)| < \varepsilon. *) \quad (5)$$

Propoziția 1. (*Păstrarea continuității prin integrare.*) Fie C un drum continuu rectificabil în planul variabilei complexe ζ , E un spațiu topologic și $g: C \times E \rightarrow \mathbb{C}$ o funcție complexă continuă. Pentru fiecare $p \in E$ fixat, are sens integrala

$$G(p) = \int_C g(\zeta, p) d\zeta. \quad (6)$$

Funcția $G: E \rightarrow \mathbb{C}$ este continuă.

Prin aplicarea repetată a propoziției 1 se obține

*) Observațiile 1) și 2) se extind imediat la cazul în care $g: K \times E \rightarrow F$, unde F este un spațiu metric.

Propoziția 1'. Fie $C_1, \dots, C_n$ drumuri continue rectificabile din planele variabilelor complexe $\zeta_1, \dots, \zeta_n$, E un spațiu topologic și $g: C_1 \times \dots \times C_n \times E \rightarrow \mathbb{C}$ o funcție complexă continuă. Atunci există integrala repetată

$$G(p) = \int_{C_1} \dots \int_{C_n} g(\zeta_1, \dots, \zeta_n, p) d\zeta_1 \dots d\zeta_n \quad (7)$$

și este continuă pe E .

În aplicațiile ulterioare ale propoziției 1' spațiul E va fi de forma $E = \Delta \times M$, unde Δ este un deschis din $\mathbb{C}^m$, iar M o mulțime din $\mathbb{R}^s$, înzestrată cu topologia indusă.

Observația 5. Se verifică ușor că integrala (7) nu depinde de ordinea în care se efectuează integrările. De altfel, ținând seama că pentru fiecare punct p fixat din E , integrandul este o funcție continuă pe compactul $C_1 \times \dots \times C_n$ integrala (7) coincide cu integrala multiplă $\int_{C_1 \times \dots \times C_n} g(\zeta_1, \dots, \zeta_n, p) d\zeta_1 \dots d\zeta_n$. Remarcăm că

în unele propoziții legate de teoria formelor diferențiale exterioare, $d\zeta_1 \dots d\zeta_p$ va fi notat și $d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_p$, ceea ce va fixa ordinea variabilelor.

Propoziția 2. (Păstrarea olomorfiei prin integrare.) Fie C un drum continuu rectificabil din planul ζ , Δ un deschis din planul z și E un spațiu topologic. Presupunem că aplicația $g: C \times \Delta \times E \rightarrow \mathbb{C}$, $w = g(\zeta, z, p)$, are următoarele proprietăți:

- 1) g este continuă.
- 2) Oricare ar fi punctul $(\zeta, p) \in C \times E$, dacă îl păstrăm fix, funcția de z obținută astfel din g este olomorfă în Δ .
- 3) Aplicația $g_z: C \times \Delta \times E \rightarrow \mathbb{C}$, care există conform ipotezei 2), este continuă.

Atunci funcția

$$G(z, p) = \int_C g(\zeta, z, p) d\zeta \quad (8)$$

este continuă pe $\Delta \times E$ și, pentru fiecare $p \in E$ fixat, este olomorfă în z din Δ , iar

$$G_z(z, p) = \int_C g_z(\zeta, z, p) d\zeta. \quad (9)$$

Să fixăm $(z, p) \in \Delta \times E$ și să notăm un punct variabil în Δ cu Z . Există un număr $\rho > 0$, astfel încît cercul închis $\gamma = \{Z \mid |Z - z| \leq \rho\} \subset \Delta$. Pentru a demonstra existența derivatei lui G în raport cu Z în punctul (z, p) și formula (9), vom evalua pentru $Z \in \gamma$ diferența

$$\left| \frac{G(Z, p) - G(z, p)}{Z - z} - \int_C g_z(\zeta, z, p) d\zeta \right| = \\ = \left| \frac{1}{Z - z} \int_C [g(\zeta, Z, p) - g(\zeta, z, p) - (Z - z) g_z(\zeta, z, p)] d\zeta \right|. \quad (10)$$

Pentru orice ζ fixat pe C , (p fiind deja fixat), funcția $g(\zeta, Z, p)$ este olomorfă în Δ . Prin urmare, putem scrie pentru $Z \in \gamma$,

$$g(\zeta, Z, p) - g(\zeta, z, p) = \int_z^Z g_z(\zeta, u, p) du$$

și alege ca drum de integrare segmentul de dreaptă σ cu originea z și extremitatea Z . Rezultă că (10) este egal cu

$$\left| \frac{1}{Z - z} \int_C \left\{ \int_z^Z [g_z(\zeta, u, p) - g_z(\zeta, z, p)] du \right\} d\zeta \right|. \quad (11)$$

Punctul p fiind fix în E , aplicăm observația 4. 1) funcției $g_z(\zeta, u, p)$ în punctul $z \in \Delta$ și anume: oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $v_z = \{u \mid |u - z| < r, r > 0\} \subset \Delta$, astfel încît pentru orice $\zeta \in C$ să avem

$$|g_z(\zeta, u, p) - g_z(\zeta, z, p)| < \varepsilon. \quad (12)$$

Luînd $\rho < r$, inegalitatea (12) este verificată pe tot segmentul σ , prin urmare

$$\left| \int_z^Z [g_z(\zeta, u, p) - g_z(\zeta, z, p)] du \right| < \varepsilon |Z - z|,$$

iar expresia (11) este majorată de εL , (L — lungimea lui C), pentru $|Z - z| < \rho$. Cum $\varepsilon > 0$ este arbitrar, propoziția 2 este demonstrată.

Propoziția 2'. Fie $C_1, \dots, C_n$ drumuri continue rectificabile din planele variabilelor complexe $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ resp., Δ un deschis din $\mathbb{C}^m$, $z = (z_1, \dots, z_m)$ un punct arbitrar din Δ și E un spațiu topologic. Presupunem aplicația $g: C_1 \times \dots \times C_n \times \Delta \times E \rightarrow \mathbb{C}$

- 1) continuă în $C_1 \times \dots \times C_n \times \Delta \times E$,
- 2) olomorfă în Δ , pentru fiecare (ζ, p) fixat în $C_1 \times \dots \times C_n \times E$ și avînd proprietatea:
- 3) oricare ar fi $k = 1, \dots, m$, funcția $g_{z_k}(\zeta, z, p)$ este continuă pe $C_1 \times \dots \times C_n \times \Delta \times E$.

Atunci integrala repetată

$$G(z, p) = \int_{C_1} \dots \int_{C_n} g(\zeta, z, p) d\zeta_1 \dots d\zeta_n \quad (13)$$

este continuă pe $\Delta \times E$, olomorfă pe Δ pentru $p \in E$ fix, dar arbitrar și, oricare ar fi $k = 1, \dots, m$,

$$G_{z_k}(z, p) = \int_{C_1} \dots \int_{C_n} g_{z_k}(\zeta, z, p) d\zeta_1 \dots d\zeta_n. \quad (14)$$

Demonstrația rezultă imediat din propozițiile 1' și 2. Să fixăm $z \in \Delta$ și indicele $k \in \{1, \dots, m\}$ și să notăm cu Z un punct variabil în Δ ; mulțimea $\Delta \cap C_k(z)$, $C_k(z) = \{Z \mid Z_j = z_j, j = 1, \dots, m, j \neq k\}$, este reprezentată omeomorf prin proiecția $p_k: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$ pe un deschis δ_k din planul variabilei Z_k .

După propoziția 1' există și sînt continue pe $C_{j+1} \times \dots \times C_n \times E$ următoarele funcții: $G_j(\zeta_{j+1}, \dots, \zeta_n, Z, p) = \int_{C_j} G_{j-1}(\zeta_j, \dots, \zeta_n, Z, p) d\zeta_j$, $j = 1, \dots, n$, unde $G_0(\zeta, Z, p) = g(\zeta, Z, p)$ și $G_n(Z, p) = G(Z, p)$.

Funcția $G_0(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, z_1, \dots, z_m, p)$ satisface condițiile propoziției 2 pe mulțimea $C_1 \times \delta_k \times (C_2 \times \dots \times C_n \times E)$, deci pentru $\zeta_2, \dots, \zeta_n$ și p fixate, funcția $G_1(\zeta_2, \dots, \zeta_n, z_1, \dots, z_m, p)$ este olomorfă în δ_k și $\frac{\partial G_1}{\partial z_k}(\zeta_2, \dots, \zeta_n, z, p) = \int_{C_1} g_{z_k}(\zeta, z, p) d\zeta_1$. Repetînd raționamentul prin inducție după j , obținem olomorfia funcției $G(z_1, \dots, Z_k, \dots, z_m, p)$ pentru $Z_k \in \delta_k$, p fix, și formula (14).

Notatii. Fie $N = \{0, 1, 2, \dots\}$. Se știe că N este un monoid față de operația de adunare a numerelor întregi cu elementul neutru 0.

Pentru fiecare număr natural n , $N^n = \underbrace{N \times \dots \times N}_{\text{de } n \text{ ori}} = \{j = (j_1, \dots, j_n) \mid j_k \in N, k = 1, \dots, n\}$ formează de asemenea un monoid față de adunare. Dacă j și j' sînt două elemente arbitrare din N^n , $j = (j_1, \dots, j_n)$ și $j' = (j'_1, \dots, j'_n)$, atunci $j + j' = (j_1 + j'_1, \dots, j_n + j'_n)$. Elementul neutru este $0 = (0, \dots, 0)$.

Introducem pe N^n *valoarea absolută*, o aplicație care asociază fiecărui element $j \in N^n$ numărul $|j| = j_1 + \dots + j_n \in N$. Într-adevăr, $|j| = 0 \Leftrightarrow j = 0$, iar $|j + j'| = |j| + |j'|$.

Pentru fiecare n număr natural și $j \in N^n$, vom nota cu

$$D^j = \frac{\partial^{j_1 + \dots + j_n}}{\partial z_1^{j_1} \dots \partial z_n^{j_n}}.$$

Prin definiție se consideră $N^0 = \{0\}$.

Consecința 1. Dacă în ipotezele propoziției 2', atunci cînd fixăm ζ și p , funcția g are derivate de orice ordin în raport cu variabilele $z_1, \dots, z_m^*$, atunci G are derivate de orice ordin în raport cu $z_1, \dots, z_m$, pentru p fix; oricare ar fi $j \in N^m$,

$$D^j G(z, p) = \int_{C_1} \dots \int_{C_n} D^j g(\zeta, z, p) d\zeta_1 \dots d\zeta_n. \quad (15)$$

În cele ce urmează vom folosi însă nu numai păstrarea olomorfiei prin integrare, ci și păstrarea existenței derivatelor parțiale față de variabile reale. Procedînd ca și în cazul propozițiilor 2 și 2' de mai sus obținem

Propoziția 3. Fie $C_1, \dots, C_n$ drumuri continue rectificabile, situate în planele $\zeta_1, \dots$ resp. ζ_n , $\mathcal{D}$ un deschis din R^s și E un

*) Aceasta înseamnă că oricare ar fi k funcția $\frac{\partial g}{\partial z_k}$ de variabilele $z_1, \dots, z_m$ (ζ, p fixe) este olomorfă, deci continuă în Δ și oricare ar fi $j \in N^m$, $D^j g$ are aceleași proprietăți.

spațiu topologic, $X = (X_1, \dots, X_n)$ resp. p un punct arbitrar din $\mathbb{R}^s$ resp. E și $g: C_1 \times \dots \times C_n \times \mathcal{D} \times E \rightarrow \mathbb{C}$, o funcție cu proprietățile:

- 1) g este continuă pe $C_1 \times \dots \times C_n \times \mathcal{D} \times E$.
- 2) Pentru fiecare punct (ζ, p) fix, g este o funcție diferențiabilă de clasă C^r (resp. C^∞) pe $\mathcal{D}$.
- 3) Derivatele $D^j g$, $j = (j_1, \dots, j_s) \in \mathbb{N}^s$, $D^j = \partial^{j_1+\dots+j_s} / \partial X_1^{j_1} \dots \partial X_s^{j_s}$, care există conform punctului 2), sînt continue pe $C_1 \times \dots \times C_n \times \mathcal{D} \times E$. Atunci

$$G(X, p) = \int_{C_1} \dots \int_{C_n} g(\zeta, X, p) d\zeta_1 \dots d\zeta_n \quad (16)$$

este continuă pe $\mathcal{D} \times E$ și, pentru fiecare p fixat în E , diferențiabilă de clasă C^r (resp. C^∞) pe $\mathcal{D}$:

$$D^j G(X, p) = \int_{C_1} \dots \int_{C_n} D^j g(\zeta, X, p) d\zeta_1 \dots d\zeta_n. \quad (17)$$

3. Aplicații la studiul funcțiilor olomorfe

Teorema 2. (Integrala de tip Cauchy.) Fie C_k un drum continuu rectificabil în planul variabilei ζ_k și $\Delta_k = \mathbb{C} - C_k$, $k = 1, \dots, n$. Dacă funcția $\varphi: C_1 \times \dots \times C_n \rightarrow \mathbb{C}$ este continuă, atunci funcția F , definită în $\Delta = \Delta_1 \times \dots \times \Delta_n$ în modul următor:

$$F(z) = \int_{C_1} \dots \int_{C_n} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_n - z_n)} d\zeta_1 \dots d\zeta_n, \quad z \in \Delta, \quad (18)$$

se numește „integrală de tip Cauchy”. Ea este olomorfă și are derivate de orice ordin în Δ :

$$D^j F(z) = j_1! \dots j_n! \int_{C_1} \dots \int_{C_n} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1)^{j_1+1} \dots (\zeta_n - z_n)^{j_n+1}} d\zeta_1 \dots d\zeta_n, \quad z \in \Delta, \quad j \in \mathbb{N}^n. \quad (19)$$

Consecința 2. O funcție olomorfă are derivate de orice ordin, i.e. este diferențiabilă de clasă C^∞ .

Într-adevăr, fie $f(z)$ olomorfă în deschisul $\Delta \subset \mathbb{C}^n$ și $z^0 \in \Delta$. Atunci există un polidisc $\bar{U}_R(z^0) \subset \Delta$. Formula integrală a lui Cauchy (1) ne dă pentru orice $z \in U_R(z^0)$:

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C_1} \dots \int_{C_n} \frac{f(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_n - z_n)} d\zeta_1 \dots d\zeta_n,$$

unde $C_k = \{\zeta_k \in \mathbb{C} \mid |\zeta_k - z_k^0| = R_k\}$. Prin urmare $f(z)$ este egală cu o integrală de tip Cauchy în $U_R(z^0)$ și conform teoremei 2 are derivate de orice ordin în $U_R(z^0)$. Avem totodată formulele deduse din (19)

$$D^j f(z) = \frac{j_1! \dots j_n!}{(2\pi i)^n} \int_{C_1} \dots \int_{C_n} \frac{f(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1)^{j_1+1} \dots (\zeta_n - z_n)^{j_n+1}} d\zeta_1 \dots d\zeta_n \quad *). \quad (20)$$

Consecința 2 ne conduce la următoarea formulare a propoziției 1' din § 3, nr. 1, luată uneori ca definiție a olomorfiei:

Propoziția 4. *O funcție $f: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$, Δ — deschis din $\mathbb{C}^n$, este olomorfă în Δ , dacă și numai dacă este diferențiabilă în Δ și diferențiala ei este de tipul $(1, 0)$, i.e. $df = d'f$ sau $d''f = 0^{**}$.*

Formulele (20) permit generalizarea la cazul mai multor variabile și a altor rezultate clasice:

Consecința 3. (Inegalitățile lui Cauchy.) *Dacă $f(z)$ este olomorfă în polidiscul închis $\bar{U}_R(z^0)$, atunci*

$$|D^j f(z^0)| \leq \frac{j_1! \dots j_n! \|f\|_{\partial_0 U_R(z^0)}}{R_1^{j_1} \dots R_n^{j_n}}. \quad (21)$$

Inegalitățile (21) se aplică adesea sub forma

$$|D^j f(z^0)| \leq \frac{j_1! \dots j_n! M}{R_1^{j_1} \dots R_n^{j_n}}, \quad (21')$$

atunci cînd știm că $|f(z)| \leq M$ în $\bar{U}_R(z^0)$ sau pe $\partial_0 U_R(z^0)$.

*) Aceleași formule sînt valabile pentru orice polidomeniu $D = D_1 \times \dots \times D_n$ în loc de $U_R(z^0)$, unde $C_k = \partial D_k$, $k = 1, \dots, n$, sînt curbe jordanene rectificabile și $\bar{D} \subset \Delta$.

***) Dacă definim $\mathbb{C}$ -diferențiabilitatea funcției f în sensul din [67] vol. II, 19.31, interpretînd $\mathbb{C}^n$ și $\mathbb{C}$ ca $\mathbb{C}$ -spații vectoriale normate, propoziția 4 afirmă echivalența între olomorfie și $\mathbb{C}$ -diferențiabilitate.

Consecința 4. (*Teorema lui Liouville.*) O funcție $f(z)$ olomorfă și mărginită în $\mathbb{C}^n$ este o constantă.

Deoarece în (21') putem lua razele R_k oricît de mari rezultă că funcția $f(z)$ are toate derivatele nule. Vom deduce faptul că $f(z)$ este constantă, din următoarea reprezentare, bazată pe teorema despre primitivă a funcțiilor olomorfe de o variabilă complexă.

Propoziția 5. Fie $f(z)$ olomorfă în $U_R(z^0)$, atunci

$$\begin{aligned} f(z) - f(z^0) &= \sum_{k=1}^n [f(z_1^0, \dots, z_{k-1}^0, z_k, \dots, z_n) - f(z_1^0, \dots, z_k^0, z_{k+1}^0, \dots, z_n)] = \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{z_k^0}^{z_k} f_{z_k}(z_1^0, \dots, z_{k-1}^0, \zeta_k, z_{k+1}^0, \dots, z_n) d\zeta_k. \end{aligned} \quad (22)$$

§ 5. Aplicații olomorfe sau analitice

Definiția 1. Aplicația $F: \Delta \rightarrow \mathbb{C}^m$, unde Δ este un deschis din $\mathbb{C}^n$, se numește *olomorfă* sau *analitică* în Δ , dacă componentele ei $F_k, k = 1, \dots, m$, (§ 2, nr. 1) sînt funcții olomorfe în Δ .

Aplicațiile olomorfe ale unui deschis $\Delta \subset \mathbb{C}^n$ în $\mathbb{C}^m$ formează un spațiu vectorial peste $\mathbb{C}$ izomorf cu $\mathcal{O}(\Delta)^m$. Ele sînt diferențiabile de clasă $\mathbb{C}^\infty$.

Propoziția 1. Fie Δ un deschis din $\mathbb{C}^n$, Ω un deschis din $\mathbb{C}^p$, $g: \Omega \rightarrow \Delta$ o aplicație olomorfă și $f: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ o funcție olomorfă. Atunci $\varphi = f \circ g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ este o funcție olomorfă.

Notăm cu ζ, z și w respectiv un punct variabil din $\mathbb{C}^p, \mathbb{C}^n$ și $\mathbb{C}$. Fie $g_k, k = 1, \dots, n$, componentele lui g . Vom folosi propoziția 4 din § 4, nr. 3. Funcția $\varphi(\zeta) = f[g_1(\zeta), \dots, g_n(\zeta)]$ este diferențiabilă și $d\varphi = \sum_{j,h} \frac{\partial f}{\partial z_h} \frac{\partial g_h}{\partial \zeta_j} d\zeta_j$ este o diferențială de tip $(1, 0)$, deci φ este olomorfă.

Consecința 1. Prin compunerea a două aplicații olomorfe se obține o aplicație olomorfă.

Să notăm din nou cu Δ un deschis din $\mathbb{C}^n$. Fiecărei aplicații olomorfe $F: \Delta \rightarrow \mathbb{C}^m$, de componente $F_k, k = 1, \dots, m$, îi vom asocia

matricea funcțională $J_F = \left(\frac{\partial F_k}{\partial z_j} \right)$, $j = 1, \dots, n$. În fiecare punct $z \in \Delta$, rangul acestei matrici se numește *rangul* aplicației F în z , iar aplicația F se numește *nesingulară* sau *regulată* în z , resp. în Δ , dacă rangul ei în z , resp. în fiecare punct din Δ , este maxim, i.e. egal cu $\min(n, m)$.

Definiția 2. Fie Δ un deschis din $\mathbb{C}^n$. Un omeomorfism $F: \Delta \rightarrow F(\Delta) \subset \mathbb{C}^n$ se numește *izomorfism analitic* (olomorfism sau aplicație biolomorfă), dacă atât F cât și $F^{-1}: F(\Delta) \rightarrow \Delta$ sînt aplicații olomorfe.

Evident F este un difeomorfism de clasă C^∞ .

Propoziția 2. Dacă F este un izomorfism analitic, iacobianul $\det J_F = \left| \frac{\partial F_k}{\partial z_j} \right|$ este diferit de zero în Δ .

Propoziția 3. Dacă Δ este un deschis din $\mathbb{C}^n$, $F: \Delta \rightarrow F(\Delta) \subset \mathbb{C}^n$ o aplicație olomorfă injectivă și $\det J_F \neq 0$ în Δ , atunci F este un izomorfism analitic.

Pentru demonstrarea acestor propoziții ne bazăm pe propozițiile corespunzătoare relative la difeomorfisme (1 și 2 din §2, nr. 3).

Fie $\Phi = \tau^n \circ F \circ (\tau^n)^{-1}$. Printr-un calcul elementar, folosind relațiile Cauchy-Riemann, obținem

$$\det J_\Phi = |\det J_F|^2. \quad (1)$$

Intr-adevăr, notînd $Z = F(z)$, avem

$$\det J_\Phi = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial X_n}{\partial x_1} & \frac{\partial Y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial Y_n}{\partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial X_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial X_n}{\partial x_n} & \frac{\partial Y_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial Y_n}{\partial x_n} \\ \frac{\partial X_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial X_n}{\partial y_1} & \frac{\partial Y_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial Y_n}{\partial y_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial X_1}{\partial y_n} & \dots & \frac{\partial X_n}{\partial y_n} & \frac{\partial Y_1}{\partial y_n} & \dots & \frac{\partial Y_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial Y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial Y_n}{\partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} & \frac{\partial Y_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial Y_n}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \frac{\partial Y_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial Y_n}{\partial y_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_1}{\partial y_n} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} & \frac{\partial Y_1}{\partial y_n} & \dots & \frac{\partial Y_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{i}{2}\right)^n \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \bar{F}_n}{\partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} & \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial \bar{F}_n}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \bar{F}_n}{\partial y_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_1}{\partial y_n} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} & \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial y_n} & \dots & \frac{\partial \bar{F}_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial z_1} & \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial \bar{F}_n}{\partial z_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_1}{\partial z_n} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial z_n} & \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial z_n} & \dots & \frac{\partial \bar{F}_n}{\partial z_n} \\ \frac{\partial F_1}{\partial \bar{z}_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial \bar{z}_1} & \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \bar{z}_1} & \dots & \frac{\partial \bar{F}_n}{\partial \bar{z}_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_1}{\partial \bar{z}_n} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial \bar{z}_n} & \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \bar{z}_n} & \dots & \frac{\partial \bar{F}_n}{\partial \bar{z}_n} \end{vmatrix} = \\
 &= |\det J_F|^2.
 \end{aligned}$$

Demonstrația propoziției 2. Dacă F este izomorfism analitic, F este difeomorfism de clasă C^∞ , $\det J_\Phi \neq 0$, deci $\det J_F \neq 0$.

Demonstrația propoziției 3. Aplicația F este injectivă diferențiabilă de clasă C^∞ și $\det J_\Phi \neq 0$, deci F^{-1} este diferențiabilă (de clasă C^∞). Să notăm componentele aplicației F^{-1} cu $z_k = z_k(Z_1, \dots, Z_n)$, $k = 1, \dots, n$. Din identitățile $Z_j = F_j[z_1(Z_1, \dots, Z_n), \dots, z_n(Z_1, \dots, Z_n)]$ rezultă pentru fiecare indice j fixat, $j = 1, \dots, n$, sistemul liniar omogen de ecuații $\sum_{k=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial z_k} \frac{\partial z_k}{\partial \bar{Z}_j} = 0$, $s = 1, \dots, n$; prin urmare $\frac{\partial z_k}{\partial \bar{Z}_j} = 0$ oricare ar fi k și $j = 1, \dots, n$, i.e. funcțiile $z_k(Z_1, \dots, Z_n)$ sînt olomorfe și F este un izomorfism analitic.

Dacă Δ și Δ^* sînt deschise din $\mathbb{C}^n$, iar $F: \Delta \rightarrow F(\Delta) \subset \Delta^*$ resp. $G: \Delta^* \rightarrow G(\Delta^*) \subset \mathbb{C}^n$ sînt izomorfisme analitice, atunci $G \circ F: \Delta \rightarrow G[F(\Delta)]$ este un izomorfism analitic.

Observația 1. Folosind noțiunea de izomorfism analitic putem enunța o nouă proprietate a operatorilor d' și d'' , care completează proprietatea e) din § 2, nr. 5: *Operatorii d' și d'' sînt invariati de izomorfisme analitice.*

În cele ce urmează va fi utilizată și

Propoziția 4. Fie Δ un deschis din $\mathbb{C}^n$, care conține punctul 0, m un număr natural $\leq n$, $H: \Delta \rightarrow \mathbb{C}^m$ o aplicație olomorfă în Δ ,

nesingulară în 0 și $H(0) = 0$. Să însemnăm cu H_j , $j = 1, \dots, m$, componentele aplicației H și cu z un punct variabil în $\mathbb{C}^n$. Dacă $(k_1, \dots, k_m)$ este o permutare a numerelor $(1, \dots, m)$ astfel încît $\det \left(\frac{\partial H_j}{\partial z_{k_t}} \right) (0) \neq 0$, $k = k_1, \dots, k_m$, atunci există un polidisc $U_R(0)$ și m funcții $G_j(z_{k_{m+1}}, \dots, z_{k_n})$ olomorfe în $U_R(0)$, astfel încît $H(z) = 0$ în $U_R(0)$ atunci și numai atunci cînd z are coordonatele $z_{k_j} = G_j(z_{k_{m+1}}, \dots, z_{k_n})$, $j = 1, \dots, m$ și z_{k_t} , $t = m+1, \dots, n$.

Într-adevăr, teorema funcțiilor implicite ne dă în cazul $\det \left(\frac{\partial H_j}{\partial z_k} \right) \neq 0$, $k=1, \dots, m$, funcțiile $G_j(z_{m+1}, \dots, z_n)$ diferențiabile de clasă C^∞ , iar teorema despre derivarea funcțiilor compuse arată că ele sînt olomorfe. Cazul general se reduce la acesta printr-o schimbare a ordinei variabilelor, care se realizează cu ajutorul unei transformări liniare nedegenerate $T: w_h = \sum_{j=1}^n a_{hj} z_j$, aplicînd raționamentul pentru $H \circ T^{-1}$.

§ 6. Șiruri de funcții olomorfe

1. Multe teoreme clasice relative la șiruri sau la familii de funcții olomorfe de o singură variabilă complexă se extind ușor la cazul mai multor variabile. Vom menționa mai întii două propoziții, a căror demonstrație se reduce la o simplă aplicare a limitării modulului integralelor. Prima dintre aceste propoziții permite trecerea la limită sub semnul integrării pentru șiruri uniform convergente de funcții continue, a doua se referă la serii convergente normale.

Propoziția 1. Fie C un drum continuu rectificabil din planul ζ și E un spațiu topologic. Dacă $\{f_v\}$ este un șir de funcții continue $f_v: C \times E \rightarrow \mathbb{C}$, uniform convergent pe $C \times E$ la funcția $f: C \times E \rightarrow \mathbb{C}$,

(care este continuă), atunci șirul $\{F_\nu\}$, $F_\nu(p) = \int_C f_\nu(\zeta, p) d\zeta$, converge uniform la funcția $F(p) = \int_C f(\zeta, p) d\zeta$.

Propoziția 1'. Fie C_k un drum continuu rectificabil în planul ζ_k , $k = 1, \dots, n$, E un spațiu topologic și T spațiul topologic produs $T = C_1 \times \dots \times C_n \times E$. Să presupunem că $\{f_\nu\}$ este un șir de funcții continue $f_\nu: T \rightarrow \mathbb{C}$ și să notăm cu $F_\nu(p) = \int_{C_1} \dots \int_{C_n} f_\nu(\zeta, p) d\zeta_1 \dots d\zeta_n$. Dacă șirul $\{f_\nu\}$ converge uniform pe T la funcția $f: T \rightarrow \mathbb{C}$, atunci șirul $\{F_\nu\}$ converge uniform pe E la funcția $F(p) = \int_{C_1} \dots \int_{C_n} f(\zeta, p) d\zeta_1 \dots d\zeta_n$.

Propoziția 2. Să păstrăm pentru C_k , E , f_ν și F_ν semnificațiile din enunțul precedent. Dacă seria $\sum_\nu f_\nu$ converge normal, resp. uniform, pe T , seria $\sum_\nu F_\nu$ converge normal, resp. uniform, pe E și

$$\sum_\nu F_\nu(p) = \int_{C_1} \dots \int_{C_n} \sum_\nu f_\nu(\zeta, p) d\zeta_1 \dots d\zeta_n.$$

2. Adăugind ipoteza olomorfiei, se extinde imediat pentru funcții de n variabile teorema lui Weierstrass:

Teorema 1. (Weierstrass.) Fie $\{f_\nu\}$ un șir de funcții olomorfe într-un deschis $\Delta \subset \mathbb{C}^n$, șir uniform convergent pe orice compact din Δ . Atunci

- 1) Funcția $f(z) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu(z)$ este olomorfă în Δ .
- 2) Oricare ar fi $j \in \mathbb{N}^n$, $D^j f(z) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} D^j f_\nu(z)$.
- 3) Șirul $D^j f_\nu$ converge uniform pe orice compact din Δ .

Primele două afirmații rezultă din teorema lui Weierstrass relativă la șiruri de funcții olomorfe de o variabilă complexă, ținând seama de faptul că olomorfia pentru n variabile este definită ca olomorfia relativă la fiecare variabilă separat, iar operatorul D^j

echivalează cu o aplicare succesivă de derivate parțiale. Afirmațiile 1) și 2) se obțin însă și direct (extinzând procedeul de demonstrare al teoremei din cazul unei singure variabile) cu ajutorul formulei integrale a lui Cauchy și consecinței 2 din § 4, nr. 3:

Să luăm $z^0 \in \Delta$ și $\bar{U}_R(z^0) \subset \Delta$. Putem scrie

$$D^j f_v(z) = \frac{j_1! \dots j_n!}{(2\pi i)^n} \int_{C_1} \dots \int_{C_n} \frac{f_v(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1)^{j_1+1} \dots (\zeta_n - z_n)^{j_n+1}} d\zeta_1 \dots d\zeta_n,$$

unde $j \in \mathbb{N}^n$, $C_k = \{\zeta_k \mid |\zeta_k - z_k^0| = R_k\}$, $k = 1, \dots, n$, și $z \in U_R(z^0)$. Dacă $z \in \bar{U}_{R^*}(z^0) \subset U_R(z^0)$, atunci $|\zeta_k - z_k| \geq \min_{h=1, \dots, n} (R_h - R_h^*)$, deci

șirul $\left\{ \frac{f_v(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1)^{j_1+1} \dots (\zeta_n - z_n)^{j_n+1}} \right\}$ converge uniform pe $C_1 \times \dots \times C_n \times \bar{U}_{R^*}(z^0)$. Conform propoziției 1', avem:

$$1) f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C_1} \dots \int_{C_n} \frac{f(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_n - z_n)} d\zeta_1 \dots d\zeta_n \text{ în } U_R(z^0).$$

Prin urmare, funcția $f(z)$ este egală cu o integrală de tip Cauchy, de unde rezultă că este olomorfă.

$$2) \lim_{v \rightarrow \infty} D^j f_v(z) = \frac{j_1! \dots j_n!}{(2\pi i)^n} \int_{C_1} \dots \int_{C_n} \frac{f(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1)^{j_1+1} \dots (\zeta_n - z_n)^{j_n+1}} d\zeta_1 \dots d\zeta_n = D^j f(z).$$

3) Șirul $D^j f_v(z)$ converge uniform în $\bar{U}_{R^*}(z^0)$, deci pe orice compact $K \subset \Delta$, fiindcă putem acoperi K cu un număr finit de polidiscuri închise.

3. Vom stabili acum rezultate relativ la familii de funcții olomorfe, legate de teoria familiilor normale.

Fie Δ un deschis din $\mathbb{C}^n$ și $\Phi = \{f\}$ o familie de funcții $f: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$.

Definiția 1. Familia Φ se numește *mărginită pe compacte în Δ* , dacă oricare ar fi compactul $K \subset \Delta$, există un număr pozitiv M_K (care depinde de K și desigur de Φ), astfel încît $\|f\|_K < M_K$, oricare ar fi funcția $f \in \Phi$.

Definiția 2. Familia Φ (de funcții continue pe Δ) se numește *egal continuă pe compacte în Δ* , dacă pentru orice compact $K \subset \Delta$ și număr $\varepsilon > 0$, există un număr $\eta > 0$ (depinzînd de K , de ε și de Φ),

astfel încît oricare ar fi punctele z' și z'' din K cu $d(z', z'') < \eta$ și oricare ar fi funcția $f \in \Phi$, să avem $|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$.

În cele ce urmează vom folosi o leamnă relativă la compactele din C^n , care se obține prin verificare directă:

Fie K un compact din Δ . Vom nota distanța dintre K și $\partial\Delta$ cu $d_0 = d(K, \partial\Delta) = \inf_{z \in K, \zeta \in \partial\Delta} d(z, \zeta)$; se știe că $d_0 > 0$.

Lema 1. Oricare ar fi $d_1 \in (0, d_0)$, mulțimea $K_1 = \{z \mid d(z, K) \leq d_1\}$ este un compact din Δ , care include pe K în interior.

Observația 1. Distanța $d(K, \partial K_1) = d_1$.

Propoziția 3. Dacă familia Φ de funcții olomorfe în Δ este mărginită pe compacte în Δ , atunci oricare ar fi $j \in \mathbb{N}^n$, familia $\{D^j f \mid f \in \Phi\}$ este mărginită pe compacte în Δ .

Fie K un compact din Δ . Conform relației de incluziune 2°, §1, nr. 2, oricare ar fi $z^0 \in K$, luînd $R = \left(\frac{d_1}{\sqrt[n]{n}}, \dots, \frac{d_1}{\sqrt[n]{n}}\right)$, $\bar{U}_R(z^0) \subset \subset \bar{B}_{d_1}(z^0) \subset K_1$, deci inegalitatea lui Cauchy, (21) § 4, ne dă $|D^j f(z^0)| \leq j_1! \dots j_n! \left(\frac{\sqrt[n]{n}}{d_1}\right)^{|j|} \|f\|_{K_1} \leq j_1! \dots j_n! \left(\frac{\sqrt[n]{n}}{d_1}\right)^{|j|} M_{K_1} = \mathcal{M}$, pentru orice $f \in \Phi$, unde $|j| = j_1 + \dots + j_n$, iar M_{K_1} este marginea superioară corespunzătoare familiei Φ pe K_1 din definiția 1. Deci, $\|D^j f\|_K \leq \mathcal{M}$, oricare ar fi $f \in \Phi$, iar $\mathcal{M}$ depinde de K (deoarece d_1 și K_1 depind de K), de Φ și evident de D^j . Vom nota $\mathcal{M} = \mathcal{M}(K, D^j)$. Propoziția 3 este astfel demonstrată.

Propoziția 4. Orice familie Φ de funcții olomorfe în Δ , mărginită pe compacte în Δ , este egal continuă pe compacte în Δ .

Fie din nou K un compact din Δ . Păstrăm notațiile de mai sus pentru d_1 , K_1 și R . Oricare ar fi $z^0 \in K$, $z \in U_R(z^0)$ și $f \in \Phi$, aplicînd formula (22) din §4 (în care integrăm pe segmente de dreaptă) și luînd o margine superioară M_1 pentru $\|f_{z_k}\|_{K_1}$, $k = 1, \dots, n$,

$f \in \Phi$, (de exemplu $\max_k \mathcal{M}\left(K_1, \frac{\partial}{\partial z_k}\right)$ conform propoziției 3), putem scrie

$$|f(z) - f(z^0)| \leq M_1 \sum_{k=1}^n |z_k - z_k^0| \leq M_1 \sqrt[n]{n} d(z, z^0).$$

Prin urmare, date compactul K și $\varepsilon > 0$, luând un număr pozitiv $\eta < \min \left(\frac{\varepsilon}{M_1 \sqrt[n]{n}}, \frac{d_1}{\sqrt[n]{n}} \right)$, dacă $d(z', z'') < \eta$, unde $z', z'' \in K$, și dacă $f \in \Phi$, atunci $|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$. Numărul η depinde numai de ε , K și Φ , deci familia Φ este egal continuă pe compacte în Δ .

Teorema 2. (Principiul lui Montel.) *Dacă familia Φ de funcții olomorfe în Δ este mărginită pe compacte în Δ , atunci din orice șir $\{f_m\} \subset \Phi$ putem extrage un subșir uniform convergent pe compacte în Δ (sau familia Φ este normală).*

Să notăm cu C_h planul variabilei z_h , cu $Q_h(i) = \{z_h \mid x_h, y_h \in Q, \text{ corpul numerelor raționale}\}$ și cu $Q(i)^n = Q_1(i) \times \dots \times Q_n(i) \subset C^n$. Mulțimea $Q(i)^n$ este numerabilă și densă peste tot în C^n . Vom scrie sub formă de șir: $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ intersecția $Q(i)^n \cap \Delta$. Repetînd procedeul diagonal din demonstrația principiului lui Montel pentru funcții de o variabilă complexă, ([81], vol. I, cap. V, II), putem extrage din $\{f_m\}$ un subșir, pe care îl vom nota tot $\{f_m\}$ și care converge în orice punct din $Q(i)^n \cap \Delta$.

Rămîne să demonstrăm că f_m converge uniform pe orice compact $K \subset \Delta$.

În fiecare plan C_h considerăm un cadrilaj prin paralele la axe, cu distanța dintre ele $d > 0$, care va fi determinată ulterior. Notăm cu P_h unul oarecare din aceste pătrate închise și cu $P = P_1 \times \dots \times P_n$ cubul închis din C^n corespunzător. Evident $\bigcup P = C^n$.

Luînd d_1 și K_1 ca mai sus, iar $\varepsilon > 0$ arbitrar, fie $\eta(K_1, \varepsilon/3)$ numărul corespunzător șirului $\{f_m\}$ după definiția 2. Vom alege $d < \frac{\min[d_1, \eta(K_1, \varepsilon/3)]}{\sqrt[n]{2n}}$ astfel încît din $P \cap K \neq \emptyset$ să rezulte $P \subset K_1$, iar $z', z'' \in P$ să implice $d(z', z'') < \eta(K_1, \varepsilon/3)$.

Există un număr finit de cuburi $P^1, \dots, P^s$, care intersectează K . În fiecare $P^j \cap Q(i)^n$ alegem un punct z^j , $j = 1, \dots, s$. Evident, $z^j \in K_1$. Deoarece șirul $\{f_m\}$ converge în z^j , există un număr natural N , depinzînd de punctele z^j , deci de K și de ε , astfel încît dacă $m, \mu > N$, $|f_m(z^j) - f_\mu(z^j)| < \varepsilon/3$, $j = 1, \dots, s$. Dar orice punct $z \in K$ aparține unui cub P^j , iar $d(z, z^j) < \eta$ implică $|f_m(z) - f_m(z^j)| < \varepsilon/3$, $|f_\mu(z) - f_\mu(z^j)| < \varepsilon/3$. Prin urmare $|f_m(z) - f_\mu(z)| < \varepsilon$, oricare ar fi $z \in K$, dacă $m, \mu > N$.

Vom stabili acum o generalizare a principiului lui Montel, considerind o familie de funcții Φ , care este mărginită nu pe compactele din Δ , ci în fiecare punct din Δ . Teorema pe care o vom demonstra nu depinde de olomorfie, de aceea o vom formula în ipoteza continuității.

Teorema 3. Fie Δ un deschis din $\mathbb{C}^n$ și $\Phi = \{f\}$ o familie de funcții continue $f: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$, cu proprietatea că $\sup_{f \in \Phi} |f(z)| < +\infty$, oricare ar fi $z \in \Delta$. Atunci există un deschis $\Delta^* \subset \Delta$, dens peste tot în Δ , astfel încât familia Φ este mărginită pe compacte în Δ^* .

Fie U un deschis oarecare din Δ și $U_N = \{z \in U \mid \sup_{f \in \Phi} |f(z)| > N\}$. Folosind continuitatea funcțiilor f și definiția mulțimilor U_N , se arată imediat că fiecare U_N este un deschis și că $\bigcap_N U_N = \emptyset$. Conform teoremei lui Baire (teorema 2, § 3, nr. 4) există un indice N depinzind de U , astfel încât $\overline{U_N} \not\subset U$ sau $\Omega_U = U - \overline{U_N} \neq \emptyset$. Mulțimea Ω_U este deschisă.

Să arătăm că mulțimea $\Delta^* = \bigcup_U \Omega_U$, reuniunea fiind extinsă asupra tuturor deschiselor $U \subset \Delta$, satisface condițiile din teoremă:

- 1) Δ^* este evident un deschis din Δ .
- 2) $\overline{\Delta^*} \supset \Delta$, fiindcă oricare ar fi punctul $a \in \Delta$ și o vecinătate a sa $U \subset \Delta$, $U \cap \Delta^* \supset \Omega_U \neq \emptyset$, deci $a \in \overline{\Delta^*}$.
- 3) Familia Φ este mărginită pe orice compact $K \subset \Delta^*$. Într-adevăr există un număr finit de mulțimi deschise $U^s \subset \Delta$, $s = 1, \dots, q$, astfel încât $K \subset \bigcup_{s=1}^q \Omega_{U^s}$ și dacă $\Omega_{U^s} = \{z \in U^s \mid |f(z)| \leq N_s, f \in \Phi\}$ și $N = \max_{s=1, \dots, q} N_s$, atunci $\|f\|_K \leq N$, oricare ar fi $f \in \Phi$.

În paragraful următor rezultatele demonstrate mai sus vor primi o nouă interpretare.

§ 7. Spațiile $\mathcal{O}(\Delta)$ și $\mathcal{O}(\Delta)$

1. Fie Δ un deschis din $\mathbb{C}^n$. Se știe că funcțiile $f: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ continue resp. olomorfe pe Δ formează o algebră (comutativă cu element unitate) peste $\mathbb{C}$, pe care am notat-o $\mathcal{O}(\Delta)$ resp. $\mathcal{O}(\Delta)$ (§ 2 și § 3). Evident, $\mathcal{O}(\Delta) \subset \mathcal{O}(\Delta)$.

Vom organiza $\mathcal{O}(\Delta)$ și $O(\Delta)$ ca spații topologice, înzestrind $\mathcal{O}(\Delta)$ cu topologia convergenței uniforme pe compacte și $O(\Delta)$ cu topologia indusă.

Luăm ca vecinătăți ale funcției 0 următoarele mulțimi din $\mathcal{O}(\Delta)$:

$$V(K, \varepsilon) = \{f \in \mathcal{O}(\Delta) \mid \|f\|_K < \varepsilon\}, \quad (1)$$

unde K este un compact oarecare din Δ și ε un număr pozitiv arbitrar și ca vecinătăți pentru o funcție $f_0 \in \mathcal{O}(\Delta)$ mulțimile

$$V_{f_0}(K, \varepsilon) = V(K, \varepsilon) + f_0 = \{f \in \mathcal{O}(\Delta) \mid \|f - f_0\|_K < \varepsilon\}. \quad (1')$$

Se verifică ușor că $\mathcal{O}(\Delta)$ devine astfel o $\mathbb{C}$ -algebră topologică separată și local convexă, [31], cap. II, $(\bigcap_{K, \varepsilon} V(K, \varepsilon) = \{0\})$ și orice

$V_{f_0}(K, \varepsilon)$ este convex).

Propoziția 1. *Spațiul $\mathcal{O}(\Delta)$ are un sistem fundamental de vecinătăți numerabil, în fiecare punct al său.*

Pentru a construi un astfel de sistem de vecinătăți, vom folosi

Lema 1. *Orice deschis $\Delta \subset \mathbb{C}^n$ admite un șir de exhaustiune prin compacte, i.e. există un șir de compacte K_m , $m = 1, 2, \dots$ astfel încât $K_m \subset \Delta$, $K_m \subset \overset{\circ}{K}_{m+1}$ și $\bigcup_m K_m = \Delta$.*

Într-adevăr, să considerăm polidiscurile închise $\bar{U}_{R^*}(z^*) \subset \Delta$, cu $z^* \in Q(i)^n$ și $R^* \in Q^n$. Există o mulțime numerabilă de astfel de polidiscuri, care se pot scrie sub formă de șir $\{\bar{U}_v\}$, $v = 1, 2, \dots$. Fie $K_1 = \bar{U}_1$. Deoarece $\bigcup_v U_v = \Delta$ și K_1 este compact, există un

prim număr natural m_1 , astfel încât $K_1 \subset \bigcup_{v=1}^{m_1} U_v$. Fie $K_2 = \bigcup_{v=1}^{m_1} \bar{U}_v$.

Analog există m_2 , astfel încât $K_2 \subset \bigcup_{v=1}^{m_2} U_v$. Fie $K_3 = \bigcup_{v=1}^{m_2} \bar{U}_v$ ș.a.m.d.

Evident, raționamentul folosit pentru a construi K_m arată că oricare ar fi compactul $K \subset \Delta$, există un compact K_m , astfel încât $K \subset \overset{\circ}{K}_m$.

Mulțimile $V\left(K_m, \frac{1}{m}\right)$, m număr natural, formează sistem fundamental de vecinătăți ale funcției 0.

Într-adevăr, oricare ar fi compactul $K \subset \Delta$ și numărul $\varepsilon > 0$, există un număr natural m , astfel încît $K_m \supset K$ și $\frac{1}{m} < \varepsilon$; dar atunci $V\left(K_m, \frac{1}{m}\right) \subset V(K, \varepsilon)$.

Propoziția 2. *Spațiul topologic $\mathcal{O}(\Delta)$ se organizează ca spațiu metric, definind distanța între două funcții $f, g \in \mathcal{O}(\Delta)$ ca fiind*

$$d(f, g) = d(f - g), \quad (2)$$

unde pentru $f \in \mathcal{O}(\Delta)$

$$d(f) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\inf(1, \|f\|_{K_m})}{2^m}. \quad (2')$$

Seria (2') este convergentă. Se verifică imediat inegalitățile

1) $d(f) \geq 0$, oricare ar fi $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ și $d(f) = 0$ dacă și numai dacă $f = 0$.

2) $d(f + g) \leq d(f) + d(g)$, pentru orice $f, g \in \mathcal{O}(\Delta)$.

3) $2^{-m} \inf(1, \|f\|_{K_m}) \leq d(f) \leq \|f\|_{K_m} + 2^{-m}$, oricare ar fi $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ și m număr natural *).

Ținînd seama de 1), de relația $d(f, g) = d(g, f)$ și de inegalitatea $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$, care se obține din 2), (f, g, h arbitrari din $\mathcal{O}(\Delta)$), deducem că relația (2) definește o distanță pe $\mathcal{O}(\Delta)$, iar 3) arată că spațiul metric astfel obținut este compatibil cu spațiul topologic definit anterior pe $\mathcal{O}(\Delta)$ **).

Topologia definită pe $\mathcal{O}(\Delta)$ se numește *topologia convergenței uniforme pe compacte*, deoarece șirurile convergente în $\mathcal{O}(\Delta)$ sînt șirurile uniform convergente pe compacte din Δ : Într-adevăr, dacă

*) Ultima inegalitate se obține din (2') folosind majorarea

$$d(f) \leq \|f\|_{K_m} \sum_{j=1}^m 2^{-j} + \sum_{j=m+1}^{\infty} 2^{-j}.$$

**) Cum distanța d este invariantă față de translații, putem limita verificarea la vecinătățile originii: Dat $V(K, \varepsilon)$, fie m astfel încît $K \subset K_m$ și $0 < \eta < 2^{-m} \inf(\varepsilon, 1)$; atunci $B_\eta(0) = \{f \in \mathcal{O}(\Delta) \mid d(f) < \eta\} \subset V(K, \varepsilon)$. Reciproc, dat $\eta > 0$, dacă $\varepsilon \in (0, \eta/2)$ și $2^{-m} < \eta/2$, atunci $V(K_m, \varepsilon) \subset B_\eta(0)$.

șirul $\{f_\nu\}$ converge în $\mathcal{O}(\Delta)$, pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar există numărul natural N depinzând de ε , astfel încît $d(f_\nu, f_\mu) < \varepsilon$, îndată ce $\nu, \mu > N$. Dar atunci oricare ar fi m , dacă ε este ales astfel încît $2^m \varepsilon < 1$, deducem $\|f_\nu - f_\mu\|_{K_m} < 2^m \varepsilon$, i.e. $\{f_\nu\}$ converge uniform pe K_m , și cum orice compact $K \subset \Delta$ este inclus într-un K_m pentru m suficient de mare, șirul $\{f_\nu\}$ converge uniform pe K . Reciproca se verifică în mod analog.

Se stabilește ușor

Propoziția 3. *Spațiul $\mathcal{O}(\Delta)$ este complet.*

2. Vom face acum cîteva observații relative la rezultatele obținute mai sus, punînd în evidență legătura cu teoria spațiilor Fréchet, deoarece aceste spații intervin în stabilirea unor teoreme fundamentale din cap. VI.

Definiția 1. Se numește *spațiu Fréchet* un spațiu vectorial topologic local convex, metrizabil și complet.

Deducem imediat

Consecința 1. *$\mathcal{O}(\Delta)$ este spațiu Fréchet peste $\mathbb{C}$.*

Procedeul cu ajutorul căruia am introdus topologia convergenței uniforme pe compacte în $\mathcal{O}(\Delta)$ are următoarea interpretare generală:

Pentru fiecare compact $K \subset \Delta$, aplicația $f \in \mathcal{O}(\Delta) \rightarrow \|f\|_K \in \mathbb{R}_+$ este o seminormă ([31], cap. II, § 2), iar topologia de pe $\mathcal{O}(\Delta)$ este topologia generată de familia acestor seminorme, atunci cînd K descrie mulțimea compactelor din Δ . Aceeași topologie este generată și de familia dirijată de seminorme $\|\cdot\|_{K_m}$. Remarcăm că în general topologia unui spațiu vectorial local convex poate fi generată de o familie de seminorme, iar spațiile Fréchet pot fi introduse și prin

Definiția 1'. Un *spațiu Fréchet* este un spațiu vectorial $(\mathcal{F}, p_n)$, pe care este definit un șir de seminorme p_n cu următoarele proprietăți:

1) Fie $f \in \mathcal{F}$; $p_n(f) = 0$ pentru orice n , dacă și numai dacă $f = 0$.

2) Dacă șirul $\{f_\nu\} \subset \mathcal{F}$ este șir Cauchy în fiecare seminormă, atunci există un element $f \in \mathcal{F}$, astfel încît $f_\nu \rightarrow f$ în orice seminormă.

Topologia lui $\mathcal{F}$ are ca bază de vecinătăți ale lui 0 mulțimile $V(n, \varepsilon) = \{f \in \mathcal{F} \mid p_n(f) < \varepsilon\}$, iar metrica se definește pe $\mathcal{F}$ printr-un procedeu analog cu cel aplicat în $\mathcal{C}(\Delta)$.

3. Topologia convergenței uniforme pe $\mathcal{C}(\Delta)$ induce topologia cu același nume pe $\mathcal{O}(\Delta)$.

Rezultă imediat

Propoziția 4. $\mathcal{O}(\Delta)$ este o $\mathbb{C}$ -algebră topologică și un spațiu Fréchet peste $\mathbb{C}$.

Completitudinea spațiului $\mathcal{O}(\Delta)$ decurge din teorema lui Weierstrass (teorema 1, § 6, nr. 2). Această teoremă ca și alte rezultate din § 6 admit în cadrul topologiei convergenței uniforme pe compacte importante interpretări, pe care le prezentăm în cele ce urmează. Astfel, teorema lui Weierstrass exprimă proprietățile:

Propoziția 5. $\mathcal{O}(\Delta)$ este închis în $\mathcal{C}(\Delta)$.

Propoziția 6. Orice operator diferențial D^j , $j \in \mathbb{N}^n$, este o aplicație continuă: $\mathcal{O}(\Delta) \rightarrow \mathcal{O}(\Delta)$.

Într-adevăr se știe că într-un spațiu topologic metrizabil condiția necesară și suficientă ca o submulțime să fie închisă este ca această mulțime să conțină limita oricărui șir convergent de puncte ale ei. Or, teorema lui Weierstrass afirmă că oricare ar fi șirul $\{f_v\} \subset \mathcal{O}(\Delta)$, uniform convergent pe compactele din Δ , i.e. convergent în $\mathcal{C}(\Delta)$, $f = \lim_{v \rightarrow \infty} f_v \in \mathcal{O}(\Delta)$.

De asemenea se știe că o aplicație $D: E \rightarrow E^*$, unde E și E^* sînt spații topologice metrizabile, este continuă într-un punct $p \in E$, dacă și numai dacă oricare ar fi șirul $\{p_n\}$ din E convergent la p , șirul $D(p_n)$ converge la $D(p)$. Teorema lui Weierstrass afirmă că oricare ar fi șirul $\{f_v\} \subset \mathcal{O}(\Delta)$, convergent în $\mathcal{O}(\Delta)$ către f , și oricare ar fi $j \in \mathbb{N}^n$, șirul $\{D^j f_v\}$ converge în $\mathcal{O}(\Delta)$ către $D^j f$.

Tot astfel, teorema lui Montel (teorema 2, § 6, nr. 3) permite să se caracterizeze compactele din $\mathcal{O}(\Delta)$ prin proprietatea de a fi închise și mărginite.

Se stabilește ușor afirmația (care este adevărată și în $\mathcal{C}(\Delta)$):

Propoziția 7. Orice mulțime compactă din $\mathcal{O}(\Delta)$ este închisă și mărginită.

Intr-adevăr, $O(\Delta)$ este spațiu Hausdorff și orice compact dintr-un spațiu separat este închis.

Să amintim că după definiția mulțimilor mărginite într-un spațiu vectorial topologic, o mulțime $\Phi \subset O(\Delta)$ este mărginită în $O(\Delta)$, dacă oricare ar fi vecinătatea $V(K, \varepsilon)$ a funcției 0, există numărul $\lambda > 0$, astfel încît $\Phi \subset \lambda V(K, \varepsilon)$. Aceasta echivalează cu inegalitatea $\|f\|_K < \lambda \varepsilon$ oricare ar fi $f \in \Phi$ sau cu proprietatea că familia Φ este mărginită pe compactele din Δ .

Fie K un compact arbitrar din Δ . Aplicația $A_K: f \in O(\Delta) \rightarrow \|f\|_K \in \mathbb{R}_+$ este continuă. Deci, dacă Φ este un compact din $O(\Delta)$, $A_K(\Phi) \subset [0, M]$ cu un număr M pozitiv, i.e. $\|f\|_K \leq M$, oricare ar fi $f \in \Phi$, prin urmare Φ este mărginită în $O(\Delta)$.

Reciproca propoziției 7 este adevărată:

Propoziția 8. *Orice mulțime închisă și mărginită din $O(\Delta)$ este compactă în $O(\Delta)^*$.*

Să presupunem că mulțimea $\Phi \subset O(\Delta)$ este închisă și mărginită. Deoarece Φ este mărginită, după teorema lui Montel, oricare ar fi șirul $\{f_v\} \subset \Phi$ putem extrage din el un subșir $\{f_k\}$ convergent în $O(\Delta)$. Dar Φ este închisă, deci $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f \in \Phi$. Se știe însă că într-un spațiu topologic metrizabil, un compact K este caracterizat prin proprietatea că din orice șir infinit de elemente din K se poate extrage un subșir infinit convergent la un element din K ([17], cap. V, § 4). Prin urmare, mulțimea Φ este compactă.

Propoziția 3, din § 6, nr. 3 admite de asemenea o interpretare imediată:

Propoziția 9. *Aplicația $D^j: O(\Delta) \rightarrow O(\Delta)$, $j \in \mathbb{N}^n$, duce orice mulțime mărginită într-o mulțime mărginită.*

4. Observația 1. Topologia convergenței uniforme pe $\mathcal{O}(\Delta)$ resp. $O(\Delta)$ se extinde apoi la spațiile produs $\mathcal{O}(\Delta)^p$ resp. $O(\Delta)^p$, p număr natural, care formează spații Fréchet.

*) Această afirmație nu mai este valabilă în $\mathcal{O}(\Delta)$.

§ 8. Serii Taylor. Proprietăți relative la convergență

1. Un rol deosebit în teoria funcțiilor olomorfe de mai multe variabile complexe îl joacă, ca și în cazul unei singure variabile, seriile Taylor. Într-adevăr, vom demonstra că proprietatea de a fi dezvoltabile în serie Taylor în jurul oricărui punct al unui deschis $\Delta \subset \mathbb{C}^n$ caracterizează funcțiile olomorfe în Δ . De aceea, ea este luată adesea ca definiție a olomorfiei.

Reamintim că în § 4, nr. 2 am notat cu $N = \{0, 1, 2, \dots\}$ și cu $N^n = \underbrace{N \times \dots \times N}_{\text{de } n \text{ ori}}$ Vom introduce următoarea ordonare totală

pe N^n prin „relația de ordine canonică” a lui N^n , pe care o vom nota $<$. Fie j și j' două elemente distincte, arbitrare din N^n . Vom scrie $j < j'$, dacă $|j| < |j'|$ sau dacă $|j| = |j'|$, dar prima dintre diferențele $j_1 - j'_1, j_2 - j'_2, \dots, j_n - j'_n$, care nu este nulă, este pozitivă.

Definiția 1. Vom numi *serie Taylor în jurul punctului* $a \in \mathbb{C}^n$ o serie

$$\sum_{j \in N^n} c_{j_1 \dots j_n} (z_1 - a_1)^{j_1} \dots (z_n - a_n)^{j_n} \quad (1)$$

unde $\sum$ este extinsă la toți $j \in N^n$, presupus ordonat după relația de ordine canonică *), iar $c_{j_1 \dots j_n} \in \mathbb{C}^{**}$.

Definiția 2. Vom spune că o funcție $f(z)$ definită într-un deschis $\Delta \subset \mathbb{C}^n$, care conține punctul $a \in \mathbb{C}^n$, este *dezvoltabilă în serie Taylor în jurul lui* a , dacă există o serie (1) astfel încît

$$f(z) = \sum_{j \in N^n} c_{j_1 \dots j_n} (z_1 - a_1)^{j_1} \dots (z_n - a_n)^{j_n},$$

oricare ar fi z dintr-o vecinătate a lui a .

*) În cazul convergenței absolute, $\sum$ se poate interpreta și ca o sumă multiplă (n -uplă) relativ la indicii $j_k \in N$.

**) Pentru prescurtarea scrierii se notează uneori $c_{j_1 \dots j_n} (z_1 - a_1)^{j_1} \dots (z_n - a_n)^{j_n}$ cu $c_j (z - a)^j$.

Mai înainte de a demonstra că orice funcție olomorfă în Δ este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul fiecărui punct din Δ și reciproc, vom aprofunda unele proprietăți ale seriilor Taylor, care extind propoziții cunoscute din cazul unei singure variabile.

2. Fie

$$\sum_{j \in \mathbb{N}^n} c_{j_1 \dots j_n} z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n} \quad (2)$$

o serie Taylor în jurul lui $z = 0$. *)

Vom nota cu $\mathcal{M}$ mulțimea punctelor de convergență a acestei serii și cu D mulțimea punctelor $z \in \mathbb{C}^n$, astfel încât există o vecinătate $U_R(z)$, în care seria (2) este convergentă **), mulțime pe care o vom numi *domeniul de convergență* al seriei (2). Mulțimea $\mathcal{M} \neq \emptyset$, deoarece conține punctul 0, pe cînd $D = \overset{\circ}{\mathcal{M}}$ poate fi $\emptyset$ ***). Dacă $D \neq \emptyset$, ea este o mulțime deschisă și conexă (a se vedea consecința 2 din nr. 3 de mai jos), astfel încît D formează efectiv un domeniu.

Definim de asemenea mulțimile: B formată din punctele $z \in \mathbb{C}^n$, pentru care există o constantă M , astfel încît $|c_{j_1 \dots j_n} z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n}| < M$, oricare ar fi $j \in \mathbb{N}^n$ și $\mathcal{B} = \{z \in B \mid z_k \neq 0, k = 1, \dots, n\}$. Evident $0 \in B$, dar $\mathcal{B}$ poate fi $\emptyset$.

Vom considera mai întii cazul particular al seriei Taylor $\sum_{j \in \mathbb{N}^n} z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n}$, care generalizează la n variabile seria geometrică. Prin

*) Pentru simplificarea scrierii considerăm numai acest caz; trecerea la serii Taylor în jurul unui punct $z^0 \in \mathbb{C}^n$ se realizează prin translație.

**) Conform lemei lui Abel, care o vom demonstra mai jos, D poate fi definit și ca mulțimea punctelor $z \in \mathbb{C}^n$ astfel încît există $U_R(z)$, în care (2) este absolut convergentă.

***). Exemplu: pentru seria $\sum_{j \in \mathbb{N}} |j| z_1^j$, $\mathcal{M} = \{z \in \mathbb{C}^n \mid z = (0, z_2, \dots, z_n), z_k \text{ arbitrar în } \mathbb{C}, k = 2, \dots, n\}$, dar $D = \emptyset$.

inducție după n se verifică ușor că această serie este convergentă absolut în polidiscul $U_{1, \dots, 1}(0)$, unde

$$\sum_{j \in \mathbb{N}^n} z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n} = \frac{1}{(1 - z_1) \dots (1 - z_n)}, \quad (3)$$

și converge normal în orice polidisc închis $\bar{U}_\rho(0)$, $\rho_k < 1$, $k = 1, \dots, n$.

Fie z^0 un punct din $\mathbb{C}^n$ de coordonate $z_k^0 \neq 0$; convenim să notăm pentru simplificarea scrierii $U_{z^0}(0) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_k| < |z_k^0|, k = 1, \dots, n\}$.

Lema 1. (Lema lui Abel.) 1) Dacă $z^0 \in \mathcal{B}$, atunci seria (2) converge absolut în $U_{z^0}(0)$ și converge normal în $\bar{U}_r(0)$ oricare ar fi $r = (r_1, \dots, r_n)$ cu $r_k \in (0, |z_k^0|)$, $k = 1, \dots, n$. 2) Dacă seria (2) diverge în punctul $z^0 \in \mathbb{C}^n$, atunci ea diverge în orice punct $z \in \mathbb{C}^n$ pentru care $|z_k| > |z_k^0|$, $k = 1, \dots, n$.

Afirmația 1) rezultă din existența unui număr M astfel încît pentru orice $j \in \mathbb{N}^n$, $|c_{j_1 \dots j_n} z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n}| < M$. Seria (2) este majorată în $\bar{U}_r(0)$ de seria $\sum_{j \in \mathbb{N}^n} M \left(\frac{r_1}{|z_1^0|}\right)^{j_1} \dots \left(\frac{r_n}{|z_n^0|}\right)^{j_n}$.

Punctul 2) se obține prin reducere la absurd: Dacă (2) ar converge într-un punct z^1 cu $|z_k^1| > |z_k^0|$, $k = 1, \dots, n$, atunci $z^1 \in \mathcal{B}$ și $z^0 \in U_{z^1}(0)$ ar fi punct de absolut convergență.*)

3. Cu ajutorul lemei lui Abel putem aprofunda natura mulțimii D .

*) Lema lui Abel admite următoarea precizare, care se demonstrează în mod analog, restringînd numărul variabilelor:

Dacă $z^0 \in \mathcal{B}$, dar numai s coordonate ale lui z^0 sînt diferite de zero, $1 \leq s \leq n$, și anume $z_k^0 \neq 0$ pentru $k = k_1, \dots, k_s$, și $z_k^0 = 0$ pentru $k = k_{s+1}, \dots, k_n$, $(k_1, \dots, k_n)$ fiind o permutare a mulțimii $(1, \dots, n)$, atunci seria Taylor (2) converge absolut în polidiscul s -dimensional $U_{z^0}^s(0) = \{z \mid |z_k| < |z_k^0|, k = k_1, \dots, k_s; z_k = 0, k = k_{s+1}, \dots, k_n\}$ și converge normal în $\bar{U}_r^s(0)$, unde $r_k < |z_k^0|$, $k = k_1, \dots, k_s$ și $r_k = 0$, $k = k_{s+1}, \dots, k_n$.

Consecința 1. 1) Dacă $\mathcal{B} \neq \emptyset$, atunci $D \neq \emptyset$. 2) $\mathring{B} = D$.
3). Dacă $D \neq \emptyset$, atunci $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

Vom indica doar demonstrația punctului 2). Cum $D \subset B$ și D este deschis, $D \subset \mathring{B}$. Reciproc, dacă $z^* \in \mathring{B}$, există $z^0 \in \mathcal{B}$ cu $|z_k^*| < |z_k^0|$, $k = 1, \dots, n$.

Într-adevăr, există $U_{r_k}(z^*) \subset B$; dacă $z_k^* = 0$ putem lua orice z_k^0 cu $0 < |z_k^0| < r_k^*$, dacă $z_k^* \neq 0$ putem lua $z_k^0 = z_k^* t$ cu $t \in (1, 1 + \frac{r_k^*}{|z_k^*|})$. Dar atunci $z^* \in U_{z^0}(0) \subset D$.

Consecința 2. Dacă $D \neq \emptyset$, atunci D este o reuniune de polidiscuri cu centrul $z = 0$. Prin urmare, D este conex.

Într-adevăr, oricare ar fi $z^* \in D$, există $z^0 \in \mathcal{B}$ cu $|z_k^*| < |z_k^0|$, $k = 1, \dots, n$ și $D = \bigcup_{z^0 \in \mathcal{B}} U_{z^0}(0) = \bigcup_{z^* \in D \cap \mathcal{B}} U_{z^*}(0)$.

Consecința 3. Domeniul D are următoarele proprietăți:

(I) Dacă $z \in D$, punctul $\tilde{z}$, cu $\tilde{z}_k = \rho_k e^{i\theta_k} z_k$, $\rho_k \in [0, 1]$, θ_k real, $k = 1, \dots, n$, aparține lui D .

(II) Dacă $z \in D$, punctul $\tilde{z}$, cu $\tilde{z}_k = e^{i\theta_k} z_k$, θ_k real, $k = 1, \dots, n$, aparține lui D .

(III). Dacă $z \in D$ și θ este real, $\tilde{z} = e^{i\theta} z$ aparține lui D .

Un domeniu cu proprietatea (I), (II), resp. (III), se numește *domeniu n-circular complet*, *domeniu n-circular* sau *domeniu Reinhardt*, resp. *domeniu circular*, cu centrul 0. Prin translație se obțin aceleași domenii cu centrul în z^0 .*)

Pentru a obține o altă proprietate a lui D vom nota cu $\tilde{\mathbf{R}} = [-\infty, +\infty)$ și vom introduce următoarele aplicații continue și deschise:

1) $\varphi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbf{R}_+^n$, care asociază fiecărui punct $z \in \mathbb{C}^n$ punctul $\varphi(z) = (|z_1|, \dots, |z_n|) \in \mathbf{R}_+^n$ și

*) Uneori printr-un domeniu *n-circular complet*, *domeniu Reinhardt*, resp. *domeniu circular*, se înțelege un deschis având proprietatea (I), (II), resp. (III), dar atunci în enunțul diferitelor propoziții se adaugă explicit ipoteza conexiunii.

2) $\psi: \mathbb{C}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}^n$, care asociază fiecărui punct $z \in \mathbb{C}^n$ punctul $\xi = \psi(z) = (\ln |z_1|, \dots, \ln |z_n|) \in \tilde{\mathbb{R}}^n$.

Oricare ar fi mulțimea $M \subset \mathbb{C}^n$, să însemnăm cu $M^* = \psi(M)$. Se verifică ușor că pentru o mulțime M cu proprietatea Reinhardt (II): $z \in M \Rightarrow \tilde{z} = (e^{i\theta_1} z_1, \dots, e^{i\theta_n} z_n) \in M$, $\theta_k \in \mathbb{R}$, $k=1, \dots, n$, avem

$\psi^{-1}(M^*) = M$ și deci $(\hat{M})^* = \hat{M}^*$.

Propoziția 1. *D fiind domeniul de convergență al seriei (2), D^* este convex.*

Deoarece $D = \hat{B}$ (consecința 1,2)) și B are proprietatea (II), va fi suficient să demonstrăm că B^* este convex.

Pentru fiecare număr natural N , fie $B_N = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |c_{j_1 \dots j_n} z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n}| < N, j \in \mathbb{N}^n\}$. Evident $B = \bigcup_{N=1}^{\infty} B_N$ și $B_N \subset B_{N+1}$. Cum $B^* = \bigcup_{N=1}^{\infty} B_N^*$, problema se reduce la a demonstra că B_N^* este convex.

Să notăm cu $B_{N,j} = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |c_{j_1 \dots j_n} z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n}| < N\}$ pentru fiecare $j \in \mathbb{N}^n$. Deoarece $B_N = \bigcap_{j \in \mathbb{N}^n} B_{N,j}$ și $B_N^* = \bigcap_{j \in \mathbb{N}^n} B_{N,j}^*$, rămâne numai să demonstrăm că $B_{N,j}^*$ este convex. Dar, după cum $c_{j_1 \dots j_n} = 0$ sau $\neq 0$, $B_{N,j}^* = \tilde{\mathbb{R}}^n$ resp. $= \left\{ \xi \in \tilde{\mathbb{R}}^n \mid \ln |c_{j_1 \dots j_n}| + \sum_{k=1}^n j_k \xi_k < \ln N \right\}$,

deci un semispațiu din $\tilde{\mathbb{R}}^n$.

În concluzie, rezultatele de mai sus ne permit să formulăm

Teorema 1. *Dacă domeniul de convergență D al unei serii Taylor (2) este nevid, atunci el este o reuniune de polidiscuri cu centrul 0, deci un domeniu Reinhardt relativ la 0, pentru care D^* este convex.*

În cap. III, § 6 nr. 2 vom demonstra și reciproca acestei teoreme, obținând astfel caracterizarea domeniilor de convergență a seriilor Taylor. Exemple simple arată că există domenii Reinhardt, care nu sînt reuniuni de polidiscuri cu același centru, și că există reuniuni de polidiscuri cu același centru 0, a căror imagine prin aplicația ψ nu este convexă (a se vedea § 10, nr. 4 de mai jos).

4. Lema lui Abel aduce precizări și asupra structurii mulțimii $\mathcal{M}$.

Teorema 2. *Mulțimea de convergență a unei serii Taylor (2) este o mulțime stelară relativ la 0, i.e. dacă $z \in \mathcal{M}$, atunci întreaga rază tz , $t \in [0,1]$, aparține lui $\mathcal{M}$.*

Vom numi subspațiu liniar de coordonate s -dimensional din $\mathbb{C}^n$ mulțimea $C_{k_1 \dots k_s}^s = \{z \in \mathbb{C}^n \mid z_k = 0 \text{ pentru } k = k_{s+1}, \dots, k_n, (k_1, \dots, k_s) \text{ fiind o permutare a lui } (1, \dots, n)\}$. Înzestrat cu topologia indusă de cea din $\mathbb{C}^n$, subspațiul $C_{k_1 \dots k_s}^s$ este omeomorf cu $\mathbb{C}^s$. Dacă $z^0 \in C_{k_1 \dots k_s}^s$, vom nota polidiscurile s -dimensionale de centru z^0 din $C_{k_1 \dots k_s}^s$ cu $U_R^s(z^0) = \{z \mid |z_k - z_k^0| < R_k, k = k_1, \dots, k_s \text{ și } z_k = 0, k = k_{s+1}, \dots, k_n\}$.

Propoziția 2. *Fie (2) o serie Taylor în jurul lui 0. Se pot prezenta următoarele trei cazuri:*

I. *Dacă $D \neq \emptyset$, D este un domeniu n -dimensional stelar relativ la 0, iar $\mathcal{M}$ constă din D , din domenii s -dimensionale stelare relativ la 0, ($s = n-1, \dots, 1$), situate în subspațiile liniare de coordonate și din eventuale puncte de pe frontiera lor.*

II. *Dacă $D = \emptyset$, dar $\mathcal{M} \neq \{0\}$, există un număr natural maxim $m < n$, astfel încât B conține puncte cu m coordonate nenule și $\mathcal{M}$ constă din domenii stelare s -dimensionale relativ la 0, situate în subspațiile de coordonate, ($s = m, \dots, 1$) și eventuale puncte de pe frontiera lor.*

III. $\mathcal{M} = \{0\}$.

Demonstrație: I. Dacă $D \neq \emptyset$, există un polidisc $U_r(0) \subset D$.

1° Fie $\zeta \in \mathbb{C}^n$ de coordonate $\zeta_k \neq 0$. Pentru $t > 0$ suficient de mic, $t\zeta \in U_r(0) \subset D$. Vom nota cu $\tau = \sup_{t\zeta \in D} t$. Lema lui Abel ne dă imediat

a) Dacă $t \in [0, \tau)$, atunci $t\zeta \in D$.

b) Dacă $\tau < +\infty$ și $t > \tau$, atunci $t\zeta \notin \mathcal{M}$.

c) $\tau = \sup_{t\zeta \in \mathcal{M}} t = \sup_{t\zeta \in B} t$.

d) $\tau = +\infty$, implică $D = \mathbb{C}^n$.

e) Dacă $\tau < +\infty$, punctul $Z = \tau\zeta$ nu depinde de punctul ζ pe care l-am ales inițial pe raza $O\zeta$, iar punctul $\varphi(Z) = R =$

$= (R_1, \dots, R_n)^*$) depinde numai de raza din R_+^n , care trece prin el (sau prin $\varphi(\zeta)$), fiind același pentru toate razele $0\zeta^*$ din C^n , pentru care $\varphi(\zeta^*) = k \varphi(\zeta)$, $k > 0$.

Prin urmare, pentru fiecare direcție 0ρ din R_+^n , există un sistem de numere pozitive $R = (R_1, \dots, R_n)$, astfel încât în orice punct z , cu $|z_k| < R_k$, $k = 1, \dots, n$, seria (2) converge, iar în orice punct z cu $|z_k| > R_k$, $k = 1, \dots, n$, seria (2) diverge. Vom numi $(R_1, \dots, R_n)$ *sistem de raze conjugate*, iar $|z_k| < R_k$, $k = 1, \dots, n$, *cercuri de convergență conjugate*; ele generalizează raza, resp. cercul de convergență, din cazul unei singure variabile. Punctele R formează în R_+^n o „hipersuprafață separatoare”.

2° Fie $\zeta \in C_{1 \dots n-1}^{n-1}$, $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}, 0)$ cu $\zeta_k \neq 0$, $k = 1, \dots, n-1$. Din nou pentru $t > 0$ suficient de mic, $t\zeta \in D$ și putem defini $\tau = \sup_{\zeta \in D} t$. Afirmația a) rămâne valabilă, dar b) și c) nu mai sînt adevărate: dacă $\tau < +\infty$, se poate ca pentru $t > \tau$, $t\zeta \in \mathcal{M} - D$.

Să considerăm seria de $(n-1)$ variabile. $z_1, \dots, z_{n-1}$, obținută din (2) înlocuind $z_n = 0$, și să notăm domeniul ei de convergență din $C_{1 \dots n-1}^{n-1}$ cu $D_{1 \dots n-1}^{n-1}$; evident, $D_{1 \dots n-1}^{n-1} \supset D \cap C_{1 \dots n-1}^{n-1}$. Repetînd procedeul de mai sus, determinăm $\tau_{1 \dots n-1}^1 = \sup_{\zeta \in D_{1 \dots n-1}^{n-1}} t \geq \tau$.

Dacă $\tau_{1 \dots n-1}^1 > \tau$, punctele $t\zeta$ cu $t \in [\tau, \tau_{1 \dots n-1}^1)$ au vecinătăți $(n-1)$ -dimensionale, în care (2) converge. Se obțin afirmații analoge cu a) — e). Pe raza 0ζ se pune astfel în evidență atît $Z = \tau\zeta$ cît și $Z_{1 \dots n-1}^1 = \tau_{1 \dots n-1}^1 \zeta$. Raționamentul se repetă pentru fiecare subspațiu liniar $C_{k_1 \dots k_s}^s$ ($s = n-1, \dots, 1$), luînd punctul ζ cu $\zeta_{k_1}, \dots, \zeta_{k_s} \neq 0$; $\zeta_{k_{s+1}} = \dots = \zeta_{k_n} = 0$. Vom determina $\tau_{k_1 \dots k_s}^{n-s}$, $Z_{k_1 \dots k_s}^{n-s}$ și domeniul stelar s -dimensional $D_{k_1 \dots k_s}^s$. Prin urmare $\mathcal{M} = D \cup$

$\cup \left[\bigcup_{s=1}^{n-1} \left(\bigcup_{(k_1, \dots, k_s)} D_{k_1 \dots k_s}^s \right) \right] \cup \tilde{\mathcal{M}}$, unde $(k_1, \dots, k_s)$ parcurge mulțimea combinărilor de n numere $(1, \dots, n)$ luate cîte s , iar $\tilde{\mathcal{M}}$ cuprinde acele puncte $Z, \dots, Z_{k_1 \dots k_s}^{n-s}$ în care (2) converge.

*) Reamintim, φ este aplicația definită la nr. 3.

Cazul II se dezvoltă analog. *)

Exemple: 1. $\sum_{i_1, \dots, i_n \geq 0} \left(\frac{z_1}{R_1}\right)^{i_1} \dots \left(\frac{z_n}{R_n}\right)^{i_n} \cdot \mathcal{M} = D = U_R(0)$.

2. $\sum_{j_1, j_2 \geq 0} z_1^{j_1} z_2^{j_2+1}, n=2. D = \{z \mid |z_1| < 1, |z_2| < 1\}, D_1^1 = C_1^1 = \{z \mid z_1 \in \mathbb{C}, z_2 = 0\}, D_2^1 = \{z \mid z_1 = 0, |z_2| < 1\}.$

3. $\sum_{j_1, j_2 \geq 0} z_1^{j_1} z_2^{j_2+1} + \sum_{j_1 \geq 0} \left(\frac{z_1}{2}\right)^{j_1}, n=2. D = \{z \mid |z_1| < 1, |z_2| < 1\}.$
 $D_1^1 = \{z \mid |z_1| < 2, z_2 = 0\}$, deci pentru $\zeta \in C_1^1$, $\tau = 1$ și $\tau_1^1 = 2$,
 $D_2^1 = \{z \mid z_1 = 0, |z_2| < 1\}$, deci pentru $\zeta \in C_2^1$, $\tau = \tau_2^1 = 1$.

4. $\sum_{j_1, j_2 \geq 0} \frac{(j_1 + j_2)!}{j_1! j_2!} z_1^{j_1} z_2^{j_2}, n=2.$ Curba separatoare în $\mathbb{R}_+^2$:
 $R_1 + R_2 = 1.$ O infinitate de sisteme de raze conjugate (R_1, R_2) cu $R_1, R_2 > 0$ și $R_1 + R_2 = 1. D = \bigcup_{R_1 + R_2 = 1} U_R(0). D_k^1 = D \cap C_k^1, k=1,2.$

5. $\sum_{j \geq 0} j! (z_1^j + z_2^j), n=2. \mathcal{M} = \{0\}.$

6. $\sum_{j \geq 0} j! z_1^j z_2^j, n=2. \mathcal{M} = D_1^1 \cup D_2^1, D_k^1 = C_k^1, k=1,2.$

7. $\sum_{j \geq 0} j! z_2^j + \sum_{j \geq 0} z_1^j. \mathcal{M} = D_1^1 = \{z \mid |z_1| < 1, z_2 = 0\}.$

8. $\sum_{j_1, j_2 \geq 0} z_1^{j_1} z_2^{j_2+1} + \sum_{j_3 \geq 0} j_3! z_2 z_3^{j_3}, n=3. D = \emptyset, D_{12}^2 = \{z \mid |z_1| < 1, |z_2| < 1, z_3 = 0\}, D_{13}^2 = \{z \mid z_2 = 0\} = C_{13}^2, D_{23}^2 = \emptyset, D_1^1 = \{z \mid z_2 = z_3 = 0\} = C_1^1, D_2^1 = \{z \mid z_1 = z_3 = 0, |z_2| < 1\}, D_3^1 = \{z \mid z_1 = z_2 = 0\} = C_3^1.$

Observația 1. Fie (2) o serie Taylor în jurul lui $z = 0$, cu $D \neq \emptyset$, și $R = \max r$ cu proprietatea $U_{r, \dots, r}(0) \subset D$. Atunci $U_{R, \dots, R}(0)$ se numește *vecinătatea elementară a lui 0* pentru seria (2), iar R *distanța lui 0 la frontiera lui D*. Evident $(R, \dots, R)$ formează un sistem

*) În cazul $n=2$, dacă $D \neq \emptyset$ fiecare rază din $\mathbb{R}_+^2$ intersectează curba separatoare într-un punct $\varphi(Z) = R = (R_1, R_2)$. Curba separatoare este monotonă (i.e. (R_1, R_2) și (R'_1, R'_2) fiind două sisteme de raze conjugate, din $R_1 < R'_1$ rezultă $R_2 > R'_2$), dar poate cuprinde și segmente paralele cu axele.

de raze conjugate, iar în R_+^n reprezintă punctul de intersecție al separatoarei cu bisectoarea lui R_+^n .

Remarcăm că în general, dacă a este un punct dintr-un domeniu Δ și $R = \max r$ cu proprietatea $U_{r,\dots,r}(a) \subset \Delta$, atunci $U_{R,\dots,R}(a)$ se numește *vecinătatea elementară a lui a relativ la Δ* , iar R — *distanța lui a la frontiera lui Δ* .

Observația 2. Fie $R_k = \max r_k$, $k=1, \dots, n$, când $(r_1, \dots, r_n)$ descrie toate sistemele de raze conjugate ale seriei (2). R_k se numesc *raze de convergență maximale*, iar $U_{R_1,\dots,R_n}(0)$ este cel mai mic polidisc, care include domeniul D .

Formula Cauchy-Hadamard admite o generalizare relativă la sistemele de raze conjugate:

Propoziția 3. Dacă $(R_1, \dots, R_n)$ formează un sistem de raze conjugate ale seriei (2) atunci

$$\lim_{j \in \mathbb{N}^n} \sqrt[j]{|c_{j_1 \dots j_n}| R_1^{j_1} \dots R_n^{j_n}} = 1. *) \quad (4)$$

După definiția sistemelor de raze conjugate, seria (2) converge absolut în orice punct tR , $t \in [0, 1)$ și diverge în orice punct tR cu $t > 1$. Prin urmare, seria $\sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{j \in \mathbb{N}^n, |j|=m} |c_{j_1 \dots j_n}| R_1^{j_1} \dots R_n^{j_n} \right) t^m$ are raza de convergență 1 și teorema Cauchy-Hadamard ne dă

$$\lim_{m \in \mathbb{N}} \sqrt[m]{\sum_{j \in \mathbb{N}^n, |j|=m} |c_{j_1 \dots j_n}| R_1^{j_1} \dots R_n^{j_n}} = 1.$$

Fie $j^* = j^*(m)$ sistemul $j \in \mathbb{N}^n$ pentru care $|c_{j_1^* \dots j_n^*}| R_1^{j_1^*} \dots R_n^{j_n^*} = \max_{|j|=m} |c_{j_1 \dots j_n}| R_1^{j_1} \dots R_n^{j_n}$ și $N(m)$ numărul termenilor unui polinom omogen de grad m cu n variabile. Atunci

$$\begin{aligned} |c_{j_1^* \dots j_n^*}| R_1^{j_1^*} \dots R_n^{j_n^*} &\leq \sum_{j \in \mathbb{N}^n, |j|=m} |c_{j_1 \dots j_n}| R_1^{j_1} \dots R_n^{j_n} \leq \\ &\leq N(m) |c_{j_1^* \dots j_n^*}| R_1^{j_1^*} \dots R_n^{j_n^*}. \end{aligned}$$

*) Evident, $j \neq 0$.

Deoarece $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{N(m)} = 1$ și $\lim_{j \in \mathbb{N}^n, |j|=m} \sqrt[m]{|c_{j_1 \dots j_n}| R_1^{j_1} \dots R_n^{j_n}} =$
 $= \lim_{m \in \mathbb{N}} \sqrt[m]{|c_{j_1^* \dots j_n^*}| R_1^{j_1^*} \dots R_n^{j_n^*}},$ rezultă (4).

Observația 3. Domeniul de convergență al unei serii Taylor (2) coincide cu $\mathbb{C}^n$, atunci și numai atunci când $\lim_{|j| \rightarrow \infty} \sqrt[|j|]{|c_{j_1 \dots j_n}|} = 0$, $j \in \mathbb{N}^n$.

§ 9. Echivalența celor două definiții ale olomorfiei. Aplicații

Luînd ca punct de plecare teoria lui Cauchy, am definit o funcție olomorfă într-un deschis $\Delta \subset \mathbb{C}^n$ prin existența derivatelor ei parțiale în orice punct $a \in \Delta$. În teoria lui Weierstrass se numește olomorfă în Δ o funcție dezvoltabilă în serie Taylor în jurul oricărui punct $a \in \Delta$. Consecințele 1 și 5 ale teoremelor din acest paragraf stabilesc echivalența celor două definiții. Pînă la demonstrarea acestei echivalențe păstrăm definiția 1 din § 3, nr. 1.

1. Definiția 1. Vom numi *serie Taylor convergentă* o serie Taylor pentru care $D \neq \emptyset$.

Deoarece conform lemei lui Abel (§ 8, nr. 2) o serie Taylor convergentă este uniform convergentă pe orice compact din D , teorema lui Weierstrass (§ 6, nr. 2) implică

Teorema 1. *Suma unei serii Taylor convergente este o funcție olomorfă în domeniul de convergență al acestei serii.*

Consecința 1. *Fie Δ un deschis din $\mathbb{C}^n$. O funcție $f: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ dezvoltabilă în serie Taylor în jurul fiecărui punct $a \in \Delta$ este olomorfă în Δ .*

Teorema lui Weierstrass arată că o serie Taylor convergentă se derivează termen cu termen și prin urmare, dacă

$$f(z) = \sum_{j_1 \dots j_n \geq 0} c_{j_1 \dots j_n} (z_1 - a_1)^{j_1} \dots (z_n - a_n)^{j_n} \quad (1)$$

în domeniul de convergență D , atunci oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^n$,

$$D^k f(z) =$$

$$= \sum_{j_1 \geq k_1, \dots, j_n \geq k_n} \left[\prod_{s=1}^n j_s(j_s-1) \dots (j_s-k_s+1) \right] c_{j_1 \dots j_n} (z_1-a_1)^{j_1-k_1} \dots (z_n-a_n)^{j_n-k_n} \quad (2)$$

deci

$$D^k f(a) = k_1! \dots k_n! c_{k_1 \dots k_n}. \quad (3)$$

Observația 1. Seriile derivate (2) ale unei serii Taylor convergente (1) au același domeniu de convergență ca și ea.

Consecința 2. (*Teorema de identitate a două serii Taylor.*) Două serii Taylor în jurul punctului a , convergente, care coincid într-o vecinătate a lui a , au aceiași coeficienți.

Consecința 3. Fie Δ un deschis din $\mathbb{C}^n$. Dacă funcția $f: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul unui punct $a \in \Delta$, atunci dezvoltarea este unică.

2. Teorema 2. O funcție $f(z)$ olomorfă într-un polidisc închis $\bar{U}_R(a) \subset \mathbb{C}^n$ se reprezintă printr-o serie Taylor în jurul lui a :

$$f(z) = \sum_{j \in \mathbb{N}^n} c_{j_1 \dots j_n} (z_1 - a_1)^{j_1} \dots (z_n - a_n)^{j_n}, \quad (4)$$

convergență normal (deci absolut și uniform) în $\bar{U}_R(a)$.

Coeficienții acestei serii sînt

$$c_{j_1 \dots j_n} = \frac{1}{j_1! \dots j_n!} \frac{\partial^{j_1 + \dots + j_n} f(a)}{\partial z_1^{j_1} \dots \partial z_n^{j_n}}. \quad (5)$$

Reprezentarea este unică.

Ca și în cazul unei singure variabile, vom pleca de la formula integrală a lui Cauchy, vom dezvolta integrandul în serie Taylor și apoi vom integra termen cu termen.

Prin ipoteză $f(z)$ este olomorfă într-un polidisc $U_{R^*}(a) \supset \bar{U}_R(a)$. Vom aplica formula integrală a lui Cauchy în polidiscul $U_{\tilde{R}}(a)$, unde $R_k < \tilde{R}_k < R_k^*$, $k = 1, \dots, n$:

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\tilde{C}_1} \dots \int_{\tilde{C}_n} \frac{f(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_n - z_n)} d\zeta_1 \dots d\zeta_n. \quad (6)$$

Dacă $z \in \bar{U}_R(a)$ și $\zeta \in \partial_0 U_{\tilde{R}}(a)$, avem dezvoltarea convergentă normal

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_n - z_n)} &= \frac{1}{(\zeta_1 - a_1) \dots (\zeta_n - a_n)} \frac{1}{\left(1 - \frac{z_1 - a_1}{\zeta_1 - a_1}\right) \dots \left(1 - \frac{z_n - a_n}{\zeta_n - a_n}\right)} = \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}^n} \frac{(z_1 - a_1)^{j_1} \dots (z_n - a_n)^{j_n}}{(\zeta_1 - a_1)^{j_1+1} \dots (\zeta_n - a_n)^{j_n+1}}. \end{aligned}$$

Înlocuind în (6), ținând seama de propoziția 2, § 6, nr. 1 și de formulele (20), § 4, nr. 3, obținem seria (4) convergentă normal în $\bar{U}_R(a)$ și coeficienții (5). Unicitatea reprezentării rezultă din consecința 2.

Consecința 4. O funcție $f(z)$ olomorfă într-un polidisc deschis $U_R(a)$ se dezvoltă în serie Taylor (4), (5), absolut convergentă în $U_R(a)$ și normal convergentă pe orice compact din $U_R(a)$.

Consecința 5. O funcție olomorfă într-un deschis Δ este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul oricărui punct din Δ .

3. Din teorema 2 rezultă și

Consecința 6. O funcție $f(z)$ olomorfă în $\bar{U}_R(a)$ se dezvoltă în serie de polinoame omogene, convergentă normal în $\bar{U}_R(a)$, după formula lui Taylor

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[\frac{\partial}{\partial z_1} (z_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial}{\partial z_n} (z_n - a_n) \right]^m f(a). \quad (7)$$

Într-adevăr, suma termenilor de grad m din dezvoltarea (4) dă polinomul termen de rang m din (7) (unde operatorul diferențial ridicat la puterea m se aplică funcției f în punctul a).

Vom indica acum câteva proprietăți ale seriilor de polinoame omogene $\sum_{m=0}^{\infty} Q_m(z)$, $Q_m(z)$ — polinom omogen de n variabile de gradul m .

Propoziția 1. (Un analog al lemei lui Abel.) 1) Dacă pentru un punct $z^0 \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ există un număr $M > |Q_m(z^0)|$, oricare ar fi $m = 0, 1, \dots$, atunci $\sum_{m=0}^{\infty} Q_m(z)$ converge normal pe orice compact din $\{z \mid z = tz^0, |t| < 1\}$.

2) Dacă $\sum_{m=1}^{\infty} Q_m(z)$ diverge în z^0 , atunci ea diverge în orice punct din $\{z \mid z = tz^0, |t| > 1\}$.

Propoziția 2. Dacă domeniul de convergență $\mathcal{D}$ al unei serii de polinoame omogene este nevid atunci el este un domeniu circular cu centrul 0 (mai mult este echilibrat).

Dacă z^0 este punct de convergență absolută, punctul $e^{i\theta}z^0$, θ real (resp. punctul λz^0 , cu $\lambda \in \mathbb{C}$ și $|\lambda| \leq 1$) are aceeași proprietate. Dacă $z^0 \in \mathcal{D}$, există $U_\rho(z^0) \subset \mathcal{D}$ și $\tilde{z} \in U_\rho(z^0)$, cu $z^0 = t\tilde{z}$, $|t| < 1$, deci $\sum_{m=1}^{+\infty} Q_m(z)$ converge absolut în $\mathcal{D}$. Atunci $U_\rho(e^{i\theta}z^0) = e^{i\theta} U_\rho(z^0) \subset \mathcal{D}$ (resp. $U_{|\lambda|\rho}(\lambda z^0) = \lambda U_\rho(z^0) \subset \mathcal{D}$).

Propoziția 3. Dacă suma unei serii de polinoame omogene $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m(z)$, cu domeniul de convergență $\mathcal{D} \neq \emptyset$, este olomorfă într-un polidisc $U_\rho(0) \subset \mathcal{D}$, atunci

$$\begin{aligned} Q_m(z) &= \frac{1}{m!} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial z_k} z_k \right)^m f(0) = \\ &= \sum_{\substack{j \in \mathbb{N}^n \\ |j|=m}} \frac{1}{j_1! \dots j_n!} \frac{\partial^m f(0)}{\partial z_1^{j_1} \dots \partial z_n^{j_n}} z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n}. \end{aligned} \quad (8)$$

Fixînd $z \in U_\rho(0)$, definim în $|t| < 1$ funcția

$$F(t) = f(tz) = \sum_{m=0}^{\infty} t^m Q_m(z),$$

care este olomorfă în $|t| < 1$. Deoarece $Q_m(z) = \frac{1}{m!} \frac{d^m F(0)}{dt^m}$, rezultă (8).

Consecința 7. Dacă o funcție $f(z)$ olomorfă într-un domeniu, ce conține originea, se dezvoltă în acest domeniu în serie de polinoame omogene, atunci dezvoltarea este unică.

4. Aplicații: alte proprietăți ale funcțiilor olomorfe

Teorema 3. (Principiul prelungirii analitice sau teorema de identitate.) Fie f_1 și f_2 două funcții olomorfe în domeniul Δ din C^n .

Forma slabă: Dacă f_1 și f_2 coincid într-un deschis din Δ , atunci $f_1 = f_2$ în Δ .

Forma tare: Dacă într-un punct $a \in \Delta$, $f_1(a) = f_2(a)$ și oricare ar fi $j \in N^n$, $D^j f_1(a) = D^j f_2(a)$, atunci $f_1 = f_2$ în Δ .

Evident forma slabă rezultă din cea tare. Pentru a demonstra forma tare să notăm cu $E = \{z \in \Delta \mid D^j f_1(z) = D^j f_2(z), j \in N^n\}$. Mulțimea E este închisă, datorită continuității funcțiilor f_1 și f_2 . Ea este însă și deschisă, deoarece oricare ar fi $z^0 \in E$ și $U_R(z^0) \subset \Delta$, dezvoltările Taylor ale funcțiilor f_1 și f_2 în jurul lui z^0 în $U_R(z^0)$ coincid. Prin urmare, $U_R(z^0) \subset E$. Deoarece $E \neq \emptyset$ și Δ este conex, deducem $E = \Delta$.

Observația 2. Fie f_1 și f_2 două funcții olomorfe într-un polidomeniu $\Delta = \Delta_1 \times \dots \times \Delta_n$ și o mulțime $M = M_1 \times \dots \times M_n \subset \Delta$, astfel încât $M_k \cap \Delta_k \neq \emptyset$ și $f_1|_M = f_2|_M$. Atunci $f_1 = f_2$ în Δ .

Cu ajutorul principiului prelungirii analitice, folosind și teorema lui Montel (teorema 2, §6, nr. 3), se stabilește prin extinderea directă a demonstrației din cazul unei singure variabile complexe ([81], vol. I. cap. V, II) un analog al teoremei lui Vitali.

Teorema 4. Un șir $\{f_\nu\}$ de funcții olomorfe într-un domeniu $\Delta \subset C^n$, care

- 1) formează familie mărginită pe compacte în Δ și
 - 2) converge pe un deschis din Δ resp.
 - 2') converge atît el cît și toate șirurile $\{D^j f_\nu\}, j \in N^n$, într-un punct din Δ ,
- converge uniform pe compacte în Δ .

Teorema 5. (*Principiul maximului modulului.*) Modulul unei funcții $f(z)$ olomorfe neconstante în domeniul $\Delta \subset \mathbb{C}^n$ nu poate avea un maxim local (în sens larg sau strict) în nici un punct $z^0 \in \Delta$, i.e. nu există nici un punct $z^0 \in \Delta$, astfel încît într-o vecinătate a sa $U_R(z^0) \subset \Delta$, $|f(z^0)| \geq |f(z)|$, resp. $|f(z^0)| > |f(z)|$ pentru $z \neq z^0$.

Să presupunem prin reducere la absurd că există un punct $z^0 \in \Delta$ și o vecinătate $U_R(z^0) \subset \Delta$ în care $|f(z^0)| \geq |f(z)|$. Funcția de variabila z_1 , $f(z_1, z_2^0, \dots, z_n^0)$ este olomorfă în $|z_1 - z_1^0| < R_1$ și cum $|f(z^0)| \geq |f(z_1, z_2^0, \dots, z_n^0)|$, principiul maximului modulului pentru funcții olomorfe de o variabilă ([81] vol. I, cap. II, III) implică $f(z_1, z_2^0, \dots, z_n^0) = f(z^0)$ în $|z_1 - z_1^0| < R_1$. Să alegem un punct z_1 arbitrar în $|z_1 - z_1^0| < R_1$ și să-l păstrăm fix. În $|z_2 - z_2^0| < R_2$, $|f(z_1, z_2^0, \dots, z_n^0)| \geq |f(z_1, z_2, z_3^0, \dots, z_n^0)|$. Deci aplicînd din nou principiul maximului modulului pentru funcții olomorfe de o variabilă deducem $f(z_1, z_2, z_3^0, \dots, z_n^0) = f(z^0)$ în $|z_1 - z_1^0| < R_1, |z_2 - z_2^0| < R_2$. Repetînd procedeul stabilim prin inducție că $f(z) = f(z^0)$ în $U_R(z^0)$.

Dintre diferitele formulări ale acestei teoreme vom aplica în cele ce urmează

Propoziția 4. Dacă funcția $f(z)$ este olomorfă în polidiscul $U_R(0)$, continuă în $\bar{U}_R(0)$, atunci $\max_{z \in \bar{U}_R(0)} |f(z)| = \max_{z \in \partial_0 U_R(0)} |f(z)|$.

Procedăm prin inducție după numărul variabilelor. În cazul unei singure variabile $\partial_0 U_R(0) = \partial U_R(0)$ și propoziția rezultă din principiul maximului. Să presupunem că ea este adevărată pentru $n - 1$ variabile. După principiul maximului, $\max_{z \in \bar{U}_R(0)} |f(z)| = \max_{z \in \partial U_R(0)} |f(z)| =$

$$= \max_{k=1, \dots, n} \left\{ \max_{|z_j| \leq R_j, j=1, \dots, n, j \neq k, |z_k|=R_k} |f(z)| \right\} = \max_{z \in \partial_0 U_R(0)} |f(z)|.$$

§ 10. Funcții olomorfe într-un domeniu Reinhardt și într-un domeniu circular. Aplicații.

1. Am demonstrat că orice funcție olomorfă într-un polidisc cu centrul a se dezvoltă în serie Taylor în jurul lui a , resp. în serie de polinoame omogene în $(z_j - a_j)$, $j = 1, \dots, n$, (teorema 2 și

consecința 6 din § 9). Vom extinde acum aceste rezultate pentru domenii mai generale și anume, pentru domenii Reinhardt, resp. pentru domenii circulare cu centrul a (§ 8, nr. 3). Pentru simplificarea scrierii vom lua din nou $a = 0$.

Începem cu câteva considerații auxiliare:

Lema 1. Fie Δ un domeniu oarecare, $\Delta \ni 0$. Dacă ε este un număr pozitiv

$$\Delta_\varepsilon = \{z \in \Delta \mid d(z, \partial\Delta) > \varepsilon d(z, 0)\} \quad (1)$$

este un deschis nenul. Vom nota cu Δ_ε^* componenta conexă a lui Δ , care conține originea. Atunci $\bigcup_{\varepsilon > 0} \Delta_\varepsilon^* = \Delta$.

Fie $p \in \Delta$ și L un drum continuu, unind 0 cu p în Δ . Dacă $d_0 = d(L, \partial\Delta)$ și $M = \max_{q \in L} d(q, 0)$, atunci oricare ar fi punctul $q \in L$, avem $d(q, \partial\Delta) \geq \frac{d_0}{M} d(q, 0)$. Prin urmare, $L \subset \Delta_\varepsilon$ pentru $\varepsilon < d_0/M$ și, cum L este conex, $L \subset \Delta_\varepsilon^*$. În concluzie, $p \in \Delta_\varepsilon^*$.

Lema 2. Dacă $z \in \Delta_\varepsilon$, atunci $\sigma = \{tz \mid 1 \leq t \leq 1 + \varepsilon\} \subset \Delta$.

Se verifică imediat că $\sigma \cap \partial\Delta = \emptyset$: $d(tz, \partial\Delta) = d(tz, \zeta^*)$, ζ^* fiind un anumit punct din $\partial\Delta$, deci $d(tz, \partial\Delta) \geq d(z, \zeta^*) - d(tz, z) > (\varepsilon + 1 - t) d(z, 0) \geq 0$. Deoarece σ este conex, rezultă $\sigma \subset \Delta$.

Consecința 1. Să presupunem că Δ este un domeniu Reinhardt cu centrul 0 , care conține punctul 0 .

1) Dacă $z \in \Delta_\varepsilon$ și $t = (t_1, \dots, t_n)$ are proprietatea $|t_k| = \rho$, $1 \leq k \leq n$, $\rho \leq 1 + \varepsilon$, atunci $Z = (t_1 z_1, \dots, t_n z_n) \in \Delta$.

2) Fie $U_r(0) \subset \Delta_\varepsilon^*$. Dacă $z \in U_r(0)$ și $t \in U_{1+\varepsilon}(0)^*$, atunci $Z \in \Delta$.

1) Conform lemei 2, punctul $\rho z \in \Delta$ și cum Δ este domeniu Reinhardt, $Z \in \Delta$.

2) Se verifică imediat relațiile $(1 + \varepsilon)U_r(0) = U_{r(1+\varepsilon)}(0) = \{Z = (t_1 z_1, \dots, t_n z_n) \mid z \in U_r(0), t \in U_{1+\varepsilon}(0)\}$. Prin urmare, $z^* = \frac{Z}{1 + \varepsilon} \in U_r(0)$ și conform 1), $Z \in \Delta$.

*) Convenim pentru prescurtare să notăm $U_{1+\varepsilon, \dots, 1+\varepsilon}(0)$ cu $U_{1+\varepsilon}(0)$ și analog să folosim notațiile $U_{1+\varepsilon'}(0)$, $\partial_0 U_{1+\varepsilon'}(0)$.

consecința 6 din § 9). Vom extinde acum aceste rezultate pentru domenii mai generale și anume, pentru domenii Reinhardt, resp. pentru domenii circulare cu centrul a (§ 8, nr. 3). Pentru simplificarea scrierii vom lua din nou $a = 0$.

Începem cu câteva considerații auxiliare:

Lema 1. Fie Δ un domeniu oarecare, $\Delta \ni 0$. Dacă ε este un număr pozitiv

$$\Delta_\varepsilon = \{z \in \Delta \mid d(z, \partial\Delta) > \varepsilon d(z, 0)\} \quad (1)$$

este un deschis nenul. Vom nota cu Δ_ε^* componenta conexă a lui Δ , care conține originea. Atunci $\bigcup_{\varepsilon > 0} \Delta_\varepsilon^* = \Delta$.

Fie $p \in \Delta$ și L un drum continuu, unind 0 cu p în Δ . Dacă $d_0 = d(L, \partial\Delta)$ și $M = \max_{q \in L} d(q, 0)$, atunci oricare ar fi punctul $q \in L$, avem $d(q, \partial\Delta) \geq \frac{d_0}{M} d(q, 0)$. Prin urmare, $L \subset \Delta_\varepsilon$ pentru $\varepsilon < d_0/M$ și, cum L este conex, $L \subset \Delta_\varepsilon^*$. În concluzie, $p \in \Delta_\varepsilon^*$.

Lema 2. Dacă $z \in \Delta_\varepsilon$, atunci $\sigma = \{tz \mid 1 \leq t \leq 1 + \varepsilon\} \subset \Delta$.

Se verifică imediat că $\sigma \cap \partial\Delta = \emptyset$: $d(tz, \partial\Delta) = d(tz, \zeta^*)$, ζ^* fiind un anumit punct din $\partial\Delta$, deci $d(tz, \partial\Delta) \geq d(z, \zeta^*) - d(tz, z) > (\varepsilon + 1 - t)d(z, 0) \geq 0$. Deoarece σ este conex, rezultă $\sigma \subset \Delta$.

Consecința 1. Să presupunem că Δ este un domeniu Reinhardt cu centrul 0 , care conține punctul 0 .

1) Dacă $z \in \Delta_\varepsilon$ și $t = (t_1, \dots, t_n)$ are proprietatea $|t_k| = \rho$, $1 \leq k \leq n$, $\rho \leq 1 + \varepsilon$, atunci $Z = (t_1 z_1, \dots, t_n z_n) \in \Delta$.

2) Fie $U_r(0) \subset \Delta_\varepsilon^*$. Dacă $z \in U_r(0)$ și $t \in U_{1+\varepsilon}(0)^*$, atunci $Z \in \Delta$.

1) Conform lemei 2, punctul $\rho z \in \Delta$ și cum Δ este domeniu Reinhardt, $Z \in \Delta$.

2) Se verifică imediat relațiile $(1 + \varepsilon)U_r(0) = U_{r(1+\varepsilon)}(0) = \{Z = (t_1 z_1, \dots, t_n z_n) \mid z \in U_r(0), t \in U_{1+\varepsilon}(0)\}$. Prin urmare, $z^* = \frac{Z}{1 + \varepsilon} \in U_r(0)$ și conform 1), $Z \in \Delta$.

*) Convenim pentru prescurtare să notăm $U_{1+\varepsilon, \dots, 1+\varepsilon}(0)$ cu $U_{1+\varepsilon}(0)$ și analog să folosim notațiile $U_{1+\varepsilon'}(0)$, $\partial_0 U_{1+\varepsilon'}(0)$.

Analog se obține

Consecința 2. Să presupunem că Δ este un domeniu circular cu centrul 0, care conține punctul 0.

- 1) Dacă $z \in \Delta_\epsilon^*$ și $t \in \mathbb{C}$, $1 \leq |t| \leq 1 + \epsilon$, atunci $tz \in \Delta$.
- 2) Dacă $z \in U_r(0) \subset \Delta_\epsilon^*$ și $|t| < 1 + \epsilon$, atunci $tz \in \Delta$.

2. Teorema 1. Fie Δ un domeniu Reinhardt cu centrul 0 și care conține punctul 0. Dacă funcția $f: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ este olomorfă în Δ , atunci ea se dezvoltă în serie Taylor în jurul lui 0,

$$f(z) = \sum_{j \in \mathbb{N}^n} c_{j_1 \dots j_n} z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n} \quad (2)$$

pentru orice $z \in \Delta$. Seria (2) converge normal pe orice compact din Δ . Reprezentarea este unică, coeficienții fiind dați de formulele (5), § 9, nr. 2.

1° Funcțiile de $2n$ variabile complexe $z_1, \dots, z_n$ și $t_1, \dots, t_n$,

$$Z_k = t_k z_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

sint olomorfe în $\mathbb{C}^{2n}$ și definesc o aplicație olomorfă $\Phi: \mathbb{C}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^n$, $Z = \Phi(z_1, \dots, t_n)$. Dacă $Z \in \Delta$, atunci are sens funcția compusă $\Psi(z, t) = f(t_1 z_1, \dots, t_n z_n)$. Consecința 1 indică două cazuri când putem forma funcția Ψ :

1) $z \in \Delta_\epsilon^*$ și t cu $|t_k| = \rho \in [1, 1 + \epsilon]$, $k = 1, \dots, n$ resp.

2) $z \in U_r(0) \subset \Delta_\epsilon^*$ și $t \in U_{1+\epsilon}(0)$.

Observația 1. În ambele cazuri $\Psi(z, t)$ este continuă în raport cu toate variabilele. Dacă t este fix, $\Psi(z, t)$ este olomorfă în z^*). Funcția $\Psi_{z_k}(z, t) = f_{z_k}(t_1 z_1, \dots, t_n z_n) t_k$ este continuă în raport cu toate variabilele z și t , ($k = 1, \dots, n$).

2° În demonstrația teoremei 2 din § 9 am folosit reprezentarea funcțiilor olomorfe într-un polidisc cu ajutorul unei formule integrale. În mod analog, vom stabili o reprezentare integrală pentru funcțiile olomorfe în domenii Reinhardt. Mai precis, vom stabili o formulă integrală pentru $f(z)$ în Δ_ϵ^* .

*) În cazul 2), Ψ este olomorfă în polidiscul $U_r(0) \times U_{1+\epsilon}(0) \subset \mathbb{C}^{2n}$.

2°. 1 Folosim cazul 2): Să luăm $z \in U_r(0)$ fix, dar arbitrar și să notăm, pentru $t \in U_{1+\varepsilon}(0)$, $F(t) = \Psi(z, t)$. Funcția $F(t)$ este olomorfă în $U_{1+\varepsilon}(0)$. Dacă $\varepsilon' \in (0, \varepsilon)$ putem aplica acestei funcții formula integrală a lui Cauchy luată relativ la $\bar{U}_{1+\varepsilon'}(0)$ în punctul $t = 1$. Obținem

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int \dots \int_{\partial_0 U_{1+\varepsilon'}(0)} \frac{f(t_1 z_1, \dots, t_n z_n)}{(t_1 - 1) \dots (t_n - 1)} dt_1 \dots dt_n, \quad (3)$$

formulă valabilă momentan pentru orice $z \in U_r(0)$.

2°. 2 Să remarcăm că funcția $g(z)$ dată de membrul drept al egalității (3) este definită și olomorfă în Δ_ε^* . Într-adevăr, dacă $z \in \Delta_\varepsilon^*$ și $t \in \partial_0 U_{1+\varepsilon'}(0)$ sîntem în cazul 1) și, ținînd seama de observația 1, putem aplica propoziția 2', § 4, nr 2.

2°. 3 Funcțiile $f(z)$ și $g(z)$ sînt olomorfe în Δ_ε^* și coincid în $U_r(0)$. După teorema de identitate, (teorema 3, § 9, nr. 4), $f(z) = g(z)$ în Δ_ε^* , deci reprezentarea (3) a lui $f(z)$ este valabilă în Δ_ε^* .

3° Procedînd ca și la demonstrația teoremei 2, § 9, vom dezvolta în serie integrandul din (3)

$$\frac{f(t_1 z_1, \dots, t_n z_n)}{(t_1 - 1) \dots (t_n - 1)} = \sum_{j \in \mathbb{N}^n} \frac{f(t_1 z_1, \dots, t_n z_n)}{t_1^{j_1+1} \dots t_n^{j_n+1}}. \quad (4)$$

Seria (4) este convergentă normal pe $K \times \partial_0 U_{1+\varepsilon'}(0)$, oricare ar fi compactul $K \subset \Delta_\varepsilon^*$, în particular în orice punct $z \in \Delta_\varepsilon^*$. Integrînd termen cu termen, obținem conform propoziției 2, § 6, nr. 1 o serie convergentă normal pe K

$$f(z) = \sum_{j \in \mathbb{N}^n} \Phi_j(z),$$

unde funcțiile

$$\Phi_j(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int \dots \int_{\partial_0 U_{1+\varepsilon'}(0)} \frac{f(t_1 z_1, \dots, t_n z_n)}{t_1^{j_1+1} \dots t_n^{j_n+1}} dt_1 \dots dt_n$$

sînt, conform propoziției 2', § 4, nr. 2, olomorfe în Δ_ε^* .

4°. Repetind raționamentul de la punctul 2, vom arăta acum că oricare ar fi $z \in \Delta_\varepsilon^*$.

$$\Phi_j(z) = \frac{1}{j_1! \dots j_n!} \frac{\partial^{|j|} f(0)}{\partial z_1^{j_1} \dots \partial z_n^{j_n}} z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n}, \quad j \in \mathbb{N}^n. \quad (6)$$

Păstrind din nou $z \in U_r(0)$ fix, vom aplica funcției $F(t)$ de la punctul 2° 1 formulele (20) § 4, nr. 3 relativ la $\bar{U}_{1+\varepsilon'}(0)$ în $t = 0$

$$\frac{\partial^{|j|} F(0)}{\partial t_1^{j_1} \dots \partial t_n^{j_n}} = \frac{j_1! \dots j_n!}{(2\pi i)^n} \int \dots \int_{\partial_0 U_{1+\varepsilon'}(0)} \frac{f(t_1 z_1, \dots, t_n z_n)}{t_1^{j_1+1} \dots t_n^{j_n+1}} dt_1 \dots dt_n. \quad (7)$$

Deoarece $F_{t_k}(t) = f_{z_k}(Z) z_k$ și $\frac{\partial^{|j|} f(0)}{\partial z_1^{j_1} \dots \partial z_n^{j_n}} = \frac{\partial^{|j|} f(0)}{\partial z_1^{j_1} \dots \partial z_n^{j_n}}$, deducem egalitatea (6) pentru $z \in U_r(0)$. Ambii membri din (6) sînt însă funcții olomorfe de $z \in \Delta_\varepsilon^*$, deci teorema de identitate ne asigură că (6) este valabilă în Δ_ε^* .

5° Înlocuind (6) în (5), obținem că dezvoltarea lui $f(z)$ în serie Taylor în jurul originii (2) converge normal pe compactele din Δ_ε^* . Folosind lema 1 și observînd că dezvoltarea (2) nu depinde de ε , obținem teorema 1.

3. Teorema 2. Fie Δ un domeniu circular cu centrul 0, care conține punctul 0. Dacă $f(z)$ este o funcție olomorfă în Δ , atunci ea se dezvoltă într-o serie

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(z), \quad (8)$$

unde $P_m(z)$ este un polinom omogen de gradul m ,

$$\begin{aligned} P_m(z) &= \frac{1}{m!} \left(\frac{\partial}{\partial z_1} z_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial z_n} z_n \right)^m f(0) = \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}^n, |j|=m} \frac{1}{j_1! \dots j_n!} \frac{\partial^{|j|} f(0)}{\partial z_1^{j_1} \dots \partial z_n^{j_n}} z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n} \end{aligned} \quad (9)$$

Seria este convergentă normal pe compactele din Δ și reprezentarea este unică.

Demonstrația este analogă cu cea din cazul teoremei 1 cu simplificări datorite faptului că Δ este domeniu circular;

1° Vom lua aplicația olomorfă $\Phi: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^n$, dată de $Z = tz$. Conform consecinței 2, funcția $\Psi(z, t) = f(z_1 t, \dots, z_n t)$ are sens în cazurile

1) $z \in \Delta_\varepsilon^*$ și $1 \leq |t| \leq 1 + \varepsilon$ resp.

2) $z \in U_r(0)$ și $|t| < 1 + \varepsilon$, unde $U_r(0) \subset \Delta_\varepsilon^*$.

2° Fixînd $z \in U_r(0)$, funcția $F(t) = f(tz)$ este olomorfă în $|t| < 1 + \varepsilon$, deci pentru $\varepsilon' \in (0, \varepsilon)$, formula integrală a lui Cauchy, aplicată relativ la $|t| \leq 1 + \varepsilon'$ în $t = 1$, ne dă

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1+\varepsilon'} \frac{f(tz)}{t-1} dt. \quad (10)$$

Membrul doi din (10) definește o funcție $g(z)$ olomorfă în Δ_ε^* conform consecinței 2.1) de mai sus și propoziției 2', § 4, nr. 2.

Funcțiile $f(z)$ și $g(z)$ olomorfe în Δ_ε^* coincid în $U_r(0)$, deci formula (10) dă o reprezentare integrală pentru $f(z)$ în Δ_ε^* .

3° Dezvoltînd sub semnul integralei din (10), obținem

$$\frac{f(tz)}{t-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f(tz)}{t^{m+1}}, \quad (11)$$

serie convergentă normal pe $K \times \{t \mid |t| = 1 + \varepsilon'\}$, oricare ar fi compactul $K \subset \Delta_\varepsilon^*$. Prin urmare

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(z), \quad (12)$$

unde

$$P_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1+\varepsilon'} \frac{f(tz)}{t^{m+1}} dt$$

este o funcție olomorfă în Δ_ε^* , seria (12) fiind convergentă normal pe orice compact din Δ_ε^* .

4° Păstrînd z fix în $U_r(0)$,

$$\frac{d^m F(0)}{dt^m} = \frac{m!}{2\pi i} \int_{|t|=1+\varepsilon} \frac{f(tz)}{t^{m+1}} dt$$

și cum

$$\begin{aligned} \frac{d^m F(0)}{dt^m} &= \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial z_k} z_k \right)^m f(0) = \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}^m, |j|=m} \frac{m!}{j_1! \dots j_n!} \frac{\partial^{|j|} f(0)}{\partial z_1^{j_1} \dots \partial z_n^{j_n}} z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n}, \end{aligned}$$

deducem că (9) are loc în $U_r(0)$, deci în Δ_ε^* . Prin urmare $f(z)$ se dezvoltă într-o serie de polinoame omogene (8) și (9) convergentă normal pe orice compact din Δ_ε^* .

5° Cum dezvoltarea obținută nu depinde de ε , teorema 2 rezultă lăsînd pe ε să tindă la 0.

4. Aplicații relative la prelungirea analitică. Exemplul lui Hartogs

Teorema 1 demonstrată mai sus ne permite să prezentăm un exemplu prin care Hartogs a pus în evidență o proprietate a funcțiilor olomorfe de $n \geq 2$ variabile cu totul nouă față de cazul funcțiilor olomorfe de o variabilă.

Definiția 1. Vom numi *domeniu de olomorfie* în $\mathbb{C}^n$, un domeniu $\Delta \subset \mathbb{C}^n$, astfel încît să existe o funcție $f \in O(\Delta)$, care nu se poate prelunge analitic în afara lui Δ .

În cazul $n = 1$, orice domeniu $\Delta \subset \mathbb{C}$ este domeniu de olomorfie ([81], vol. I, cap. IX, IV). Dimpotrivă, Hartogs a construit *exemple de domenii* $\Delta \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, astfel încît toate funcțiile olomorfe în Δ se prelungesc analitic într-un domeniu $\tilde{\Delta}$, care include strict pe Δ . Deci nu orice domeniu $\Delta \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, este domeniu de olomorfie. În acest mod s-a pus problema caracterizării domeniilor de olomorfie din $\mathbb{C}^n$, pe care o vom trata în cap. III, § 5, nr. 5.

4.1. Exemplul lui Hartogs se bazează pe faptul că nu orice domeniu Reinhardt cu centrul 0 este o reuniune de polidiscuri cu

centrul 0. Un astfel de domeniu Reinhardt este pentru $n = 2$ și $0 < \varepsilon < 1$,

$$\Delta = \{z \mid |z_1| < \varepsilon, |z_2| < 1\} \cup \{z \mid |z_1| < 1, 1 - \varepsilon < |z_2| < 1\}.$$

După teorema 1, orice funcție $f \in O(\Delta)$ se dezvoltă în jurul originii într-o serie Taylor, al cărei domeniu de convergență $D \supset \Delta$. Incluziunea este strictă conform teoremei 1, § 8, nr. 3. Iată însă și un alt raționament: Oricare ar fi numărul natural $N \geq 2$, punctul $z^N = \left(1 - \frac{\varepsilon}{N}, 1 - \frac{\varepsilon}{N}\right)$ aparține lui D , deci în virtutea lemei lui Abel (§ 8, nr. 2) polidiscul $U_{z^N}(0) \subset D$. Rezultă astfel că $U_{1,1}(0) \subset D$. În concluzie, orice funcție olomorfă în Δ este olomorfă în $U_{1,1}(0)$, care include strict pe Δ .

Exemplul se extinde imediat la cazul n oarecare, luând

$$\Delta = \{z \mid |z_1| < \varepsilon, \dots, |z_{n-1}| < \varepsilon, |z_n| < 1\} \cup \\ \cup \{z \mid |z_1| < 1, 1 - \varepsilon < |z_k| < 1, k = 2, \dots, n\}$$

și repetind raționamentul pentru $z^N = \left(1 - \frac{\varepsilon}{N}, \dots, 1 - \frac{\varepsilon}{N}\right)$.

Propoziția 1. *Dacă Ω este un deschis din $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, și $a \in \Omega$, orice funcție olomorfă în $\Omega - \{a\}$ se prelungește analitic în Ω . (O funcție olomorfă de $n \geq 2$ variabile nu poate avea singularități izolate *).*

Fie $r > 0$, astfel încît $U_{2r, \dots, 2r}(a) \subset \Omega$ și fie $b \in U_{r, \dots, r}(a)$, $b \neq a$. Există cel puțin un indice $j \in \{1, \dots, n\}$, pentru care $b_j \neq a_j$. Să alegem un număr real ε , astfel încît $0 < \varepsilon < \min(r, |a_j - b_j|, r - |a_k - b_k|)$ pentru cel puțin un indice $k \neq j$, $k = 1, \dots, n$. Deoarece $U_{r, \dots, r}(b) \subset U_{2r, \dots, 2r}(a)$, domeniul Reinhardt relativ la b :

$$\Delta = \{z \mid |z_j - b_j| < \varepsilon, |z_k - b_k| < r, k \neq j, k = 1, \dots, n\} \cup \\ \cup \{z \mid |z_j - b_j| < r, r - \varepsilon < |z_k - b_k| < r, k \neq j, \\ k = 1, \dots, n\} \subset \Omega - \{a\}.$$

*) Relativ la problema removabilității sau a înlăturării singularităților aparente, problemă deosebit de importantă în teoria funcțiilor de mai multe variabile complexe, a se vedea [50], cap. II, § 4.

Prin urmare, restricția la Δ a oricărei funcții f olomorfe în $\Omega - \{a\}$ este olomorfă în Δ . Raționamentul din exemplul lui Hartogs arată însă că ea se prelungește analitic la $U_{r, \dots, r}(b)$ și cum $a \in U_{r, \dots, r}(b)$, propoziția este demonstrată.

4.2. Alte exemple de domenii $\Delta \subset \mathbb{C}^n$, care nu sînt domenii de olomorfie, se obțin printr-un procedeu asemănător, folosind însă faptul că nu orice reuniune de polidiscuri are imaginea prin aplicația ψ (§ 8, nr. 3) convexă. Fie pentru simplificarea scrierii $n = 2$ și $\Delta = U_{1,e}(0) \cup U_{e,1}(0)$. În $\mathbb{R}^2$, domeniul $\Delta^* = \{\xi \mid \xi_1 < 0, \xi_2 < 1\} \cup \{\xi \mid \xi_1 < 1, \xi_2 < 0\}$ nu este convex. Fie $\tilde{\Delta}^* = \Delta^* \cup \{\xi \mid \xi_1 + \xi_2 < 1, \xi_1, \xi_2 \geq 0\}$ înfășurătoarea convexă a lui Δ^* (i.e. domeniul convex minim care-l include pe Δ^*). Orice funcție olomorfă în Δ se dezvoltă în jurul originii în serie Taylor convergentă în Δ , deci domeniul D de convergență al acestei serii include domeniul $\tilde{\Delta} = \psi^{-1}(\tilde{\Delta}^*)$, care conține strict Δ , conform teoremei 1 din § 8, nr. 3.

4.3. Tot teorema 1 din § 10 permite să stabilim uneori imposibilitatea prelungirii analitice peste anumite mulțimi. De exemplu, iată generalizarea propoziției: Pe circumferința cercului de convergență (de rază finită) a unui element de funcție analitică se află cel puțin un punct singular al funcției ([81], vol. I, cap. IV, II).

Propoziția 2. Fie $R = (R_1, \dots, R_n)$ un sistem de raze conjugate (§ 8, nr. 4) pentru o serie Taylor (2). Atunci $f(z)$, suma seriei (2), nu poate fi prelungită analitic pe scheletul $\partial_0 U_R(0)$ (deci pe $\partial U_R(0)$).

Procedînd prin reducere la absurd să presupunem că prelungirea ar fi posibilă în orice punct $\zeta \in \partial_0 U_R(0)$, i.e. că există un polidisc $U_{\varepsilon, \dots, \varepsilon}(\zeta)$, în care $f(z)$ se prelungește analitic. Deoarece $\partial_0 U_R(0)$ este un compact, îl putem acoperi cu un număr finit de astfel de polidiscuri, fie U^s , $s = 1, \dots, N$, și după principiul de prelungire analitică, $f(z)$ se poate prelungi în domeniul $\Omega = U_R(0) \cup \left(\bigcup_{s=1}^N U^s \right) \supset \supset \partial_0 U_R(0)$. Fie d distanța dintre $\partial_0 U_R(0)$ și $\partial \Omega$, iar ρ un număr pozitiv, $\rho < d/\sqrt{n}$; atunci $U_{\rho, \dots, \rho}(\zeta) \subset \Omega$, oricare ar fi $\zeta \in \partial_0 U_R(0)$.

Deoarece $\Delta = U_R(0) \cup \left[\bigcup_{\zeta \in \partial_0 U_R(0)} U_{\rho, \dots, \rho}(\zeta) \right]$ este un domeniu Reinhardt cu centrul 0 și $f(z)$ se prelungește analitic în Δ , rezultă că $f(z)$ se dezvoltă în Δ în serie Taylor în jurul lui 0. Din unicitatea dezvoltării în serie Taylor, deducem că Δ este inclus în domeniul D de convergență al seriei (2). Dar punctul $\left(R_1 + \frac{\rho}{2}, \dots, R_n + \frac{\rho}{2}\right)$ aparține lui Δ , deci $(R_1, \dots, R_n)$ nu formează un sistem de raze conjugate, ceea ce contrazice ipoteza.

§ 11. Proprietăți algebrice locale ale funcțiilor olomorfe

Se știe că funcțiile olomorfe pe un deschis $\Delta \subset \mathbb{C}^n$ formează o $\mathbb{C}$ -algebră comutativă cu unitate, pe care am notat-o cu $\mathcal{O}(\Delta)$ (§ 3, nr. 1), iar aplicațiile olomorfe $\Delta \rightarrow \mathbb{C}^m$ formează un $\mathcal{O}(\Delta)$ -modul izomorf cu $\mathcal{O}(\Delta)^m$. Vom cerceta acum proprietățile algebrice ale funcțiilor olomorfe în vecinătatea unui punct $z^0 \in \mathbb{C}^n$. În acest scop, vom nota cu $\mathcal{U}(z^0)$ mulțimea deschiselor $U \subset \mathbb{C}^n$, care conțin punctul z^0 . O funcție olomorfă în vecinătatea lui z^0 este o funcție complexă definită pe un deschis $U \in \mathcal{U}(z^0)$, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, olomorfă în U . Mulțimea acestor funcții este dată deci de mulțimea perechilor (f, U) cu $U \in \mathcal{U}(z^0)$ și $f \in \mathcal{O}(U)$. Vom nota cu $\mathfrak{U}(z^0)$ mulțimea acestor perechi.

Fiecărei funcții olomorfe în vecinătatea lui z^0 , $(f, U) \in \mathfrak{U}(z^0)$, îi corespunde univoc o serie Taylor convergentă, dezvoltarea lui f în jurul lui z^0 , pe care o vom nota

$$S_f(z_1 - z_1^0, \dots, z_n - z_n^0) = \sum_{j \in \mathbb{N}^n} a_j (z_1 - z_1^0)^{j_1} \dots (z_n - z_n^0)^{j_n},$$

unde

$$a_j = \frac{D^j f(z^0)}{j_1! \dots j_n!}.$$

Fie $\mathbb{C}\{z_1 - z_1^0, \dots, z_n - z_n^0\}$ mulțimea seriilor Taylor în jurul lui z^0 , convergente *).

*) Studiul seriilor Taylor convergente este precedat de obicei de teoria seriilor de puteri formale. Relativ la această teorie a se vedea [50], cap. I, § 1.

Aplicația $\Theta: \mathfrak{U}(z^0) \rightarrow \mathbb{C}\{z_1 - z_1^0, \dots, z_n - z_n^0\}$, care asociază lui f seria S_f este surjectivă, dar nu injectivă. Dacă $(\tilde{f}, \tilde{U}) \in \mathfrak{U}(z^0)$ și dacă există $U^* \in \mathcal{U}(z^0)$, astfel încît $U^* \subset U \cap \tilde{U}$ și $f|_{U^*} = \tilde{f}|_{U^*}$, atunci $S_{\tilde{f}} = S_f$. Pentru a înlătura acest inconvenient, cît și faptul că funcțiile olomorfe în vecinătatea lui z^0 au domenii de definiție diferite, vom introduce în $\mathfrak{U}(z^0)$ următoarea relație de echivalență: Dacă $(f_k, U_k) \in \mathfrak{U}(z^0)$, $k = 1, 2$, spunem că $(f_1, U_1) \sim (f_2, U_2)$ atunci și numai atunci cînd există $W \in \mathcal{U}(z^0)$, $W \subset U_1 \cap U_2$, astfel încît $f_1|_W = f_2|_W$.

Definiția 1. Clasa de perechi $(\tilde{f}, \tilde{U}) \in \mathfrak{U}(z^0)$ echivalente cu $(f, U) \in \mathfrak{U}(z^0)$ se numește *germenele funcției olomorfe f în z^0* **).

Vom nota germenele unei funcții olomorfe f în z^0 cu f_{z^0} sau, atunci cînd punctul z^0 este cunoscut, cu $\underline{f}$ și vom nota mulțimea germe- nilor de funcții olomorfe în z^0 , i.e. mulțimea cît a lui $\mathfrak{U}(z^0)$ în rap- port cu relația de echivalență de mai sus, cu O_{z^0} .

Oricărui germene de funcție olomorfă f_{z^0} de reprezentant $(f, U) \in \mathfrak{U}(z^0)$ îi putem asocia punctul z^0 , numit *proiecția* sa și numărul $f(z^0)$ notat uneori $f_{z^0}(z^0)$ și numit *valoarea* germenului f_{z^0} (care evi- dent nu depinde de reprezentantul ales).

Aplicația Θ induce o bijecție $\Theta: O_{z^0} \rightarrow \mathbb{C}\{z_1 - z_1^0, \dots, z_n - z_n^0\}$, care asociază fiecărui germene în z^0 seria Taylor în jurul lui z^0 corespunzătoare unui reprezentant oarecare al germenului.

Se verifică imediat că *mulțimea seriilor Taylor în jurul lui z^0 , convergente $\mathbb{C}\{z_1 - z_1^0, \dots, z_n - z_n^0\}$ formează o $\mathbb{C}$ -algebră comuta- tivă cu unitate.*

Fie $A(z_1 - z_1^0, \dots, z_n - z_n^0) = \sum_{j \in \mathbb{N}^n} a_j (z_1 - z_1^0)^{j_1} \dots (z_n - z_n^0)^{j_n}$ și $B(z_1 - z_1^0, \dots, z_n - z_n^0) = \sum_{j \in \mathbb{N}^n} b_j (z_1 - z_1^0)^{j_1} \dots (z_n - z_n^0)^{j_n}$ două serii din $\mathbb{C}\{z_1 - z_1^0, \dots, z_n - z_n^0\}$, D_A și D_B domeniile lor de convergență.

Folosind faptul că suma unei serii Taylor este o funcție olomorfă în domeniul ei de convergență, proprietățile funcțiilor olomorfe

*) Evident după teorema de identitate a funcțiilor olomorfe $f_1(z) = f_2(z)$ pe com- pona conexă a lui $U_1 \cap U_2$, care conține punctul z^0 .

**) Noțiunea de germene de aplicație se va defini în condiții generale în cap. II, § 3.

și faptul că o funcție olomorfă într-un domeniu Reinhardt relativ la z^0 , care conține z^0 , se dezvoltă în serie Taylor în jurul lui z^0 în acel domeniu, se obțin imediat afirmațiile 1°, 2°, 3°:

$$1^\circ \text{ Seria } S(z_1 - z_1^0, \dots, z_n - z_n^0) = \sum_{j \in \mathbb{N}^n} (a_j + b_j) (z_1 - z_1^0)^{j_1} \dots (z_n - z_n^0)^{j_n}$$

are domeniul de convergență $D_S \supset D_A \cap D_B$ și pentru $z \in D_A \cap D_B$, $S = A + B$.

$$2^\circ \text{ Seria } P(z_1 - z_1^0, \dots, z_n - z_n^0) = \sum_{j \in \mathbb{N}^n} \left(\sum_{\substack{h, k \in \mathbb{N}^n \\ h+k=j}} a_h b_k \right) (z_1 - z_1^0)^{j_1} \dots (z_n - z_n^0)^{j_n}$$

are domeniul de convergență $D_P \supset D_A \cap D_B$ și pentru $z \in D_A \cap D_B$, $P = AB$.

$$3^\circ \text{ Fie } c \in \mathbb{C}; \text{ seria } Q(z_1 - z_1^0, \dots, z_n - z_n^0) = \sum_{j \in \mathbb{N}^n} c a_j (z_1 - z_1^0)^{j_1} \dots (z_n - z_n^0)^{j_n}$$

are domeniul de convergență $D_Q \supset D_S$ (mai precis $D_Q = \mathbb{C}^n$, dacă $c = 0$ și $D_Q = D_S$, dacă $c \neq 0$) și în D_S , $Q = cS$.

Definiția 2. *Ordinul seriei Taylor* $A(z_1 - z_1^0, \dots, z_n - z_n^0)$, dacă $A \neq 0$, este numărul întreg $\omega(A) = \min_{a_j \neq 0} |j|$. Dacă $A = 0$, prin

definiție $\omega(A) = +\infty$.

Se verifică ușor relațiile:

$$\omega(A + B) \geq \min[\omega(A), \omega(B)] \quad (1)$$

și

$$\omega(AB) = \omega(A) + \omega(B), \quad (2)$$

unde $A + B$ este seria S , iar AB seria P de mai sus.

Consecința 1. Din relația (2) rezultă:

$\mathbb{C}\{z_1 - z_1^0, \dots, z_n - z_n^0\}$ este un domeniu de integritate.

Propoziția 1. *Condiția necesară și suficientă pentru ca o serie $A(z_1 - z_1^0, \dots, z_n - z_n^0) \in \mathbb{C}\{z_1 - z_1^0, \dots, z_n - z_n^0\}$ să fie inversibilă este ca $\omega(A) = 0$.*

Dacă A este inversibilă există $B \in \mathbb{C}\{z_1 - z_1^0, \dots, z_n - z_n^0\}$, astfel încît $AB = 1$, deci $\omega(A) = 0$ conform (2). Invers dacă $\omega(A) = 0$, suma seriei A este o funcție $F(z)$ olomorfă într-o vecinătate a lui z^0 și diferită de 0 în z^0 . Atunci $\frac{1}{F(z)}$ este

olomoră într-o vecinătate a lui z^0 , iar B — seria Taylor în jurul lui z^0 asociată — satisface relația $AB=1$ în $D_A \cap D_B$. Coeficienții seriei B se pot determina din relația $AB=1$. Într-adevăr avem: $a_0 b_0 = 1$ și pentru orice $j \in \mathbb{N}^n$ cu $j > 0$ în ordinea canonică a lui $\mathbb{N}^n$, $a_0 b_j = - \sum_{0 \leq h < j} a_h b_{j-h}$, unde h descrie mulțimea elementelor din $\mathbb{N}^n$ pentru care $j-h \in \mathbb{N}^n$. Cum $a_0 \neq 0$ prin ipoteză și $j-h < j$, aceste relații determină succesiv coeficienții b_j ai seriei B .

Consecința 2. $\mathbb{C}\{z_1 - z_1^0, \dots, z_n - z_n^0\}$ este o algebră locală *). Mulțimea $\mathcal{X}$ a seriilor neinvertibile din $\mathbb{C}\{z_1 - z_1^0, \dots, z_n - z_n^0\}$, i.e. a seriilor S convergente cu $\omega(S) \geq 1$, formează un ideal.

Observația 1. Translația $z - z^0 = \zeta$ determină un izomorfism al lui $\mathbb{C}\{z_1 - z_1^0, \dots, z_n - z_n^0\}$ pe $\mathbb{C}\{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}$, care asociază fiecărei serii $S(z_1 - z_1^0, \dots, z_n - z_n^0)$ din $\mathbb{C}\{z_1 - z_1^0, \dots, z_n - z_n^0\}$ seria $S(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ din $\mathbb{C}\{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}$.

Teorema 1. Mulțimea $\mathcal{O}_{z^0}$ a germenilor de funcții olomorfe în z^0 se organizează în mod natural ca o $\mathbb{C}$ -algebră locală, izomorfă cu $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$.

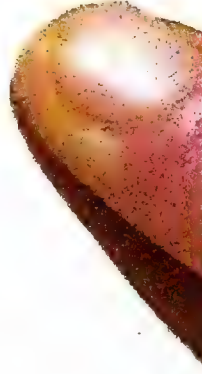
Fie f_{z^0} și g_{z^0} doi germeni de funcții olomorfe în z^0 , de reprezentanți (f, U) resp. (g, W) și c un număr complex. Definim

$$f_{z^0} + g_{z^0} = (f + g)_{z^0}, \quad f_{z^0} g_{z^0} = (fg)_{z^0} \text{ și } cf_{z^0} = (cf)_{z^0},$$

unde $(f + g)_{z^0}$, $(fg)_{z^0}$ și $(cf)_{z^0}$ sînt respectiv germenii în z^0 determinați de elementele $(f + g, U \cap W)$, $(fg, U \cap W)$ și (cf, U) din $\mathfrak{A}(z^0)$. Definițiile de mai sus au sens, fiind independente de reprezentanții aleși pentru germeni. Relativ la aceste operații $\mathcal{O}_{z^0}$ formează o $\mathbb{C}$ -algebră comutativă cu element unitate, iar θ un izomorfism de $\mathbb{C}$ -algebre. Algebra $\mathcal{O}_{z^0}$ este locală, germenii neinvertibili fiind aceia care au valoarea nulă. Vom nota cu $\mathcal{X}_{\mathcal{O}_{z^0}}$ idealul format de acești germeni.

În concluzie, am asociat fiecărui punct $z^0 \in \mathbb{C}^n$ inelul $\mathcal{O}_{z^0}$ al germenilor de funcții olomorfe în vecinătatea lui z^0 . Ulterior, în cap. III, § 3

*) Un inel (algebră) comutativ cu element unitate se numește *local* (resp. *algebră locală*), dacă mulțimea elementelor neinvertibile formează ideal. Se verifică imediat că acest ideal este unicul ideal maximal al inelului (algebrei) și că este ideal prim [59], [71].



vom înzestra mulțimea $\bigcup_{z \in C^n} O_z$ cu o structură de spațiu topologic, care va fi numit fascicolul germinilor de funcții olomorfe pe C^n . În cuprinsul §§ 12 și 13 însă vom aprofunda proprietățile inelului O_z . Izomorfismul menționat în observația 1 ne permite să restrângem considerațiile noastre la O_0 .

Convenim să notăm cu O_0' inelul germinilor de funcții olomorfe de $n-1$ variabile în punctul $0' \in C^{n-1}$, pe care îl vom presupune identificat cu subinelul lui O_0 , format de germeni acestor funcții considerate ca funcții de n variabile, germeni luați în punctul $0 \in C^n$.

§ 12. Teorema de pregătire a lui Weierstrass

Teorema datorită lui Weierstrass, care formează obiectul acestui paragraf constituie unul dintre instrumentele de demonstrație deosebit de importante în teoria funcțiilor analitice de mai multe variabile complexe. Ea este utilizată în raționamente inductive, deoarece permite — în anumite condiții — înlocuirea funcțiilor olomorfe de n variabile prin polinoame în raport cu una din variabile cu coeficienți olomorfi în celelalte $n-1$ variabile. Există diferite procedee de a demonstra această teoremă: se stabilește mai întâi rezultatul în cadrul seriilor de puteri formale și apoi se demonstrează convergența (a se vedea de ex. [50], cap. I, § 5), se folosește teoria integralei Cauchy, ([46], cap. II), sau se aplică metoda aproximărilor succesive ([47], cap. VI) corespunzătoare principiului contracției ([68], p. 104). În cele ce urmează vom expune acest al treilea procedeu *).

1. Definiția 1. O funcție $f(z)$ olomorfă în vecinătatea lui 0, dar care nu este identic nulă în nici o vecinătate a lui 0,

*) Teorema lui Weierstrass admite două formulări echivalente, teoremele 1 și 2 de mai jos. Vom demonstra mai întâi forma corespunzătoare împărțirii cu rest (teorema 1) care este numită adesea lema de pregătire a lui Weierstrass ([50], p. 46): ea apare mai târziu în literatura matematică (E. Goursat (1908), Gh. Vrăncianu (1926), 187), H. Späth (1929)). Apoi vom deduce forma inițială datorită lui Weierstrass (teorema 2), publicată în 1886. Aceste teoreme au fost extinse de B. Malgrange pentru funcții diferențiabile. Asupra rolului teoremei lui Weierstrass în matematici, a se vedea [25].

se numește *regulată în raport cu variabila* z_n , dacă $f(0', z_n)$ nu este identic nulă în nici o vecinătate a lui $z_n = 0$.

Propoziția 1. Dacă funcția $F(\zeta)$ este olomorfă într-o vecinătate a punctului $\zeta = 0$ din $\mathbb{C}^n$, $F(0) = 0$, dar $F(\zeta)$ nu este identic nulă în nici o vecinătate a lui $\zeta = 0$, printr-o transformare liniară $\zeta = T(z) : \zeta_k = \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} z_j$, $k = 1, \dots, n$, $\alpha_{kj} \in \mathbb{C}$, cu determinantul $|\alpha_{kj}| \neq 0$, se obține o funcție $f(z) = F[T(z)]$ regulată în raport cu variabila z_n^* .

1) Funcția $F(\zeta)$ este suma unei serii Taylor în jurul punctului $\zeta = 0$, pe care o vom scrie ca o serie de polinoame omogene

$$F(\zeta) = \sum_{m=p}^{\infty} P_m(\zeta), \quad (1)$$

unde $P_m(\zeta)$ este un polinom omogen de grad m sau este polinomul nul, iar p este ordinul dezvoltării Tayloriene a lui $F(\zeta)$ în jurul originii, deci $P_p(\zeta)$ este un polinom omogen de grad p .

2) Există un punct $(a_1, \dots, a_{n-1}, 1) \in \mathbb{C}^n$, astfel încît $P_p(a', 1) \neq 0$. Într-adevăr, există $\zeta_0^* \in \mathbb{C}^n$ cu $\zeta_0^* \neq 0$ și $P_p(\zeta_0^*) \neq 0$ (deoarece există un punct, deci un polidisc în care P_p nu se anulează) și putem lua $a_j = \zeta_j^0 / \zeta_n^0$, $j = 1, \dots, n-1$.

3) Fie T transformarea liniară, care duce $(0', 1)$ în $(a', 1)$:

$$\zeta_j = z_j + a_j z_n, \quad j = 1, \dots, n-1,$$

$$\zeta_n = z_n.$$

Notînd $\Pi_m(z) = P_m[T(z)]$, funcția $f(z) = F[T(z)]$, olomorfă în vecinătatea originii, are dezvoltarea în serie de polinoame omogene $f(z) = \sum_{m=p}^{\infty} \Pi_m(z)$. Prin urmare, $f(0', z_n) = \sum_{m=p}^{\infty} P_m(a', 1) z_n^m$ și cum $P_p(a', 1) \neq 0$, funcția $f(0', z_n)$ nu este identic nulă în nici o vecinătate a lui $z_n = 0$.

*) Remarcăm că T echivalează cu o schimbare de bază a lui $\mathbb{C}^n$ și realizează un automorfism al lui $\mathbb{C}^n \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$.



Afirmația se extinde imediat la cazul unui număr finit de funcții.

Propoziția 2. Dacă funcțiile $F_j(\zeta)$, $j = 1, \dots, s$, sint olo-morfe într-o vecinătate a lui $\zeta = 0$ din $\mathbb{C}^n$, $F_j(0) = 0$, dar $F_j(\zeta)$ nu sint identic nule în nici o vecinătate a lui $\zeta = 0$, printr-o schimbare de bază a lui $\mathbb{C}^n$, putem transforma aceste funcții în s funcții $f_j(z)$ regulate în raport cu z_n .

Intr-adevăr, este suficient să construim transformarea T de mai sus pentru funcția $F(\zeta) = F_1(\zeta) \dots F_s(\zeta)$ și să luăm $f_j = F_j \circ T$, $j = 1, \dots, s$.

2. Definiția 2. 1° Se numește pseudopolinom în variabila z_n o funcție $f(z)$ olomoră în vecinătatea originii, care poate fi scrisă sub forma

$$f(z) = \sum_{k=0}^p a_k(z') z_n^k, \quad (2)$$

cu $a_k(z')$ funcții olomorfe de z' în vecinătatea lui $0'$.

2° Se numește pseudopolinom Weierstrass sau pseudopolinom distins în variabila z_n de grad $p \geq 1$, un pseudopolinom în z_n :

$$f(z) = z_n^p + \sum_{k=0}^{p-1} a_k(z') z_n^k, \quad (3)$$

unde $a_k(z')$ sint funcții olomorfe în vecinătatea lui $z' = 0$ și $a_k(0') = 0$. Admitem că 1 este pseudopolinomul Weierstrass de grad 0.

Teorema 1. (Lema de pregătire a lui Weierstrass.) Fie $f(z)$ o funcție olomoră într-un poldisc $U_R(0)$, regulată în raport cu variabila z_n și fie p ordinul dezvoltării Taylor în jurul lui $z_n = 0$ a funcției $f(0', z_n)$. Atunci există un poldisc $U_R(0)$, cu $\bar{U}_R(0) \subset \subset U_R(0)$, astfel încît orice funcție $g(z)$ olomoră și mărginită în $U_R(0)$ admite în $U_R(0)$ o reprezentare de forma

$$g(z) = q(z) f(z) + r(z), \quad (4)$$

unde $q(z)$ și $r(z)$ sînt funcții olomorfe în $U_R(0)$, $r(z)$ este un pseudo-polinom în variabila z_n de grad $< p$, iar

$$\sup_{z \in U_R(0)} |q(z)| \leq C \sup_{z \in U_R(0)} |g(z)|, \quad (5)$$

C fiind o constantă independentă de $g(z)$. Reprezentarea (4) este unică. Coeficienții dezvoltărilor tayloriene în jurul originii ale funcțiilor $q(z)$ și $r(z)$ sînt combinații liniare finite de coeficienții dezvoltării tayloriene în jurul originii a funcției $g(z)$.

1) În demonstrația acestei teoreme ne vom baza pe următoarele observații generale:

1.1) Orice funcție $\varphi(z)$ olomorfă într-un polidisc $U_\rho(0)$ se poate scrie, oricare ar fi numărul natural p , în mod univoc sub forma

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) + z_n^p \varphi_2(z), \quad (6)$$

unde $\varphi_1(z)$ și $\varphi_2(z)$ sînt olomorfe în $U_\rho(0)$ și $\varphi_1(z)$ este un pseudo-polinom în z_n de grad $< p$.

Într-adevăr este suficient să fixăm z' arbitrar în $U_\rho(0')$ și să dezvoltăm funcția $\varphi(z', z_n)$ de variabila z_n în serie Taylor în jurul lui $z_n = 0$ *)

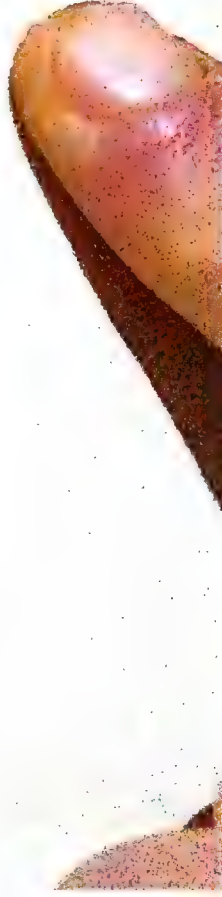
$$\varphi(z) = \sum_{j=0}^{p-1} a_j(z') z_n^j + z_n^p \sum_{j=p}^{\infty} a_j(z') z_n^{j-p}.$$

1.2) Dacă $|\varphi(z)| \leq M$ în $U_\rho(0)$, atunci

$$|\varphi_2(z)| \leq \frac{1+p}{\rho_n^p} M \quad (7)$$

în $U_\rho(0)$.

*) Aceasta echivalează cu gruparea termenilor din seria Taylor a funcției $\varphi(z)$ în jurul lui $z = 0$ după puterile lui z_n .



Intr-adevăr, inegalitățile Cauchy ne dau

$$|a_j(z')| \leq \frac{M}{\rho_n^j}, * \quad (8)$$

deci $|\varphi_1(z)| \leq pM$ și $|z_n^p \varphi_2(z)| \leq (1+p)M$.

Fixînd $z' \in U_{\rho'}(0')$ și luînd $\rho_n^* < \rho_n$ funcția de variabila $z_n, \varphi_2(z', z_n)$ este olomoră în $|z_n| \leq \rho_n^*$ și deci modulul ei își va atinge maximum pe $|z_n| = \rho_n^*$. Prin urmare în $U_{\rho', \rho_n^*}(0)$ putem scrie $|\varphi_2(z', z_n)| \leq (1+p)M/\rho_n^p$. Deoarece ρ_n^* poate fi luat oricît de aproape de ρ_n , obținem (7).

2) Vom alege acum polidiscul $U_R(0)$.

2.1) În acest scop, vom scrie funcția $f(z)$ sub forma (6)

$$f(z) = f_1(z) + z_n^p f_2(z), \quad (9)$$

unde $f_1(z)$ și $f_2(z)$ sînt olomorfe în polidiscul dat $U_{\bar{R}}(0), f_1(z)$ este un pseudopolinom în z_n de grad $< p, f_1(0', z_n) = 0$ și $f_2(0) \neq 0$. Deoarece $\bar{f}_2(0) \neq 0$, există $\bar{U}_R(0) \subset U_{\bar{R}}(0)$, astfel încît $f_1(z), f_2(z)$ și $f_2^{-1}(z)$ să fie olomorfe în $\bar{U}_R(0)$.

2.2) Vom înlocui problema propusă cu una echivalentă. Se cere să arătăm că există un polidisc $U_R(0)$ cu $\bar{U}_R(0) \subset U_{\bar{R}}(0)$ și astfel încît orice funcție g olomoră și mărginită în $U_R(0)$ să admită o reprezentare de forma (4). Luînd $U_R(0) \subset U_{\bar{R}}(0)$ și ținînd seama de (9), relația (4) devine

$$g(z) = s(z)[z_n^p + h(z)] + r(z) \quad (10)$$

cu

$$s(z) = q(z)f_2(z) \text{ și } h(z) = f_1(z)f_2^{-1}(z). \quad (11)$$

Invers, va fi suficient să alegem $U_R(0) \subset U_{\bar{R}}(0)$ și astfel încît orice funcție olomoră și mărginită în $U_R(0)$ să admită în $U_R(0)$ reprezentarea (10) cu $s(z)$ și $r(z)$ olomorfe, iar $r(z)$ pseudopolinom în z_n de grad $< p$, pentru ca din (10) și (11) să obținem (4).

) Inegalitățile lui Cauchy se aplică în $|z_n| \leq \rho_n^$ și lăsînd ρ_n^* să tindă la ρ_n rezultă (8).

2.3) În cele ce urmează, vom demonstra existența reprezentării (10) pentru funcții olomorfe și mărginite în $U_R(0)$, dacă $|h(z)| < c$ în $U_R(0)$, cu c o constantă convenabilă. Să remarcăm însă că $h(0', z_n) = 0$ în $|z_n| \leq R_n^*$, deci, ținînd seama de continuitatea uniformă a lui h în $\bar{U}_R(0)$, oricare ar fi $c > 0$, există numerele R_j , $0 < R_j < R_n^*$, $j = 1, \dots, n-1$, astfel încît $|h(z)| < c$ pentru $z \in U_R(0)$, dacă $R_n = R_n^*$.

În concluzie, $\bar{U}_R(0)$ fiind luat astfel încît f_1, f_2 și f_2^{-1} să fie olomorfe în $\bar{U}_R(0)$, alegem $R_n = R_n^*$. Raționamentul următor ne va permite să alegem un c convenabil, și anume $c < 2^{-1} (1+p)^{-1} R_n^p$, iar re-marca precedentă aplicată pentru acest c , ne va da razele R_j , $j = 1, \dots, n-1$. În acest mod vom determina polidiscul $U_R(0)$.

3) Fie $g(z)$ olomoră și mărginită în $U_R(0)$, și anume fie $|g(z)| \leq M$, pentru $z \in U_R(0)$. Vom stabili relația (10), prin metoda aproximărilor succesive:

3.1) Luăm $s_0(z) = 0$ și determinăm $s_k(z)$ și $r_k(z)$ olomorfe în $U_R(0)$, r_k pseudopolinom în z_n de grad $< p$, $k = 1, 2, \dots$, astfel încît

$$g(z) = z_n^p s_k(z) + h(z) s_{k-1}(z) + r_k(z), \quad (12)$$

aplicînd reprezentarea (6) funcției $g(z) - h(z) s_{k-1}(z)$.

3.2) Șirul s_k converge uniform în $U_R(0)$ la o funcție olomoră s : Din relația (12) rezultă

$$(s_{k+1} - s_k) z_n^p + (r_{k+1} - r_k) = -h(s_k - s_{k-1}). \quad (13)$$

Aplicînd în (13) inegalitatea (7), putem scrie

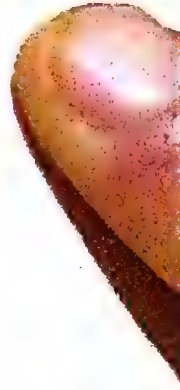
$$\|s_{k+1} - s_k\|_{U_R(0)} \leq (p+1) c R_n^{-p} \|s_k - s_{k-1}\|_{U_R(0)}.$$

Dacă alegem c , astfel încît $(p+1) c R_n^{-p} < 2^{-1}$, atunci

$$\|s_{k+1} - s_k\|_{U_R(0)} \leq 2^{-k} \|s_1\|_{U_R(0)}.$$

Aplicînd din nou inegalitatea (7) pentru $g = z_n^p s_1 + r_1$, deducem că $\|s_1\|_{U_R(0)} \leq (p+1) R_n^{-p} M$. Prin urmare

$$\|s_{k+1} - s_k\|_{U_R(0)} \leq 2^{-k} M_0,$$



unde M_0 este o constantă, independentă de k . Aceasta arată că seria $\sum_k (s_{k+1} - s_k)$ este convergentă normal în $U_R(0)$, deci șirul s_k converge uniform în $U_R(0)$ și $s = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k$ este o funcție olomorfă în $U_R(0)$.

3.3) Șirul $r_k = g - z_n^p s_k - h s_{k-1}$ converge uniform în $U_R(0)$ la o funcție olomorfă r , care este pseudopolinom în z_n de grad $< p$, deoarece
$$\frac{\partial^h r(z', 0)}{\partial z_n^h} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial^h r_k(z', 0)}{\partial z_n^h}.$$

3.4) Trecind la limită în relația (12) obținem reprezentarea (10): $g = s(z_n^p + h) + r$, cu s și r funcții olomorfe în $U_R(0)$ și r pseudopolinom în variabila z_n .

4) Pentru a stabili inegalitatea (5) vom scrie relația (10) sub forma $g - sh = sz_n^p + r$, de unde aplicind (7) avem

$$\|s\|_{U_R(0)} \leq (1 + p) R_n^{-p} [\|g\|_{U_R(0)} + c \|s\|_{U_R(0)}]$$

sau

$$\|s\|_{U_R(0)} \leq 2(1 + p) R_n^{-p} \|g\|_{U_R(0)}.$$

Prin urmare:

$$\|q\|_{U_R(0)} \leq \|f_2^{-1}\|_{U_R(0)} \cdot \|s\|_{U_R(0)} \leq C \|g\|_{U_R(0)},$$

cu $C = 2(1 + p) R_n^{-p} \|f_2^{-1}\|_{U_R(0)}$.

5) Reprezentarea (10) este unică.

În caz contrar, am avea o reprezentare $0 = s(z_n^p + h) + r$ cu s și r neidentice nule. Rezultatul de la punctul 1.2) aplicat pentru $-hs = sz_n^p + r$ ne dă însă în ipoteza $\|s\|_{U_R(0)} > 0$

$$\|s\|_{U_R(0)} \leq (1 + p) R_n^{-p} c \|s\|_{U_R(0)} < \frac{1}{2} \|s\|_{U_R(0)},$$

ceea ce este absurd. Prin urmare $s \equiv 0$, de unde $r \equiv 0$.

6) Definiția 3. Fie F o funcție olomorfă în vecinătatea unui punct z^0 din C^n . Vom numi *ordinul lui F în z^0* și îl vom însemna cu $\omega(F)$ ordinul seriei tayloriene $S_F(z_1 - z_1^0, \dots, z_n - z_n^0)$ ob-

ținute prin dezvoltarea funcției F în jurul lui z^0 . În cele ce urmează z^0 va fi 0 resp. $0'$.

6.1) Vom demonstra că $\omega(s_{k+1} - s_k)$ și $\omega(r_{k+1} - r_k)$ sînt $\geq k$, $k = 1, 2, \dots$

În acest scop vom folosi faptul că $h(0', z_n) = 0$ în $|z_n| < R_n$. Scriind dezvoltarea Taylor a lui h în jurul lui 0 sub forma

$$h(z) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j(z') z_n^j,$$

deducem că $\omega(h_j) \geq 1$, $j = 0, 1, \dots$. Totodată $\omega(h) \geq 1$. Fie de asemenea dezvoltarea tayloriană

$$s_{k+1} - s_k = \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j^{k+1}(z') z_n^j.$$

Vom lua ca ipoteză a inducției $\omega(\sigma_j^k) \geq k - 1$, oricare ar fi $j = 0, 1, \dots$. Relația (13) ne dă

$$\sigma_j^{k+1} = - \sum_{i=0}^{p+j} h_i \sigma_{p+j-i}^k,$$

de unde $\omega(\sigma_j^{k+1}) \geq k$, oricare ar fi $j = 0, 1, \dots$. Rezultă astfel că $\omega(s_{k+1} - s_k) \geq k$.

Din aceeași relație (13) sub forma $r_{k+1} - r_k = -h(s_k - s_{k-1}) - z_n^p(s_{k+1} - s_k)$, obținem apoi că $\omega(r_{k+1} - r_k) \geq k$.

6.2) Inegalitatea $\omega(s_{k+1} - s_k) \geq k$ implică $\omega(s_{k+m} - s_k) \geq k$, oricare ar fi numărul natural m . Prin urmare, dezvoltările tayloriene în jurul originii ale funcțiilor $s_k, s_{k+1}, \dots, s_{k+m}, \dots$ au același coeficient pentru fiecare termen de grad $< k$, care (după cum se deduce prin trecere la limită) este și coeficientul termenului corespunzător din dezvoltarea lui s . Un rezultat analog este valabil pentru r_k și r .

6.3) Procedăm prin inducție după k . Deoarece $g = z_n^p s_1 + r_1$, coeficienții dezvoltărilor tayloriene în jurul originii pentru s_1 și r_1 sînt chiar anumiți coeficienți ai dezvoltării lui g sau sînt egali cu 0. Presupunem că pentru s_k coeficienții sînt combinații liniare fi-

nite de coeficienții lui g . Evident coeficienții funcției $g - hs_k$ au aceeași proprietate, iar din relația (12), scrisă sub forma $g - hs_k = z_n^p s_{k+1} + r_{k+1}$, rezultă că atât coeficienții lui s_{k+1} cât și cei ai lui r_{k+1} sînt combinații liniare finite de coeficienții lui g .

Din 6.3), 6.2) și relația $q = sf_2^{-1}$, deducem aceeași proprietate pentru coeficienții dezvoltărilor funcțiilor, r , s și q .

Consecința 1. Există constantele C_1 și C_2 independente de $g(z)$, astfel încît $\|r\|_{U_R(0)} \leq C_1 \|g\|_{U_R(0)}$ și scriind $r(z) = \sum_{j=0}^{p-1} a_j(z') z_n^j$, cu $a_j(z')$ funcții olomorfe în $U_{R'}(0')$, $\|a_j\|_{U_R(0)} \leq C_2 \|g\|_{U_R(0)}$, $j = 0, \dots, p-1$.

Într-adevăr, $r(z) = g(z) - q(z)f(z)$ și putem lua $C_1 = 1 + C\|f\|_{U_R(0)}$. Folosind (8) obținem $C_2 = \max_j R_n^{-j} C_1$.

Observația 1. Condiția din enunțul teoremei ca funcția $g(z)$ să fie mărginită în $U_R(0)$ se poate înlătura. Într-adevăr, fie $U_R(0)$ ales ca la punctul 2.3), pentru $c < 2^{-1} (1+p)^{-1} R_n^n$, și $U_{R'}(0)$ un șir de polidiscuri, unde $R_k' \nearrow R_k$, $k=1, \dots, n$. Dacă g este olomorfă în $U_R(0)$, ea este olomorfă și mărginită în $U_{R'}(0)$, deci aplicînd teorema 1, funcția g se scrie sub forma (4) $g = q'f + r'$. Din unicitatea acestor reprezentări, deducem existența funcțiilor q și r , definite în $U_R(0)$ prin relațiile: dacă $z \in U_{R'}(0)$, $q(z) = q'(z)$ și $r(z) = r'(z)$. Aceste funcții q și r satisfac condițiile din teoremă, iar inegalitatea (5) este banală, dacă $\|g\|_{U_R(0)} = +\infty$.

Observația 2. Aplicația care asociază fiecărei funcții g olomorfe în $U_R(0)$ funcțiile q și r este liniară.

3. Teorema 2. (Teorema de pregătire a lui Weierstrass.) Dacă $f(z)$ este o funcție olomorfă într-un polidisc $U_{\tilde{R}}(0)$, regulată în raport cu z_n și dacă $p = \omega[f(0', z_n)]$ în $z_n = 0$, atunci există într-un polidisc $U_{\hat{R}}(0) \subset U_{\tilde{R}}(0)$, un pseudopolinom Weierstrass $W(z)$ de gradul p și o funcție $h(z)$ olomorfă cu $h(0) \neq 0$, astfel încît

$$f(z) = h(z) W(z). \quad (14)$$

Reprezentarea (14) este unică.

Să aplicăm teorema 1 funcției $g(z) = z_n^p$. În $U_R(0)$ avem

$$z_n^p = q(z) f(z) + \sum_{j=0}^{p-1} a_j(z') z_n^j.$$

Vom nota

$$W(z) = q(z) f(z) = z_n^p - \sum_{j=0}^{p-1} a_j(z') z_n^j. \quad (15)$$

Din (15) rezultă:

$$q(0', z_n) z_n^p \varphi(z_n) = z_n^p - \sum_{j=0}^{p-1} a_j(0') z_n^j,$$

cu $\varphi(z_n)$ olomorfă în $|z_n| < \tilde{R}_n$ și $\varphi(0) \neq 0$. Prin urmare $a_j(0') = 0$, $j = 0, 1, \dots, p-1$, și $q(0', z_n) \varphi(z_n) = 1$ în $|z_n| < R_n$. Ultima egalitate implică $q(0) \neq 0$, deci există $U_{\hat{R}}(0) \subset U_R(0)$, în care $q(z) \neq 0$. Funcția $h(z) = q^{-1}(z)$ olomorfă în $U_{\hat{R}}(0)$ și pseudopolinomul Weierstrass $W(z)$ satisfac relația (14). Unicitatea reprezentării (14) rezultă din unicitatea reprezentării (4).

Observația 3. Teoremele 1 și 2 ale lui Weierstrass se aplică în mod banal dacă funcția f este diferită de zero în origine ($p = 0$).

4. Rezultatele demonstrate mai sus se pot formula și în inelul O_0 . De exemplu teoremele 1 și 2 devin:

Fie $\underline{f} \in O_0$, $\underline{f} \in \chi_{O_0} - \{0\}$, reprezentat într-o vecinătate $U_{\tilde{R}}(0)$ a lui 0 printr-o funcție f , regulată în raport cu z_n și astfel încît $\omega[f(0', z_n)] = p$ în $z_n = 0$.

1) Oricare ar fi $\underline{g} \in O_0$, există $\underline{q}$ și $\underline{r}$ din O_0 , $\underline{r}$ reprezentat într-o vecinătate a lui 0 printr-un pseudopolinom în z_n de grad $< p$, astfel încît $\underline{g} = \underline{q}\underline{f} + \underline{r}$; $\underline{q}$ și $\underline{r}$ sînt unic determinate.

2) Există $\underline{W}$ și $\underline{h}$ din O_0 , $\underline{W}$ reprezentat într-o vecinătate a lui 0 printr-un pseudopolinom Weierstrass de grad p și $\underline{h}$ inversibil, astfel încît $\underline{f} = \underline{h}\underline{W}$. Germenii $\underline{h}$ și $\underline{W}$ sînt unic determinați.

§ 13. Proprietăți ale inelului $\mathcal{O}_0$

1. Ca o primă aplicație a teoremei de pregătire a lui Weierstrass vom aprofunda unele proprietăți de divizibilitate ale inelului $\mathcal{O}_0$.

Convenim ca elementele din diferite inele, pe care le vom considera în cele ce urmează, să fie nenule.

Fie Λ un inel comutativ cu element unitate notat 1. Se știe că a și b fiind două elemente din Λ , a divide pe b , dacă există $c \in \Lambda$ astfel încît $b = ac$; vom folosi notația $a \mid b$. Elementul $a \in \Lambda$ se numește unitate, dacă $a \mid 1$. Elementele a și b din Λ se numesc echivalente sau asociate, dacă $a = bh$, cu h unitate. Un element a este ireductibil, dacă a nu este o unitate și dacă din $b \mid a$ rezultă fie b unitate, fie b echivalent cu a .

În cazul $\Lambda = \mathcal{O}_0$, unitățile sînt germeni de funcții olomorfe în vecinătatea lui 0, nenule în 0. Doi germeni f și $g \in \mathcal{O}_0$ sînt echivalenți, cînd există o unitate h din $\mathcal{O}_0$, astfel încît $f = gh$.

Teorema 2 a lui Weierstrass (§ 12, nr. 3 și 4) se poate deci enunța și sub forma: Dacă $f \in \mathcal{X}_{\mathcal{O}_0}$ este reprezentat într-o vecinătate a lui 0 de o funcție f regulată în z_n , cu $\omega[f(0', z_n)] = p$, atunci f este echivalent cu W , germenele unui pseudopolinom Weierstrass în z_n de grad p .

Deoarece în cele ce urmează vom folosi mereu teorema de pregătire a lui Weierstrass, în care intervin pseudopolinoame, vom lucra și cu inelul $\mathcal{O}_{0'}[z_n]$. Orice pseudopolinom în z_n , $f(z) = \sum_{j=0}^p f_j(z') z_n^j$, f_j olomorfe într-o vecinătate a lui $0'$, determină un element în $\mathcal{O}_{0'}[z_n]$, $\sum_{j=0}^p f_j z_n^j$.

1.1. Vom stabili mai întîi două rezultate relative la pseudopolinoamele Weierstrass:

Propoziția 1. Fie F, G și W trei funcții olomorfe în vecinătatea lui $z = 0$, F pseudopolinom în z_n , W pseudopolinom Weierstrass în z_n . Dacă $F = GW$, atunci și G este pseudopolinom în z_n .

Deoarece W este un pseudopolinom monic în z_n (i.e. coeficientul termenului de gradul cel mai înalt în z_n din W este 1), se poate efectua în $O_0[z_n]$ împărțirea elementului corespunzător lui F cu cel corespunzător lui W și deci, trecind din nou de la germeni la reprezentanți, într-o vecinătate a lui $z = 0$ avem $F = QW + R$, cu Q și R pseudopolinoame în z_n și $\text{grad } R < \text{grad } W$. Cum prin ipoteză $F = GW$, iar reprezentarea din teorema 1 (lema de pregătire) a lui Weierstrass (§ 12, nr. 2) este unică, deducem $G = Q$ (și $R = 0$).

Această propoziție nu este adevărată, dacă W nu este pseudopolinom Weierstrass. De exemplu, dacă W este un pseudopolinom în z_n de grad > 0 , dar $W(0) \neq 0$, atunci $1 = GW$ cu G serie de puteri și nu pseudopolinom în z_n .

Propoziția 2. Fie F, G, W pseudopolinoame în z_n într-o vecinătate a lui $z = 0$, W pseudopolinom Weierstrass. Dacă $W = FG$, atunci F și G sînt pseudopolinoame Weierstrass, abstracție făcînd de un factor, funcție olomorfă în vecinătatea lui $z' = 0'$, care nu se anulează în $z' = 0'$.

Să notăm $W(z) = z_n^p + \sum_{j=0}^{p-1} w_j(z') z_n^j$, $F(z) = \sum_{k=0}^q f_k(z') z_n^k$ și $G(z) = \sum_{l=0}^r g_l(z') z_n^l$, cu w_j, f_k și g_l funcții olomorfe în vecinătatea lui $0'$, $w_j(0') = 0$, iar f_q și g_r neidentice nule în nici o vecinătate a lui $0'$. Evident $p = r + q$, $1 = f_q(z') g_r(z')$, iar $z_n^p = F(0', z_n) G(0', z_n)$, de unde $f_k(0') = g_l(0') = 0$ pentru $k = 0, \dots, q-1$ resp. $l = 0, \dots, r-1$ și $f_q(0') \neq 0$, $g_r(0') \neq 0$. Prin urmare $F = f_q F_1$ și $G = g_r G_1$, cu F_1 și G_1 pseudopolinoame Weierstrass.

1.2. Se numește *inel factorial* un domeniu de integritate Λ , în care orice element neunitate se poate scrie sub forma de produs de factori ireductibili, în mod unic pînă la unități și la ordinea factorilor. Se știe că un inel este factorial atunci și numai atunci cînd:

a) Dacă $\{f_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, este un șir de elemente din Λ , și dacă $f_{k+1} \mid f_k$, există un rang k_0 , astfel încît pentru $k \geq k_0$, $f_{k+1} = u_k f_k$, cu u_k unitate din Λ și

b) Dacă f ireductibil din Λ divide gh , g și h din Λ , atunci $f \mid g$ sau $f \mid h$ ([49], cap. IV, § 3, [71], [88], vol. I, p. 21).

Teorema 1. O_0 este inel factorial.

Vom verifica proprietățile a) și b) din criteriul de mai sus. Pentru simplificarea scrierii vom nota în același mod funcția olomorfă în vecinătatea lui $z = 0$, germenele corespunzător din O_0 și dacă această funcție este un pseudopolinom în z_n , polinomul corespunzător din $O_0[z_n]$.

a) Fie $\{f_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, un șir de germeni $f_k \in O_0$ cu $f_{k+1} \mid f_k$. Dacă pentru un indice k_0 , f_{k_0} este o unitate, toate elementele f_{k_0+m} , m număr natural, sînt unități, iar șirul satisface a). Vom presupune deci că $f_k \in \chi_{O_0}$, oricare ar fi k .

Mai mult, fără a restrînge generalitatea putem presupune funcțiile $f_k(z)$ regulate în raport cu z_n . Într-adevăr, dacă $f_1(z)$ nu este regulată în raport cu z_n , printr-o transformare liniară convenabilă T , funcția $f_1 \circ T$ devine regulată în raport cu z_n^* (propoziția 1, § 12, nr. 1). Din relația $f_1 = g_1 f_2$, deducem $f_1 \circ T = (g_1 \circ T)(f_2 \circ T)$ și cum $(f_1 \circ T)(0', z_n)$ nu este identic nulă în nici o vecinătate a lui $z_n = 0$, $f_2 \circ T$ are aceeași proprietate. Prin urmare șirul $f_k \circ T$ este format din funcții regulate în z_n . Însă dacă proprietatea a) este verificată de șirul $\{f_k \circ T\}$, ea este evident verificată și de șirul $\{f_k\}$.

Procedînd prin reducere la absurd, vom admite că șirul dat conține o infinitate de germeni neechivalenți și extrăgînd eventual un subșir pe care îl vom nota tot $\{f_k\}$, vom presupune că oricare ar fi k , $f_k = g_k f_{k+1}$ cu $g_k \in \chi_{O_0}$.

Conform teoremei 2 a lui Weierstrass, $f_k = u_k F_k$, cu u_k unitate și F_k germene de pseudopolinom Weierstrass. Cum $F_k = u_k^{-1} g_k u_{k+1} F_{k+1} = G_k F_{k+1}$, trecînd la reprezentanți și aplicînd propozițiile 1 și 2, deducem că G_k este un pseudopolinom Weierstrass în z_n . Fiindcă $G_k \neq 1$ (altfel $g_k = u_k u_{k+1}^{-1} \notin \chi_{O_0}$), putem scrie pentru pseudopolinoamele F_k : $\text{grad } F_1 > \text{grad } F_2 > \dots$ șir strict descrescător infinit, de numere naturale, ceea ce este absurd.

*) Am păstrat notația z și pentru noile variabile.

b) Vom demonstra b) prin inducție după numărul n al variabilelor. Presupunem că O_0 este inel factorial. Atunci conform teoremei lui Gauss, $O_0[z_n]$ este și el un inel factorial*). Cu ajutorul teoremei de pregătire a lui Weierstrass, vom arăta că O_0 satisface b). Cum O_0 satisface a), va rezulta că este factorial. Raționamentul se va aplica pentru $n \geq 1$, în cazul $n = 1$ inelele $O_0 = \mathbb{C}$ și $\mathbb{C}[z_1]$ fiind factoriale.

Fie f ireductibil din O_0 și $f \mid gh$ cu $g, h \in O_0$.

Dacă g sau h ar fi o unitate, f ar divide pe h resp. pe g . Putem presupune că $f, g, h \in \chi_{O_0}$ și, efectuînd eventual o transformare liniară, că sînt reprezentate de funcții regulate în z_n . Fie F, G, H pseudopolinoame Weierstrass echivalente cu f, g, h conform teoremei 2 de pregătire a lui Weierstrass. Deducem că $F \mid GH$. Mai mult, conform propoziției 1, $F \mid GH$ în $O_0[z_n]$.

Dar F este ireductibil în $O_0[z_n]$. În cazul contrar $F = \varphi\psi$ cu φ și ψ pseudopolinoame în z_n . După propoziția 2, $\varphi = h\varphi_1$ și $\psi = h^{-1}\psi_1$ cu φ_1 și ψ_1 pseudopolinoame Weierstrass în z_n și h unitate în O_0 . Din faptul că $f = u\varphi_1\psi_1$ cu u unitate în O_0 , rezultă că unul dintre factorii φ_1 și ψ_1 , fie de exemplu φ_1 , este o unitate în O_0 . Deoarece φ_1 este pseudopolinom Weierstrass și $\varphi_1(0) \neq 0$, rezultă $\varphi_1 = 1$ sau φ unitate în $O_0[z_n]$.

Fiindcă $O_0[z_n]$ este inel factorial, $F \mid GH$ implică $F \mid G$ sau $F \mid H$. În primul caz $f \mid g$, în al doilea $f \mid h$.

1.3. Într-un inel factorial Λ există c.m.m.d.c. a două elemente f și g , unic determinat pînă la o unitate și pe care îl vom nota (f, g) . Elementele f și g se numesc *relativ prime*, dacă (f, g) este o unitate.

Deoarece în cadrul teoremei următoare vom considera germeni în puncte diferite din $\mathbb{C}^n$, vom nota germenele unei funcții f olomorfe în z cu f_z , dar vom păstra în cazul cînd f este pseudopolinom în variabila z_n notația f și pentru polinomul corespunzător din $O_0[z_n]$.

Teorema 2. Fie f și g două funcții olomorfe într-o vecinătate a lui 0, cu germeni f_0 și g_0 relativ primi în O_0 .

*) Teorema lui Gauss afirmă că inelul polinomial $\Lambda[X]$ al unui inel factorial Λ este de asemenea un inel factorial ([49], cap. IV, § 4, [71], [88], vol. I, p. 32).

1) Există o vecinătate $U_R(0)$ a lui 0, astfel încît pentru $z \in U_R(0)$, germenii f_z și g_z sînt relativ primi în O_z .

2) Dacă $f(0) = g(0) = 0$, oricare ar fi $c \in \mathbb{C}$ și polidiscul $U_r(0)$, există $z \in U_r(0)$ astfel încît $g(z) \neq 0$ și $\frac{f(z)}{g(z)} = c$.

1.1) Dacă unul dintre germenii dați f_0 și g_0 , de exemplu f_0 , este o unitate, *) atunci există un polidisc $U_R(0)$, în care $f(z) \neq 0$, deci f_z este unitate în O_z . Prin urmare, f_z și g_z sînt relativ primi, pentru $z \in U_R(0)$.

1.2) Rămîne să analizăm acum cazul $f(0) = g(0) = 0$. Efectuînd eventual o transformare liniară, putem presupune funcțiile f și g regulate în raport cu z_n (propoziția 2, § 12, nr. 1). Mai mult, aplicînd teorema 2 de pregătire putem înlocui f și g cu pseudopolinoame Weierstrass în z_n , de grade p resp. q , pe care le vom nota tot f resp. g .

1.3) Elementele determinate de f și g în $O_0[z_n]$ sînt relativ prime în $O_0[z_n]$ **).

Într-adevăr, dacă d , φ și γ sînt pseudopolinoame în z_n , astfel încît $f = d\varphi$ și $g = d\gamma$ într-o vecinătate a lui 0, atunci $d(0) \neq 0$, (fiindcă d_0 este o unitate în O_0). După propoziția 2, $d = \tilde{h}\tilde{d}$ în vecinătatea lui 0, unde $\tilde{d}$ este un pseudopolinom Weierstrass în z_n , iar $h(z')$ o funcție olomorfă, cu $h(0') \neq 0$. Din relația $\tilde{d}(0) \neq 0$, deducem ca mai sus $d = h$, prin urmare d este o unitate în $O_0[z_n]$.

1.4) Vom nota cu $\mathcal{M}_{0'}$, corpul cît al domeniului de integritate $O_{0'}$. Atunci f și g sînt relativ prime și în $\mathcal{M}_{0'}[z_n]$.

Fie din nou $f = d\varphi$ și $g = d\gamma$ cu $d, \varphi, \gamma \in \mathcal{M}_{0'}[z_n]$. Aducînd la același numitor coeficienții din d , avem $d = \frac{d^*}{n_d}$ cu $d^* \in O_{0'}[z_n]$ și $n_d \in O_{0'}$. Dînd în factor c_d — c.m.m.d.c. al coeficienților lui d^* —,

*) Pentru $n = 1$, dacă f_0 și g_0 sînt relativ primi, cel puțin unul dintre acești germeni este o unitate. Cazul 2) nu are loc.

**) Reamintim: conform convenției făcute mai sus notăm cu aceeași literă pseudopolinomul în z_n , cu coeficienți funcții olomorfe de z' în vecinătatea lui $0'$, și polinomul corespunzător din $O_{0'}[z_n]$, în particular funcțiile olomorfe de z' în vecinătatea lui $0'$ și germenii lor din $O_{0'}$.

putem scrie $d = \frac{c_d d^{**}}{n_d}$, cu $c_d \in O_0$ și $d^{**} \in O_0[z_n]$ polinom primitiv (i.e. polinom pentru care c.m.m.d.c. al coeficienților este o unitate în O_0). Analog, $\varphi = \frac{c_\varphi \varphi^{**}}{n_\varphi}$ și $\gamma = \frac{c_\gamma \gamma^{**}}{n_\gamma}$, cu φ^{**} și γ^{**} polinoame primitive din $O_0[z_n]$.

Lema lui Gauss afirmă că c.m.m.d.c. al coeficienților produsului a două polinoame din $\Lambda[X]$, Λ inel factorial, este produsul c.m.m.d.c. ai coeficienților acestor polinoame; în particular produsul a două polinoame primitive este un polinom primitiv ([49], cap. IV, § 4, [88], vol. I, p. 32).

Prin urmare, din relația $n_d n_\varphi f = c_d c_\varphi d^{**} \varphi^{**}$, ținând seama că f și $d^{**} \varphi^{**}$ sînt primitive, deducem $n_d n_\varphi u = c_d c_\varphi$, cu u unitate din O_0 și $f = d^{**} \varphi^{**} u$.

Analog $g = d^{**} \gamma^{**} \tilde{u}$, cu $\tilde{u}$ unitate în O_0 .

Aceste relații arată că d^{**} este divizor comun al lui f și g în $O_0[z_n]$, deci d^{**} este o unitate în $O_0[z_n]$, conform punctului 1.3). Rezultă imediat că d este unitatea în $\mathcal{M}_0[z_n]$.

1.5) Se știe că un *domeniu euclidian* este un domeniu de integritate Λ , înzestrat cu o aplicație $\Phi: \Lambda \rightarrow \mathbb{Z}$, astfel încît

α) Oricare ar fi a și $b \in \Lambda$, dacă $a|b$ atunci $\Phi(a) \leq \Phi(b)$.

β) Oricare ar fi a și $b \in \Lambda$, există q și $r \in \Lambda$ cu $a = qb + r$ și $\Phi(r) < \Phi(b)$.

Un domeniu euclidian este inel factorial. Dacă Λ este un domeniu euclidian, oricare ar fi a și $b \in \Lambda$, $(a, b) = aa^* + bb^*$, cu a^* și $b^* \in \Lambda$. Pentru orice corp k , inelul $k[X]$ este domeniu euclidian, funcția Φ fiind gradul polinomului ([49], cap. IV, [88], vol. I, p. 22, 24 și 32).

Deoarece $\mathcal{M}_0[z_n]$ este domeniu euclidian, din 1. 4) rezultă că există f^* și $g^* \in \mathcal{M}_0[z_n]$, astfel încît $ff^* + gg^* = 1$. Aducînd la același numitor coeficienții, obținem:

$$f\tilde{f} + g\tilde{g} = h, \quad (1)$$

cu $\tilde{f}$ și $\tilde{g} \in O_0[z_n]$ și $h \in O_0$, h diferit de germenele nul din O_0 . Putem alege $U_R(0)$, astfel încît: I) $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ și h să fie reprezentați în $U_R(0)$ prin funcțiile olomorfe $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ resp. h , $\tilde{f}$ și $\tilde{g}$ pseudopolinoame

în z_n , iar h funcție olomorfă de z' și II) aceste funcții și pseudo-polinoamele Weierstrass f, g să satisfacă (1) în $U_R(0)$.

1.6) Fie $z^0 \in U_R(0)$. Translația $T : z = z^0 + \omega$ determină un izomorfism între inelele O_{z^0} și O_0 , care asociază fiecărui germene a_{z^0} de reprezentant $a(z)$ germenele A_0 al funcției $A(\omega) = a(z^0 + \omega)$ în punctul $\omega = 0$. Prin acest izomorfism, germenului f_{z^0} îi corespunde F_0 , unde $F(\omega) = \omega_n^p + \sum_{j=0}^{p-1} F_j(\omega') \omega_n^j$, funcție regulată în raport cu ω_n . Analog lui g_{z^0} îi corespunde G_0 , iar lui h_{z^0} germenele H_0 , unde H depinde numai de ω' .

Să presupunem că $d_{z^0} \mid f_{z^0}$ și g_{z^0} . Germenele D_0 corespunzător lui d_{z^0} în O_0 va divide F_0 și G_0 . Reprezentantul său D este funcție regulată în ω_n , deoarece divide F , care are această proprietate. Prin urmare, după teorema 2 de pregătire, D_0 este echivalent cu $\tilde{D}_0$ în O_0 , unde $\tilde{D}$ este pseudopolinom Weierstrass. Din relația (1), care se păstrează când înlocuim funcțiile respective prin germenii lor în z^0 , deducem aplicînd izomorfismul T că $\tilde{D}_0 \mid H_0$. Conform propoziției 1 și faptului că H este pseudopolinom în ω_n de grad 0, rezultă că $\tilde{D} = 1$. În concluzie D_0 este unitate în O_0 , deci d_{z^0} este unitate în O_{z^0} , ceea ce demonstrează afirmația 1).

2.1) Vom arăta mai întîi că putem să ne limităm la cazul $c = 0$. Într-adevăr, funcțiile $f - cg$ și g sînt nule în 0, iar germenii lor în 0 sînt de asemenea relativ primi. Dacă în orice vecinătate $U_r(0)$, există un punct z^0 , cu $g(z^0) \neq 0$ și $f(z^0) - cg(z^0) = 0$, atunci $f(z^0)/g(z^0) = c$.

2.2) Să considerăm deci cazul $c = 0$.

Dacă afirmația 2) nu ar fi adevărată pentru $c = 0$, atunci ar exista o vecinătate $U_r(0)$, astfel încît oricare ar fi $z \in U_r(0)$, din $f(z) = 0$ ar rezulta $g(z) = 0$. Restrîngînd eventual vecinătatea $U_r(0)$, putem presupune că f și g sînt pseudopolinoame Weierstrass și satisfac relația (1) în $U_r(0)$ (conform 1.2) și 1.5)). Cum $f(0', z_n) = z_n^{p_1}$ oricare ar fi $\rho_n \in (0, r_n)$, funcția $f(z) \neq 0$ pe compactul $K = \{0'\} \times \gamma$, $\gamma = \{z_n \mid |z_n| = \rho_n\}$. Din continuitatea funcției f deducem că există polidiscul $U_{\rho_j}(0')$ cu $0 < \rho_j < r_j$, $j = 1, \dots, n-1$, astfel

încît $f(z) \neq 0$ pe $U_{\rho_n}(0') \times \gamma$. Să fixăm z' arbitrar în $U_{\rho_n}(0')$. Vom arăta că există z_n în $|z_n| < \rho_n$, astfel încît $f(z) = 0$. Într-adevăr, funcția $f(z', z_n)$ este olomorfă în $|z_n| < r_n$, diferită de zero pe γ , deci după teorema variației argumentului, numărul $N_0(z')$ al zerourilor acestei funcții din $|z_n| < \rho_n$ este

$$N_0(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\partial f(z', t)}{\partial z_n} \frac{dt}{f(z', t)}.$$

După propoziția 1, § 4, nr.2, $N_0(z')$ este o funcție continuă în $U_{\rho_n}(0')$ și, cum $N_0(z')$ ia numai valori întregi, o constantă. Dar $f(0', z_n) = z_n^p$, deci $N_0(z') = p \geq 1$.

În concluzie, oricare ar fi $z' \in U_{\rho_n}(0')$, $f(z', z_n)$ se anulează în p puncte din $|z_n| < \rho_n$. Cum punctele z corespunzătoare aparțin lui $U_r(0)$, din ipoteză deducem că ele anulează și funcția g . Relația (1) implică atunci $h(z') = 0$ în $U_{\rho_n}(0')$, ceea ce este absurd.

Observația 1. Ultima parte a demonstrației stabilește și următorul rezultat: Fie $f(z)$ o funcție olomorfă în $U_r(0)$ și $\omega[f(0', z_n)] = p$ în $z_n = 0$, $1 \leq p < +\infty$. Oricare ar fi $\rho_n < r_n$ există $U_{\rho_n}(0')$, astfel încît dacă $z' \in U_{\rho_n}(0')$ funcția $f(z', z_n)$ are p zerouri în $|z_n| < \rho_n$.

2. Un inel Λ comutativ cu unitatea se numește *noetherian*, dacă orice ideal $\mathcal{J} \subset \Lambda$ este finit generat. i.e. dacă există un număr finit de elemente $f_1, \dots, f_q \in \mathcal{J}$, astfel încît orice element $f \in \mathcal{J}$ este de forma $f = \sum_{j=1}^q a_j f_j$, cu $a_j \in \Lambda$ sau dacă există o aplicație liniară surjectivă $\Lambda^q \rightarrow \mathcal{J}$. Analog, un Λ -modul se numește *noetherian*, dacă orice submodul al său este finit generat.

Vom demonstra acum că inelul O_0 este noetherian. În acest scop vom folosi

Propoziția 3. *Dacă inelul Λ este noetherian, orice submodul M al Λ -modulului Λ^p , p număr natural, este finit generat.*

Această propoziție se demonstrează prin inducție după p .

Dacă $p = 1$, M este ideal în Λ , deci prin ipoteză este finit generat. Presupunem propoziția demonstrată pentru $p-1$.

Să notăm cu $\pi_1 = \text{pr}_1 (\Lambda^p \rightarrow \Lambda)$, care asociază fiecărui element $(c_1, \dots, c_p) \in \Lambda^p$ elementul $c_1 \in \Lambda$. Aplicația π_1 este omomorfism de Λ -module, deci $\pi_1(M) = M_1$ este ideal în Λ și, prin ipoteză, finit generat. Există atunci un număr finit de elemente $m^1, \dots, m^t \in M$, astfel încît elementele $m_1^j = \pi_1(m^j)$, $j=1, \dots, t$, generează M_1 peste Λ , i.e. oricare ar fi $m \in M$, avem $\pi_1(m) = m_1 = \sum_{j=1}^t a_j m_1^j$ cu $a_j \in \Lambda$, sau $m - \sum_{j=1}^t a_j m^j = m_0$ cu $\pi_1(m_0) = 0$.

Să însemnăm cu $M_0 = \{m_0 \mid m_0 \in M, \pi_1(m_0) = 0\} = M \cap \ker \pi_1$. Omomorfismul $\Lambda^p \rightarrow \Lambda^{p-1}$, care asociază fiecărui element $(c_1, c_2, \dots, c_p) \in \Lambda^p$ elementul $(c_2, \dots, c_p) \in \Lambda^{p-1}$, induce un izomorfism τ asupra lui $\ker \pi_1$, în particular aplică izomorf M_0 pe un submodul $\tilde{M}$ al lui Λ^{p-1} . Conform ipotezei inducției $\tilde{M}$ este finit generat. Există deci un număr finit de elemente $\tilde{m}^1, \dots, \tilde{m}^s \in \tilde{M}$, care generează $\tilde{M}$. Elementele $\tau^{-1}(\tilde{m}^k) = m_0^k \in M_0$ generează M_0 . Prin urmare, orice element $m \in M$ va fi de forma $m = \sum_{j=1}^t a_j m^j + \sum_{k=1}^s b_k m_0^k$, cu a_j și $b_k \in \Lambda$.

Teorema 3. *Inelul $\mathcal{O}_0$ este noetherian.*

Teorema va fi demonstrată prin inducție după numărul n al variabilelor. Ca de obicei $\mathbb{C}^{n-1}$ va fi identificat cu subspațiul din $\mathbb{C}^n$ format de elementele $z = (z', 0)$, iar $\mathcal{O}_0'$ cu subinelul lui $\mathcal{O}_0$ format de germenii funcțiilor de $n-1$ variabile, olomorfe în vecinătatea lui $0'$, interpretate ca funcții de n variabile, olomorfe în vecinătatea lui 0 . De asemenea, deoarece germenii vor fi mereu luați în origine, îi vom nota cu aceeași literă ca și funcția care îi reprezintă dar subliniată, suprimînd indicele 0 sau $0'$.

1) Dacă $n = 1$, orice ideal $\mathcal{J}$ din $\mathcal{O}_0$ este principal. Într-adevăr, idealele $\mathcal{O}_0$ resp. $\{0\}$ sînt generate de 1 resp. 0 . Vom arăta că orice alt ideal $\mathcal{J}$ este generat de germenii în origine al unei puteri a lui z_1 . Fiecărui element $\underline{f} \in \mathcal{J}$ îi vom asocia $\omega(\underline{f})$ ordinul seriei de puteri a cărei sumă reprezintă $\underline{f}$ în vecinătatea lui $z_1 = 0$. Cum $\underline{f} \in \mathcal{J} \subset \mathcal{O}_0$, $\omega(\underline{f}) \geq 1$. Există deci $\underline{f} \in \mathcal{J}$, cu $\omega(\underline{f}) = \min_{g \in \mathcal{J}} \omega(g) = p$.

Atunci germenele lui z_1^p aparține lui $\mathcal{J}$, deoarece $f = z_1^p h$ cu h inversibil sau $z_1^p = h^{-1} f$. Pe de altă parte, oricare ar fi $\underline{g} \in \mathcal{J}$, avem $\omega(g) = q \geq p$, deci putem scrie $g = z_1^p g_1$, cu $\underline{g}_1 \in O_0$. Prin urmare $\mathcal{J} = (z_1^p)$.

2) Să presupunem că inelul O_0 este noetherian.

Fie $\mathcal{J}$ un ideal din O_0 , $\mathcal{J} \neq O_0$ și $\{0\}$. Să luăm un germene $\underline{f}$ din $\mathcal{J}$, diferit de germenele nul.

2.1) Dacă funcția f ce reprezintă $\underline{f}$ în vecinătatea originii este regulată în variabila z_n și $\omega[f(0', z_n)] = p$, orice $\underline{g} \in \mathcal{J}$ se scrie după teorema 1 de pregătire, $g = q\underline{f} + \underline{r}$, cu $\underline{r} \in \mathcal{J}$, germenele unui pseudopolinom în z_n de grad $< p$.

Mulțimea $M^* = \{\underline{r} \mid \underline{r} \in \mathcal{J}, \underline{r} \text{ germene de pseudopolinom în } z_n \text{ de grad } < p\}$ este un O_0 -modul.

Aplicația $\theta: M^* \rightarrow O_0^p$, care asociază germenului $\underline{r} \in M^*$, reprezentat de $r = \sum_{j=0}^{p-1} a_j(z') z_n^j$, elementul $\underline{m} = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{p-1})$ cu $\underline{a}_j$ germenele din O_0 al funcției $a_j(z')$, este independentă de reprezentanții aleși pentru germeni și este un izomorfism al lui M^* pe $\theta(M^*) = M'$. Conform ipotezei inducției și propoziției 3, submodulul M' al lui O_0^p , este finit generat. Deci există elementele $\underline{m}^1, \dots, \underline{m}^t$ în M' , care generează M' peste O_0 , iar M^* este generat de $\underline{r}^j = \bar{\theta}^{-1}(\underline{m}^j)$, $j = 1, \dots, t$. Prin urmare, $\underline{f}$ și $\underline{r}^1, \dots, \underline{r}^t$ generează $\mathcal{J}$ peste O_0 .

2.2) Dacă f nu este regulată în z_n , după propoziția 1 din § 12, nr.1, există o transformare liniară omogenă T , astfel încît $F = f \circ T$ să fie regulată în z_n . Aplicînd T funcțiilor ce reprezintă germeni din $\mathcal{J}$, obținem un ideal $\tilde{\mathcal{J}}$ din O_0 , $\tilde{\mathcal{J}} \neq O_0$ și $\tilde{\mathcal{J}} \neq \{0\}$, care conține germenele $\underline{F}$. Conform punctului 2.1), $\tilde{\mathcal{J}}$ este finit generat peste O_0 .

Dacă $F^1, \dots, F^s$ sînt generatorii lui $\tilde{\mathcal{J}}$, germenii $\underline{f}^1, \dots, \underline{f}^s$ de reprezentanți $\underline{f}^j = F^j \circ T^{-1}$, $j = 1, \dots, s$, generează $\mathcal{J}$,

3. Am arătat mai sus că orice submodul M al O_0 -modulului O_0^p este finit generat. Acest rezultat se extinde la o vecinătate a originii. Să remarcăm că oricare ar fi vecinătatea U a lui 0, elementele

$f \in O(U)^p$, pentru care $\underline{f} \in M$, formează un $O(\dot{U})$ -submodul al lui $O(U)^p$, pe care îl vom nota cu $M(U)$. Conform teoremei 3 și propoziției 3, modulul M este finit generat. Vom demonstra

Teorema 4. *Dacă M este un submodul al lui O_0^p și dacă germenii $\underline{f}_k \in O_0^p$, $k = 1, \dots, s$, generează M , atunci pentru orice vecinătate U a originii, în care $\underline{f}_k$ sînt reprezentați de $f_k \in O(U)^p$, există — după o eventuală schimbare de coordonate în $\mathbb{C}^n$ ce invariază originea — un polidisc închis $\bar{U}_R(0) \subset U$ și o constantă K , astfel încît fiecare $g \in M[U_R(0)]$ se poate scrie sub forma*

$$g = \sum_{k=1}^s h_k \underline{f}_k, \quad (2)$$

cu $h_k \in O[U_R(0)]$ și $\|h_k\|_{U_R(0)} \leq K \|g\|_{U_R(0)}$.

Date un număr finit de submodule din diferite O_0^p , există un polidisc $\bar{U}_R(0)$, în care rezultatul este valabil pentru toate aceste submodule.

Polidiscul $U_R(0)$ se poate înlocui cu orice alt polidisc $U_p(0) \subset U_R(0)$.

Demonstrăm teorema prin inducție după n , adaptînd procedee folosite la nr.2. Pentru $n = 0$, rezultatul este banal. Vom presupune deci teorema adevărată pentru $n - 1$ variabile și o vom stabili pentru n variabile, folosind și aici o inducție după p .

1) Cazul $p = 1$. Submodulele sînt ideale și procedăm ca la teorema 3.

Alegem după propoziția 1 din § 12, nr. 1 un sistem de coordonate z în O , astfel încît $\underline{f}_1$ să fie regulată în z_n .

Aplicînd teorema 1 de pregătire a lui Weierstrass în formularea din § 12, nr. 4,1) deducem că orice $\underline{g} \in M$ se scrie

$$\underline{g} = \underline{q} \underline{f}_1 + \underline{r},$$

cu $\underline{q}$ și $\underline{r} \in O_0$ și $\underline{r}$ reprezentat de un pseudopolinom în variabila z_n ,

$r(z) = \sum_{j=0}^{p-1} a_j(z') z_n^j$, într-o vecinătate a lui O (p este gradul pseudopolinomului Weierstrass W al cărui germene $\underline{W}$ este echivalent cu $\underline{f}_1$ în O_0).

Evident $r \in M$, iar mulțimea tuturor germenilor din M , reprezentați prin pseudopolinoame în z_n de grad $< p$ în vecinătatea lui 0, formează un O_0 -modul $M^* \subset M$.

Prin aplicația $\theta: r \rightarrow m = (\underline{a}_0, \dots, \underline{a}_{p-1})$ din demonstrația teoremei 3, M^* este izomorf cu $\overline{M'}$, un submodul al lui O_0^p . El are un număr finit de generatori $\underline{m}^l$, $l = 1, \dots, t$, cărorale corespund prin θ^{-1} în M^* elementele $\underline{r}^l$. Conform ipotezei, aceste elemente se scriu sub forma

$$\underline{r}^l = \sum_{k=1}^s \underline{a}_{lk} \underline{f}_k$$

cu $\underline{a}_{lk} \in O_0$.

Vom alege o vecinătate a originii $V \subset U$, astfel încît în această vecinătate $\underline{r}^l$ și $\underline{a}_{lk}$ să fie reprezentați prin pseudopolinoame r^l resp. funcții olomorfe a_{lk} și să avem relațiile

$$r^l = \sum_{k=1}^s a_{lk} f_k. \quad (3)$$

Conform ipotezei inducției aplicate lui $M' \subset O_0^p$ (după o eventuală transformare liniară în $\mathbb{C}^{n-1}$), există un polidisc $U_{\overline{R}}(0)$, cu $\overline{U}_{\overline{R}}(0) \subset V$, astfel încît dacă $U_R(0) \subset U_{\overline{R}}(0)$, orice $m \in M' [U_R(0')]$ admite în $U_R(0')$ reprezentarea

$$m = \sum_{l=1}^t b_l m^l \quad (4)$$

cu $b_l(z')$ olomorfe în $U_R(0')$ și $\|b_l\|_{U_R(0)} \leq K' \|m\|_{U_R(0)}$, pentru o constantă convenabilă K' . (Norma a fost luată pe $U_R(0)$, deoarece în cele ce urmează funcțiile b_l resp. componentele a_j^l , $j = 0, \dots, p-1$ ale elementelor m^l vor fi interpretate ca funcții de n variabile. Evident $\|m^l\|_{U_R(0)} = \|m^l\|_{U_R(0')} = \max_j \|a_j^l\|_{U_R(0')}$).

În virtutea teoremei 1 de pregătire a lui Weierstrass, consecinței 1 și observației 1, § 12, nr. 2, există un polidisc $U_{\hat{R}}(0)$, cu $\overline{U}_{\hat{R}}(0) \subset$

$\subset U_{\tilde{R}}(0)$, astfel încît dacă $U_R(0) \subset U_{\hat{R}}(0)$, orice funcție g olomoră în $U_R(0)$, în particular orice funcție $g \in M[U_R(0)]$, se scrie în $U_R(0)$ sub forma

$$g = qf_1 + r, \quad (5)$$

cu q și r olomorfe în $U_R(0)$, $r(z) = \sum_{j=0}^{p-1} a_j(z')z_n^j$ și $\|q\|_{U_R(0)} \leq C\|g\|_{U_R(0)}$, $\|a_j\|_{U_R(0)} \leq C_2\|g\|_{U_R(0)}$, unde C și C_2 sînt constante convenabil alese.

Deoarece $m = (a_0, \dots, a_{p-1}) \in M'[U_R(0)]$, din (4) rezultă

$$r = \sum_{l=1}^l b_l r^l, \quad (6)$$

deci ținînd seama de (5), (6) și (3) avem în $U_R(0)$

$$g = \sum_{k=1}^s h_k f_k,$$

cu $h_1 = q + \sum_{l=1}^l b_l a_{1l}$ și $h_k = \sum_{l=1}^l b_l a_{lk}$, pentru $k = 2, \dots, s$.

Totodată $\|h_k\|_{U_R(0)} \leq K\|g\|_{U_R(0)}$, $k=1, \dots, s$, unde $K = C + t K' C_2 C_3$ și $C_3 = \max_{l,k} \|a_{lk}\|_{U_R(0)}$.

Teorema este adevărată și pentru orice $U_{\rho}(0) \subset U_R(0)$.

Dacă am fi considerat un număr finit de ideale ale lui O_0 , alegerea coordonatelor putea fi făcută simultan conform propoziției 2 din § 12, nr.1 (pentru z_n) și a ipotezei inducției (pentru $z_1, \dots, z_{n-1}$), iar V , $U_{\tilde{R}}(0)$ și $U_{\hat{R}}(0)$, deci $U_R(0)$ se puteau lua, astfel încît să fie convenabile pentru toate idealele.

2) *Cazul $p > 1$, oarecare*: Presupunem teorema adevărată pentru orice mulțime finită de submodule de diferite module $O_0^{\tilde{p}}$, $\tilde{p} < p$ și o vom demonstra pentru o mulțime finită arbitrară de submodule de diferite module $O_0^{\tilde{p}}$, $\tilde{p} \leq p$.

Fie $M \subset O_0^p$ generat de $\underline{f}_k = (f_k^1, \dots, f_k^p)$, $k=1, \dots, s$. Procedăm ca în demonstrația propoziției 3, pentru $\Lambda = O_0$. Considerăm proiecția

$\pi_1: O_0^p \rightarrow O_0$, care asociază lui $(f^1, \dots, f^p)$ prima componentă f^1 . Idealul $M_1 = \pi_1(M) \subset O_0$ este generat de $\underline{f}_k, k=1, \dots, s$. Modulul $M_0 = \ker \pi_1 \cap M$ este izomorf prin aplicație $\tau: (0, f^2, \dots, f^p) \rightarrow (f^2, \dots, f^p)$ cu un submodul $\tilde{M}$ al lui O_0^{p-1} . Fie $\tilde{d}_l, l=1, \dots, t$, generatorii lui $\tilde{M}$; atunci $\underline{d}_l = \tau^{-1}(\tilde{d}_l)$ generează modulul M_0 . Conform ipotezei, M este generat de $\underline{f}_k$, deci

$$\underline{d}_l = \sum_{k=1}^s \underline{a}_{lk} \underline{f}_k, \quad l = 1, \dots, t, \quad \underline{a}_{lk} \in O_0.$$

Alegem o vecinătate a originii $V \subset U$, în care $\underline{d}_l$ și $\underline{a}_{lk}$ sînt reprezentați de d_l și a_{lk} și în care

$$d_l = \sum_{k=1}^s a_{lk} f_k, \quad l = 1, \dots, t. \quad (7)$$

Ipoteza inducției se aplică modulelor M_1 și $\tilde{M}$: Există un sistem de coordonate convenabil în origine și un polidisc $\bar{U}_R(0) \subset V$, astfel încît pentru orice $U_R(0) \subset \bar{U}_R(0)$, teorema este valabilă pentru $M_1[U_R(0)]$ și f_k^1 resp. pentru $\tilde{M}[U_R(0)]$ și $\tilde{d}_l$. Izomorfismul τ se prelungește la un izomorfism, care va fi notat din nou cu τ , între $M_0[U_R(0)]$ și $\tilde{M}[U_R(0)]$: $(0, f^2, \dots, f^p) \rightarrow (f^2, \dots, f^p)$.

Ținînd seama de acest izomorfism rezultatele se transpun pentru $M_0[U_R(0)]$ și d_l .

Prin urmare, aplicînd teorema în cazul modulului $M_1[U_R(0)]$ obținem pentru fiecare $g \in M[U_R(0)]$ reprezentarea

$$g = \sum_{k=1}^s a_k f_k + f^*, \quad (8)$$

cu $a_k \in O[U_R(0)]$ și $f^* \in M_0[U_R(0)]$, unde $\|a_k\|_{U_R(0)} \leq K_1 \|g^1\|_{U_R(0)} \leq K_1 \|g\|_{U_R(0)}$, pentru o constantă K_1 convenabil aleasă.

Aplicind acum teorema pentru $\widetilde{M}[U_R(0)]$ și trecind cu ajutorul lui τ la $M[U_R(0)]$, putem scrie

$$f^* = \sum_{l=1}^l b_l d_l \quad (9)$$

cu $b_l \in O[U_R(0)]$ și $\|b_l\|_{U_R(0)} \leq K_2 \|f^*\|_{U_R(0)}$, pentru o constantă K_2 convenabilă.

Din (8), (9) și (7) rezultă (2) cu

$$h_k = a_k + \sum_{l=1}^l b_l a_{lk}.$$

Prin urmare, $\|h_k\|_{U_R(0)} \leq K \|g\|_{U_R(0)}$, unde $K = K_1 + K_2 (1 + sK_1K_3) + K_4$, $K_3 = \max_k \|f_k\|_{U_R(0)}$, și $K_4 = \max_{l,k} \|a_{lk}\|_{U_R(0)}$.

Demonstrația se extinde imediat la cazul unui număr finit de module din diferite O_0^p , $\widetilde{p} \leq p$.

Teorema 5. Fie M un submodul al lui O_0^p și U o vecinătate a originii. Dacă $g \in O(U)^p$ este aproximat uniform pe compactele din U de $g_v \in O(U)^{p,*})$ iar $\underline{g}_v \in M$, atunci $\underline{g} \in M$.

Conform teoremei 3, modulul M este generat de un număr finit de germeni $\underline{f}_k \in O_0^p$, $k = 1, \dots, s$. Fie $\widetilde{U}$ o vecinătate a originii, $\widetilde{U} \subset U$, în care $\underline{f}_k$ sînt reprezentați de $f_k \in O(\widetilde{U})^p$. Aplicind teorema 4, deducem că există un polidisc închis $\overline{U}_R(0) \subset \widetilde{U}$, astfel încît în $U_R(0)$ să avem $g_v = \sum_{k=1}^s h_{kv} g_k$, cu $h_{kv} \in O[U_R(0)]$ și $\|h_{kv}\|_{U_R(0)} < K \|g_v\|_{U_R(0)}$, unde K este o anumită constantă. Fiindcă $\|g - g_v\|_{U_R(0)} \rightarrow 0$, cînd $v \rightarrow \infty$, există o constantă K_0 , astfel încît $\|h_{kv}\|_{U_R(0)} < K_0$. După teorema lui Montel (teorema 2, cap. I, § 6, nr. 3),

*) Convergența are loc în spațiul topologic $O(U)^p$ (observația 1, cap. I, § 7, nr. 4).

pentru fiecare indice k , din șirul $\{h_{kv}\}_v$, putem extrage un subșir, pe care pentru prescurtare convenim să-l notăm tot $\{h_{kv}\}_v$, astfel încît să existe $h_k = \lim_{v \rightarrow \infty} h_{kv} \in \mathcal{O}[U_R(0)]$, convergența fiind uniformă

pe orice compact din $U_R(0)$. Deducem că $g = \sum_{k=1}^s h_k f_k \in \mathcal{O}[U_R(0)]^s$, deci $\underline{g} \in M$.

II CONSIDERAȚII AUXILIARE

§ 1. Fascicole

În studiul funcțiilor analitice de mai multe variabile complexe teoria fasciculelor constituie un important instrument de cercetare, cu ajutorul căruia probleme clasice au putut fi formulate și rezolvate. Vom prezenta unele noțiuni de bază din această teorie, plecând de la definiția fascicolului ca spațiu de acoperire*).

1. Acoperiri. Definiția 1. Un triplet (Y, π, X) , unde Y și X sînt spații topologice, iar $\pi: Y \rightarrow X$ este o aplicație continuă, formează o *acoperire* a lui X prin Y după π . Numim X spațiul de bază, Y spațiul de acoperire, iar π proiecția acoperirii**).

Definiția 2. Fie (Y, π, X) și (Y_1, π_1, X) două acoperiri ale lui X . Se numește *morfism* al acoperirii (Y, π, X) în (Y_1, π_1, X) orice aplicație continuă $g: Y \rightarrow Y_1$, care face comutativă diagrama

$$\begin{array}{ccc} \bar{Y} & \xrightarrow{g} & Y_1 \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi_1 \\ & X & \end{array}$$

(i.e. pentru care $\pi_1 \circ g = \pi$).¹

*) Relativ la definiția fasciculelor și la alte aspecte ale teoriei, a se vedea [13], [37], [51].

**) În studiul acoperirilor, suprafețele riemanniene au constituit un model. Opera lui S. Stoilow ([82] sau [81] vol. II) a jucat un rol deosebit de important în această privință. Remarcăm că nomenclatura acestei teorii nu este unitară. Inițial în loc de acoperire se vorbea de spațiu de acoperire (de ex. în [82], S. Stoilow numea spațiul Y tipul topologic al acoperirii, iar p transformarea de acoperire); în seminarile Cartan perechea (Y, p) este numită spațiu decupat de bază X .

Acoperirile unui spațiu topologic X ca obiecte și morfismele definite mai sus formează o categorie, [13]. Izomorfismul în această categorie, numit uneori și omeomorfism, este dat de morfismele care sînt și omeomorfisme ale spațiilor de acoperire:

Definiția 3. Acoperirile (Y, π, X) și (Y_1, π_1, X) sînt *izomorfe*, dacă există un omeomorfism $g: Y \rightarrow Y_1$, pentru care $\pi = \pi_1 \circ g$.

Definiția 4. Fie (Y, π, X) o acoperire. Dacă $a \in \pi(Y)$ mulțimea $\pi^{-1}(a)$ va fi notată Y_a și numită *fibra* acoperirii în punctul a . Nu vom considera cazul $a \in X - \pi(Y)$ cînd $Y_a = \emptyset$.

Un morfism de acoperiri g duce o fibră într-o fibră și vom nota restricția sa la fibra acoperirii peste punctul a cu $g_a: Y_a \rightarrow Y_{1a}$, $a \in X$.

Dacă $W \subset X$, mulțimea $\pi^{-1}(W)$ va fi notată Y_W . În ipoteza $W \cap \pi(Y) \neq \emptyset$, organizînd W și Y_W ca spații topologice cu topologia indusă, obținem acoperirea $(Y_W, \pi|_{Y_W}, W)$ numită *restricția acoperirii* (Y, π, X) la W .

Un morfism $g: (Y, \pi, X) \rightarrow (Y_1, \pi_1, X)$ determină prin restricție un morfism $(Y_W, \pi|_{Y_W}, W) \rightarrow (Y_{1W}, \pi_1|_{Y_{1W}}, W)$ pe care îl vom nota $g|_W$ sau g_W .

Definiția 5. Se numește *secțiune* a acoperirii (Y, π, X) peste mulțimea $W \subset \pi(Y)$ o aplicație continuă $s: W \rightarrow Y$ astfel încît $\pi \circ s = 1_W$.

Vom nota cu $\Gamma(W, Y)$ mulțimea secțiunilor lui (Y, π, X) peste W .

Uneori se înțelege prin secțiune și mulțimea $s(W) \subset Y$.

O secțiune peste X se numește și secțiune globală.

Propoziția 1. Secțiunea $s: W \rightarrow Y$ este un omeomorfism al lui W pe $s(W)$, $s = (\pi|_{s(W)})^{-1}$.

2. Etalare. **Definiția 6.** Fie X și Y două spații topologice. O aplicație $f: Y \rightarrow X$ se numește *omeomorfism local*, dacă oricare ar fi punctul $a \in Y$, există o vecinătate deschisă U a lui a în Y , astfel încît $f|_U$ să fie un omeomorfism al lui U pe o vecinătate deschisă $f(U)$ a lui $x = f(a)$ din X .

Convenim să notăm omeomorfismul invers $(f|_U)^{-1} : f(U) \rightarrow U$ cu f^{-1} , atunci cînd nu este necesar să precizăm vecinătatea U cu ajutorul căreia este definit, ci doar faptul că este un invers local al lui f în jurul punctului a .

Definiția 7. O acoperire (Y, π, X) , în care π este omeomorfism local va fi numită *etalare* a lui Y în X , iar proiecția π va fi de asemenea numită etalare a lui Y în X .

Fără a insista asupra etalărilor, vom dezvolta cazul particular deosebit de important al fasciculelor *).

3. Fascicule. Fie $\mathcal{F}$ și X spații topologice.

Definiția 8. Se numește *fascicol* pe X o *etalare* $(\mathcal{F}, f, X)$, unde f este un omeomorfism local *surjectiv*.

Prescurtat fascicolul $(\mathcal{F}, f, X)$ va fi notat $\mathcal{F}$. Atunci cînd va fi necesar proiecția fascicolului $\mathcal{F}$, pe care pentru simplificare am însemnat-o cu f , va fi notată $\pi_{\mathcal{F}}$.

Fasciculele pe X formează de asemenea o categorie, morfismele — în particular izomorfismele — fiind cele din categoria acoperirilor.

Propoziția 2. Un morfism de fascicule este omeomorfism local.

Fie $(\mathcal{F}, f, X)$ și $(\mathcal{F}_1, f_1, X)$ două fascicule peste X și $h: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_1$ un morfism, deci o aplicație continuă astfel încît $f_1 \circ h = f$. Oricare ar fi $a \in \mathcal{F}$, notînd $a_1 = h(a) \in \mathcal{F}_1$, există deschisele U din $\mathcal{F}$ și U_1 din $\mathcal{F}_1$ cu următoarele proprietăți: $a \in U$ și $a_1 \in U_1$; $f|_U$ și $f_1|_{U_1}$ sînt omeomorfisme; $f(U) = f_1(U_1)$ este un deschis din X . Deoarece h este o aplicație continuă, există un deschis W din $\mathcal{F}$, astfel încît $a \in W \subset U$ și $h(W) \subset U_1$. Atunci $h|_W$ este un omeomorfism al lui W pe deschisul $W_1 = (f_1|_{U_1})^{-1}[f(W)]$ din $\mathcal{F}_1$.

4. Iată acum cîteva *proprietăți ale secțiunilor unui fascicol*.

Propoziția 3. Deoarece proiecția unui fascicol $\mathcal{F}$ este un omeomorfism local, oricare ar fi punctul $a \in \mathcal{F}$, există un

*) Noțiunea de fascicol a fost introdusă de J. Leray, [60]. Remarcăm că multe dintre rezultatele stabilite mai jos pentru fascicule sînt valabile și pentru etalări.

deschis $V \subset X$, care conține punctul $x = f(a)$ și o secțiune $s: V \rightarrow \underline{\mathcal{F}}$ cu $s(x) = a$.

Într-adevăr dacă U este o vecinătate deschisă a lui a , astfel încît $f|_U$ să fie un omeomorfism și $f(U)$ un deschis din X , putem lua $V = f(U)$ și $s = (f|_U)^{-1}$.

Consecința 1. Topologia indusă de un fascicol pe orice fibră a sa este discretă.

Propoziția 4. Fie $\underline{\mathcal{F}}$ un fascicol și s o secțiune în $\underline{\mathcal{F}}$ peste un deschis $D \subset X$; atunci $s(D)$ este un deschis în $\underline{\mathcal{F}}$. Prin urmare, s este aplicație deschisă.

1) Să notăm cu D o submulțime oarecare a lui X și cu s o secțiune din $\Gamma(D, \underline{\mathcal{F}})$. Dacă $y \in s(D)$ și $x = f(y)$, atunci $s(x) = y$. Prin ipoteză există o vecinătate deschisă U a lui y în $\underline{\mathcal{F}}$, astfel încît $f|_U$ să fie un omeomorfism al lui U pe deschisul $f(U)$ din X . Deoarece s este continuă, există o vecinătate deschisă V a lui x în X , pentru care $s(V \cap D) \subset U \cap s(D)$. Se verifică imediat că $s = (f|_U)^{-1}$ pe $V \cap D$.

2) Să adăugăm ipoteza: D deschis în X . Atunci $V \cap D$ este un deschis în $f(U)$ și aplicînd omeomorfismul $(f|_U)^{-1}$, deducem că $s(V \cap D)$ este un deschis în U , deci în $\underline{\mathcal{F}}$. Dar $y \in s(V \cap D) \subset s(D)$. Deci $s(D)$ este deschis în $\underline{\mathcal{F}}$.

Consecința 2. Fie D o submulțime din X . Două secțiuni $s_k \in \Gamma(D, \underline{\mathcal{F}})$, $k = 1, 2$, care coincid într-un punct $x \in D$, coincid într-o vecinătate a lui x relativă la D .

Conform demonstrației precedente, există vecinătatea deschisă U a lui $y = s_k(x)$ în $\underline{\mathcal{F}}$ și vecinătatea deschisă V_k a lui x în X , astfel încît $s_k = (f|_U)^{-1}$ pe $V_k \cap D$. Prin urmare $s_1 = s_2$ pe $V_1 \cap V_2 \cap D$.

Consecința 3. Fie $\underline{\mathcal{F}}$ și $\underline{\mathcal{Q}}$ două fascicule pe X și $u: \underline{\mathcal{F}} \rightarrow \underline{\mathcal{Q}}$ un morfism surjectiv. Oricare ar fi deschisul U din X , punctul $x \in U$ și secțiunea $s \in \Gamma(U, \underline{\mathcal{Q}})$, există un deschis V în X și o secțiune $\sigma \in \Gamma(V, \underline{\mathcal{F}})$ astfel încît: $x \in V \subset U$ și $s|_V = u \circ \sigma$.

Într-adevăr, dacă $s(x) = u(a)$, $a \in \mathcal{F}$, există un deschis W în X , care conține x și o secțiune $S \in \Gamma(\overline{W}, \mathcal{F})$ cu $S(x) = a$ (observația 1), deci după consecința 1 un deschis V cu proprietățile din enunț pentru $\sigma = S|_V$.

Propoziția 5. Dacă fascicolul $\mathcal{F}$ este un spațiu Hausdorff, W este un închis în X și $s \in \Gamma(W, \mathcal{F})$, atunci $s(W)$ este un închis în $\mathcal{F}$. Prin urmare o secțiune s în $\mathcal{F}$ peste un închis W din X este o aplicație închisă.

Vom demonstra că $y \in \overline{s(W)}$ implică $y \in s(W)$. Deoarece f este continuă, dacă $y \in \overline{s(W)}$, $x = f(y) \in \overline{W} = W$. Fie $\tilde{y} = s(x)$. Vom arăta că $\tilde{y} = y$. Presupunem prin reducere la absurd că $\tilde{y} \neq y$. Atunci există vecinătățile deschise U și $\tilde{U}$ ale punctelor y resp. $\tilde{y}$ în $\mathcal{F}$ și vecinătatea deschisă V a lui x în X , cu următoarele proprietăți: 1) $U \cap \tilde{U} = \emptyset$, 2) $f|_V$ este un omeomorfism al lui U pe V și $f|_{\tilde{U}}$ este un omeomorfism al lui $\tilde{U}$ pe V , 3) $(f|_{\tilde{U}})^{-1} = s$ pe $V \cap W$. Deoarece $y \in \overline{s(W)}$, există $z \in U \cap s(W)$, deci $f(z) = t \in V \cap W$ și $s(t) = z$. Dar $s(t) = (f|_{\tilde{U}})^{-1}(t) \in \tilde{U}$, deci $z \in U \cap \tilde{U}$, ceea ce este absurd.

Propoziția 6. Fie $\mathcal{F}$ un fascicol pe X , $\{U_i\}_{i \in I}$ o acoperire a lui X și $s_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{F})$, $i \in I$, o familie de secțiuni în $\mathcal{F}$, avînd proprietatea că $s_i = s_j$ pe U_{ij} , oricare ar fi indicii i și j din I , pentru care $U_{ij} \neq \emptyset$. Aplicația $s: X \rightarrow \mathcal{F}$, definită prin relațiile $s = s_i$ pe U_i , $i \in I$, este o secțiune din $\Gamma(X, \mathcal{F})$ și s este unica secțiune în $\mathcal{F}$ pe X , care pe fiecare U_i coincide cu s_i *).

Vom demonstra acum

Propoziția 7. Fie $\mathcal{F}$ un fascicol pe X și $\{M_i\}_{i \in I}$ o acoperire închisă, local finită a lui X^{**}). Date secțiunile $s_i \in \Gamma(M_i, \mathcal{F})$,

*) Propoziția 6 corespunde celor două axiome ale fasciculelor, cînd acestea sînt definite plecînd de la prefascicole, [13], p. 44.

**) O acoperire a unui spațiu topologic X se numește local finită, dacă orice punct din X are o vecinătate, care intersectează numai un număr finit de mulțimi ale acoperirii.

$i \in I$, astfel încît $s_i = s_j$ în M_{ij} , oricare ar fi i și j din I , $M_{ij} \neq \emptyset$, există o unică secțiune $s \in \Gamma(X, \underline{\mathcal{F}})$, care coincide cu s_i pe M_i , $i \in I$.

Să notăm cu s aplicația $X \rightarrow \underline{\mathcal{F}}$, definită luind $s = s_i$ pe M_i , pentru fiecare $i \in I$. Evident $f \circ s = 1_X$. Rămîne să arătăm că s este continuă. În acest scop vom arăta că pentru fiecare punct $x \in X$ există o vecinătate U_x^* și o secțiune $t \in \Gamma(U_x^*, \underline{\mathcal{F}})$, astfel încît $t = s$ pe U_x^* .

Să remarcăm că prin ipoteză există o vecinătate U_x^1 a lui x , care intersectează numai un număr finit de mulțimi M_i , fie $M_{i_1}, \dots, M_{i_r}$. Deoarece $M_i = \bar{M}_i$, dacă $x \notin M_i$, există o vecinătate u_x^i astfel încît $u_x^i \cap M_i = \emptyset$. Să presupunem (renumerotînd eventual convenabil indicii i_k) că $i_1, \dots, i_{r_1}$ sînt indicii i pentru care $x \in M_i$. Dacă $r_1 < r$ să alegem o vecinătate U_x^2 a lui x , inclusă în $U_x^1 \cap$

$\cap \left(\bigcap_{k=r_1+1}^r u_x^{i_k} \right)$, iar dacă $r_1 = r$ să notăm $U_x^2 = U_x^1$. Am obținut astfel o vecinătate a lui x cu proprietatea că $U_x^2 \cap M_i \neq \emptyset$ atunci și numai atunci cînd $x \in M_i$. Conform propoziției 3 există o vecinătate U_x^3 a lui x , pe care o putem presupune inclusă în U_x^2 , și $t \in \Gamma(U_x^3, \underline{\mathcal{F}})$ astfel încît $t(x) = s(x)$. Pe $M_{i_k} \cap U_x^3$, ($k = 1, \dots, r_1$), avem două secțiuni, restricția lui t și cea a lui s_{i_k} , care coincid în punctul x . Deci, aplicînd repetat consecința 2 pentru fiecare indice i_k , putem alege o vecinătate U_x^* a lui x , $U_x^* \subset U_x^3$ astfel încît $t = s_{i_k}$ pe $U_x^* \cap M_{i_k}$. Dar atunci $t = s$ pe $\bigcup_{k=1}^{r_1} (U_x^* \cap M_{i_k}) = U_x^*$, ceea ce trebuia demonstrat.

5. În categoria fasciculelor peste un spațiu topologic X se pot studia diferite obiecte. Vom prezenta însă aici numai noțiunile strict necesare pentru dezvoltările ulterioare.

Definiția 9. Se numește *subfascicol* al fascicolului $(\underline{\mathcal{F}}, f, X)$ un fascicol $(\underline{\mathcal{F}}_1, f_1, X)$, în care $\underline{\mathcal{F}}_1$ este o submulțime a lui $\underline{\mathcal{F}}$ înzestrată cu topologia indusă și $f_1 = f|_{\underline{\mathcal{F}}_1}$.

Propoziția 8. Fie $(\underline{\mathcal{F}}, f, X)$ un fascicol și $\underline{\mathcal{F}}_1 \subset \underline{\mathcal{F}}$. Condiția necesară și suficientă ca acoperirea $(\underline{\mathcal{F}}_1, f|_{\underline{\mathcal{F}}_1}, X)$ să constituie un subfascicol al lui $\underline{\mathcal{F}}$ este ca $\underline{\mathcal{F}}_1$ să fie un deschis din $\underline{\mathcal{F}}$ și $f(\underline{\mathcal{F}}_1) = X$.

Vom verifica numai necesitatea condiției: Dacă $a \in \underline{\mathcal{F}}_1$, există prin ipoteză deschisele U și U_1 din $\underline{\mathcal{F}}$, care conțin punctul a și astfel încît $f|_U$ este un omeomorfism al lui U pe $f(U)$, $f|_{U_1 \cap \underline{\mathcal{F}}_1}$ este un omeomorfism al lui $U_1 \cap \underline{\mathcal{F}}_1$ pe $f(U_1 \cap \underline{\mathcal{F}}_1)$, iar $f(U)$ și $f(U_1 \cap \underline{\mathcal{F}}_1)$ sînt deschise din X . Deoarece $U \cap (U_1 \cap \underline{\mathcal{F}}_1)$ este deschis în $U_1 \cap \underline{\mathcal{F}}_1$, rezultă că $f(U \cap U_1 \cap \underline{\mathcal{F}}_1)$ este deschis în $f(U_1 \cap \underline{\mathcal{F}}_1)$, deci în $f(U)$. Aplicînd $(f|_U)^{-1}$, obținem: $U \cap U_1 \cap \underline{\mathcal{F}}_1$ deschis în U , deci în $\underline{\mathcal{F}}$ și $a \in \overset{\circ}{\underline{\mathcal{F}}}_1$.

Definiția 10. Fie $\underline{\mathcal{F}}_1$ și $\underline{\mathcal{F}}_2$ două subfascicole ale fascicolului $\underline{\mathcal{F}}$. Dacă $f(\underline{\mathcal{F}}_1 \cap \underline{\mathcal{F}}_2) = X$, fascicolul $(\underline{\mathcal{F}}_1 \cap \underline{\mathcal{F}}_2, f|_{\underline{\mathcal{F}}_1 \cap \underline{\mathcal{F}}_2}, X)$ se numește *intersecția* fasciculelor $\underline{\mathcal{F}}_1$ și $\underline{\mathcal{F}}_2$.

Definiția 11. Fie $\lambda: \underline{\mathcal{F}} \rightarrow \underline{\mathcal{Q}}$ un morfism al fascicolului $(\underline{\mathcal{F}}, f, X)$ în fascicolul $(\underline{\mathcal{Q}}, g, X)$. Atunci subfascicolul lui $\underline{\mathcal{Q}}$ dat de $(\lambda(\underline{\mathcal{F}}), g|_{\lambda(\underline{\mathcal{F}})}, X)$ se numește *imaginea* lui $\underline{\mathcal{F}}$ prin λ și se notează $\text{im}\lambda$.

Definiția 12. Fie $(\underline{\mathcal{F}}, f, X)$ un fascicol și R o relație de echivalență definită pe $\underline{\mathcal{F}}$, cu următoarele proprietăți:

- 1) Două elemente echivalente aparțin aceleiași fibre a lui $\underline{\mathcal{F}}$.
- 2) Oricare ar fi elementele a și b din $\underline{\mathcal{F}}$ echivalente, există vecinătăți v_a , respectiv v_b ale acestor elemente, între care R stabilește o bijecție, $f|_{v_a}$ și $f|_{v_b}$ sînt omeomorfisme și bijecția: $v_a \rightarrow v_b$, determinată de R , coincide cu $(f|_{v_b})^{-1} \circ f|_{v_a}$. Să notăm cu $\underline{\mathcal{F}}/R$ spațiul topologic cît și cu φ aplicația canonică: $\underline{\mathcal{F}} \rightarrow \underline{\mathcal{F}}/R$, care asociază fiecărui element $a \in \underline{\mathcal{F}}$ clasa $\dot{a} = \{b \in \underline{\mathcal{F}} \mid b \sim_R a\}$. Aplicația $\Phi: \dot{a} \rightarrow x = f(a)$ este un omeomorfism local, surjectiv. Fascicolul $(\underline{\mathcal{F}}/R, \Phi, X)$ se numește

fascicol cît al fascicolului $\underline{f}$ relativ la relația R . Aplicația φ este un morfism de fascicole. *)

Definiția 13. Fie $(\underline{f}, f, X)$ un fascicol și W o submulțime a lui X . Fascicolul $(f^{-1}(W), f|_{f^{-1}(W)}, W)$ se numește *fascicolul indus de $\underline{f}$ pe W sau restricția lui $\underline{f}$ la W* și va fi notat $\underline{f}|_W$ sau $\underline{f}_W$.

Dacă $u : \underline{f} \rightarrow \underline{g}$ este un morfism între două fascicole pe X și $W \subset X$, vom nota (ca și în cazul acoperirilor) cu $u|_W$ sau u_W morfismul: $\underline{f}_W \rightarrow \underline{g}_W$ corespunzător.

Definiția 14. Fie M o mulțime, pe care o înzestrăm cu topologia discretă. Fascicolul $(X \times M, \text{pr}_1, X)$ se numește *fascicolul constant de fibră M* . Orice fascicol pe X izomorf cu un fascicol constant pe X se numește *trivial*.

Definiția 15. Fie $(\underline{f}, f, X)$ și $(\underline{g}, g, X)$ două fascicole peste același spațiu topologic X . Vom nota $\underline{f} \vee \underline{g} = \{(a, b) \in \underline{f} \times \underline{g} \mid f(a) = g(b)\}$ și vom organiza această mulțime ca spațiu topologic cu topologia indusă de topologia produs din $\underline{f} \times \underline{g}$. Un sistem fundamental de vecinătăți pentru un element $(a, b) \in \underline{f} \vee \underline{g}$ este dat de mulțimile $v_{(a,b)} = (v_a \times v_b) \cap (\underline{f} \vee \underline{g}) = v_a \vee v_b$, unde v_a și v_b sînt vecinătăți ale punctelor a resp. b în $\underline{f}$ resp. în $\underline{g}$.

Aplicația $\varphi : \underline{f} \vee \underline{g} \rightarrow X$, care asociază lui $(a, b) \in \underline{f} \vee \underline{g}$ punctul $x = f(a) = g(b) \in X$, este surjectivă și omeomorfism local, după cum rezultă prin verificare directă, ținînd seama de următoarele observații:

Observația 1. Pentru orice $\mathcal{M} \subset \underline{f}$ și $\mathcal{N} \subset \underline{g}$ are loc relația: $\varphi(\mathcal{M} \vee \mathcal{N}) = f(\mathcal{M}) \cap g(\mathcal{N})$.

Observația 2. Oricare ar fi $(a, b) \in \underline{f} \vee \underline{g}$, putem alege deschisele v_a din $\underline{f}$ și v_b din $\underline{g}$, astfel încît $f|_{v_a}$ și $g|_{v_b}$ să fie omeomorfisme, iar $f(v_a) = g(v_b) = v_x$ să fie un deschis din X , vecinătate a punc-

*) Condiția 2) se poate înlocui cerînd ca aplicația φ să fie deschisă.

tului $x = f(a) = g(a)$. Atunci $\varphi|_{v(a,b)}$ este un omeomorfism al lui $v_{(a,b)}$ pe v_x .

Fascicolul $(\underline{\mathcal{F}} \vee \underline{\mathcal{G}}, \varphi, X)$, notat și $\underline{\mathcal{F}} \times_X \underline{\mathcal{G}}$, se numește *produsul diagonal* sau *fibrat* al fasciculelor $\underline{\mathcal{F}}$ și $\underline{\mathcal{G}}$ peste X *).

Observația 3. Date fasciculele $\underline{\mathcal{F}}$ și $\underline{\mathcal{G}}$ peste X și submulțimea $W \subset X$, există o bijecție care asociază fiecărui element $(s_1, s_2) \in \Gamma(W, \underline{\mathcal{F}}) \times \Gamma(W, \underline{\mathcal{G}})$ secțiunea $\sigma \in \Gamma(W, \underline{\mathcal{F}} \vee \underline{\mathcal{G}})$, definită prin relația $\sigma(x) = (s_1(x), s_2(x)) \in \underline{\mathcal{F}} \vee \underline{\mathcal{G}}$, oricare ar fi $x \in W$.

Noțiunea de produs fibrat peste X se extinde la un număr finit de fascicule pe X . În particular, vom considera pentru $\underline{\mathcal{F}}$ fascicolul $\underline{\mathcal{F}}^N = \underbrace{\underline{\mathcal{F}} \vee \dots \vee \underline{\mathcal{F}}}_{\text{de } N \text{ ori}}$.

6. Racordarea fasciculelor. Ne bazăm pe racordarea spațiilor topologice:

Fie $\{F_i\}_{i \in I}$ o familie de spații topologice și S suma topologică a acestor spații. Aplicațiile $\alpha_i : F_i \rightarrow S$, care asociază fiecărui $x \in F_i$ elementul $(i, x) \in S$, sînt omeomorfisme ale spațiilor F_i pe submulțimile $S_i = \alpha_i(F_i) \subset S$, care sînt simultan și închise și deschise în S . Identificînd prin α_i , spațiile F_i cu S_i , vom păstra uneori pentru S_i notața F_i , $i \in I$.

*) Considerînd $\underline{\mathcal{F}}$, $\underline{\mathcal{G}}$ și X resp. f și g ca obiecte și morfisme în categoria spațiilor topologice, $\underline{\mathcal{F}} \vee \underline{\mathcal{G}}$ este produsul fibrat corespunzător diagramei

$$\begin{array}{ccc} & \underline{\mathcal{G}} & \\ & \downarrow g & \\ \underline{\mathcal{F}} & \rightarrow & X \end{array}$$

deoarece $\begin{array}{ccc} \underline{\mathcal{F}} \vee \underline{\mathcal{G}} & \xrightarrow{pr_2} & \underline{\mathcal{G}} \\ pr_1 \downarrow & & \downarrow f \\ \underline{\mathcal{F}} & \xrightarrow{f} & X \end{array}$ este o diagramă comutativă și oricare ar fi spațiul

topologic Z și morfismele $\lambda : Z \rightarrow \underline{\mathcal{F}}$, $\mu : Z \rightarrow \underline{\mathcal{G}}$, există morfismul $\nu : Z \rightarrow \underline{\mathcal{F}} \vee \underline{\mathcal{G}}$, astfel încît $pr_1 \circ \nu = \lambda$ și $pr_2 \circ \nu = \mu$. În categoria fasciculelor pe X , fascicolul $(\underline{\mathcal{F}} \vee \underline{\mathcal{G}}, \varphi, X)$ este produsul fibrat al fasciculelor $(\underline{\mathcal{F}}, f, X)$ și $(\underline{\mathcal{G}}, g, X)$ peste fascicolul $(X, 1_X, X)$ relativ la morfismele f și g . Cum $(X, 1_X, X)$ este obiect final în această categorie, $\underline{\mathcal{F}} \vee \underline{\mathcal{G}}$ este de fapt produsul direct al fasciculelor $\underline{\mathcal{F}}$ și $\underline{\mathcal{G}}$, [13], § 8.

Să presupunem că R este o relație de echivalență în S , astfel încât nici un S_i să nu conțină două elemente echivalente. Pentru fiecare pereche de indici $(i, j) \in I \times I$, notăm cu S_{ij} mulțimea elementelor $\xi \in S_i$, astfel încât există un element $\eta \in S_j$, echivalent cu ξ în raport cu R și notăm cu $h_{ji}: S_{ij} \rightarrow S_{ji}$, bijecția care asociază fiecărui $\xi \in S_{ij}$ elementul η echivalent cu ξ din S_{ji} . Spațiul topologic cît $E = S/R$ se numește *spațiul obținut prin racordarea sau lipirea spațiilor S_i după mulțimile S_{ij} prin aplicațiile h_{ji}* . Fie φ aplicația canonică $S \rightarrow E$, $\varphi_i = \varphi|_{S_i}$ și $E_i = \varphi_i(S_i)$. Se verifică ușor următoarele afirmații:

1° O mulțime $M \subset E$ este deschisă (resp. închisă) în E , atunci și numai atunci cînd, oricare ar fi $i \in I$, $\varphi^{-1}(M) \cap S_i$ este deschis (în S_i).

2° Dacă mulțimile S_{ij} sînt deschise în S_i și h_{ij} sînt omeomorfisme, atunci φ este aplicație deschisă, iar φ_i sînt omeomorfisme.

Propoziția 9. Fie $\{U_i\}_{i \in I}$ o acoperire deschisă a spațiului topologic X . Pentru fiecare indice $i \in I$ se dă un fascicol $(\underline{\mathcal{F}}_i)$ pe U_i și pentru fiecare cuplu $(i, j) \in I^2$ cu $U_{ij} \neq \emptyset$ se dă un izomorfism $\tau_{ji}: (\underline{\mathcal{F}}_i)|_{U_{ij}} \rightarrow (\underline{\mathcal{F}}_j)|_{U_{ji}}$ avînd următoarele proprietăți:

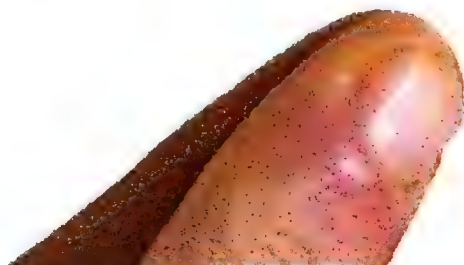
1) $\tau_{ii} = 1_{\underline{\mathcal{F}}_i}$, oricare ar fi $i \in I$.

2) $\tau_{kj} \circ \tau_{ji} = \tau_{ki}$, oricare ar fi $(i, j, k) \in I^3$ cu $U_{ijk} \neq \emptyset$.

Atunci există un fascicol $(\underline{\mathcal{F}})$ pe X și pentru fiecare $i \in I$, un izomorfism $\theta_i: (\underline{\mathcal{F}})|_{U_i} \rightarrow (\underline{\mathcal{F}}_i)$, astfel încît $\tau_{ji} = \theta_j \circ \theta_i^{-1}$. Fascicolul $(\underline{\mathcal{F}})$ și izomorfismele θ_i sînt unic determinate pînă la un izomorfism *).

Aplicăm considerațiile dezvoltate relativ la racordarea spațiilor topologice, păstrînd notațiile de mai sus: Formăm spațiul topologic sumă $S = \coprod_i (\underline{\mathcal{F}}_i)$ și pe baza omeomorfismelor canonice $\alpha_i: (\underline{\mathcal{F}}_i) \rightarrow S_i = \alpha_i((\underline{\mathcal{F}}_i)) \subset S$, identificăm $(\underline{\mathcal{F}}_i)$ cu S_i . Introducem pe S relația de echivalență R , unde $S_{ij} = (\underline{\mathcal{F}}_i)|_{U_{ij}}$ dacă $U_{ij} \neq \emptyset$, resp.

*) Reamintim că $U_{ij} = U_i \cap U_j$, conform notațiilor admise în introducere. De asemenea menționăm că pentru simplificarea scrierii însemnăm restricțiile ca și morfismele.



$S_{ij} = \emptyset$ în cazul $U_{ij} = \emptyset$, și $h_{ji} = \tau_{ji}$. Notăm cu $\underline{\mathcal{F}}$ spațiul cit $E = S/R$, cu φ aplicația canonică $S \rightarrow \underline{\mathcal{F}}$ și cu $\underline{\mathcal{F}}_{U_i} = E_i = \varphi(S_i)$. Aplicația φ este deschisă, deci $\underline{\mathcal{F}}_{U_i}$ este o submulțime deschisă a lui $\underline{\mathcal{F}}$, iar aplicația $\varphi_i = \varphi|_{S_i}$ este un omeomorfism, astfel încît avem omeomorfismul $\theta_i = (\varphi_i \circ \alpha_i)^{-1}: \underline{\mathcal{F}}_{U_i} \rightarrow \underline{\mathcal{F}}_i$. Spațiul $\underline{\mathcal{F}}$ se organizează ca fascicol, definind [proiecția $\pi: \underline{\mathcal{F}} \rightarrow X$, astfel încît pentru fiecare $i \in I$ să avem $\pi|_{\underline{\mathcal{F}}_{U_i}} = \pi_i \circ \theta_i$, unde am notat cu π_i proiecția fascicolului $\underline{\mathcal{F}}_i$ pe U_i . Într-adevăr se verifică imediat următoarele afirmații: $(\underline{\mathcal{F}}_{U_i}, \pi_i \circ \theta_i, U_i)$ este un fascicol, iar θ_i un izomorfism de fascicole; $\tau_{ji} = \theta_j \circ \theta_i^{-1}$; aplicația π este univoc determinată; $\underline{\mathcal{F}}_{U_i}$ este restricția lui $\underline{\mathcal{F}}$ la U_i . Dacă $\underline{\mathcal{Q}}$ este un fascicol pe X și pentru fiecare $i \in I$ avem izomorfismul $\gamma_i: \underline{\mathcal{Q}}_{U_i} \rightarrow \underline{\mathcal{F}}_i$, unde $U_{ij} \neq \emptyset$ implică $\tau_{ji} = \gamma_j \circ \gamma_i^{-1}$, atunci avem un izomorfism $\underline{\mathcal{Q}} \rightarrow \underline{\mathcal{F}}$, care pe $\underline{\mathcal{Q}}_{U_i}$ coincide cu $\theta_i^{-1} \circ \gamma_i$.

Definiția 16. Date acoperirea deschisă $\{U_i\}_{i \in I}$ a spațiului topologic X , fasciculele $\underline{\mathcal{F}}_i$ și izomorfismele τ_{ij} cu proprietățile din propoziția 9, fascicolul $\underline{\mathcal{F}}$ se numește *fascicolul obținut prin racordarea sau lipirea fasciculelor $\underline{\mathcal{F}}_i$* .

§ 2. Fascicole cu structuri algebrice

Fasciculele considerate pînă acum sînt fascicole de mulțimi organizate numai ca spații topologice. În cele ce urmează vor avea însă un rol deosebit fasciculele ale căror fibre sînt inzestrate și cu o structură algebrică, care va satisface anumite condiții de compatibilitate cu structura topologică.

Definiția 1. Se numește *fascicol de grupuri*, un fascicol $(\underline{\mathcal{F}}, f, X)$ cu următoarele proprietăți:

1° Oricare ar fi $x \in X$, fibra $\underline{\mathcal{F}}_x$ este un grup.

2° Să presupunem legea de compunere notată aditiv *). Aplicația $\Phi: \underline{\mathcal{F}} \vee \underline{\mathcal{F}} \rightarrow \underline{\mathcal{F}}$, care asociază fiecărui element $(a, b) \in \underline{\mathcal{F}} \vee \underline{\mathcal{F}}$ elementul $a + b \in \underline{\mathcal{F}}$, este continuă.

3° Aplicația $\Psi: \underline{\mathcal{F}} \rightarrow \underline{\mathcal{F}}$, care asociază fiecărui $a \in \underline{\mathcal{F}}$ elementul $-a \in \underline{\mathcal{F}}$, este continuă.

Prin urmare, aplicația Φ este un morfism de fascicule $\underline{\mathcal{F}} \vee \underline{\mathcal{F}} \rightarrow \underline{\mathcal{F}}$, iar Ψ un izomorfism $\underline{\mathcal{F}} \rightarrow \underline{\mathcal{F}}$.

Ținând seama de observația 2 din § 1, nr. 5, se verifică imediat următoarele afirmații:

Observația 1. Oricare ar fi $(a, b) \in \underline{\mathcal{F}} \vee \underline{\mathcal{F}}$, notînd $x = f(a) = f(b)$, există vecinătățile v_a , v_b și v_{a+b} , astfel încît restricția lui f la fiecare din aceste vecinătăți să fie un omeomorfism pe un deschis v_x din X și restricția lui Φ la $v_{(a,b)} = v_a \vee v_b$ să fie un omeomorfism a lui $v_{(a,b)}$ pe v_{a+b} .

Observația 2. Fie $a \in \underline{\mathcal{F}}_x$, v_a și v_x ca mai sus. Atunci $-v_a = \{q \in \underline{\mathcal{F}} \mid -q \in v_a\}$ este o vecinătate a lui $-a$, reprezentată topologic de f pe v_x .

Definiția 2. Se numește *fascicol de inele* pe X un fascicol $(\mathcal{A}, h, X)$ cu următoarele proprietăți:

1° Oricare ar fi $x \in X$, fibra $\mathcal{A}_x$ este un inel.
2° $\mathcal{A}$ este un fascicol de grupuri abeliene (față de adunarea din $\mathcal{A}_x$).

3° Aplicația $\Lambda: (\alpha, \beta) \in \underline{\mathcal{A}} \vee \underline{\mathcal{A}} \rightarrow \alpha\beta \in \underline{\mathcal{A}}$ este continuă.

Definiția 3. Fie $\mathcal{A}$ un fascicol de inele pe X . Un fascicol $(\mathcal{M}, f, X)$ se numește *fascicol de $\mathcal{A}$ -module* (la stînga) pe X , dacă:

1° $\mathcal{M}$ este un fascicol de grupuri abeliene, în transcriere aditivă.

2° Oricare ar fi $x \in X$, fibra $\mathcal{M}_x$ este un $\mathcal{A}_x$ -modul (la stînga).

3° Aplicație $\chi: (\alpha, m) \in \underline{\mathcal{A}} \vee \underline{\mathcal{M}} \rightarrow \alpha m \in \underline{\mathcal{M}}$ este continuă.

Analog se definesc pe X , fascicule de corpuri, fascicule de k -algebri, unde k este un fascicol de corpuri, etc.

*) Cazul notației multiplicative se formulează analog.

Definiția 4. Dacă $(\mathcal{F}, f, X)$ și $(\mathcal{Q}, g, x)$ sînt două fascicule pe X , înzestrate cu aceeași structură algebrică, un *morfism* resp. *izomorfism* $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{Q}$ va fi un morfism resp. izomorfism din categoria fasciculelor pe X , astfel încît $\varphi_x = \varphi|_{\mathcal{F}_x}: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{Q}_x$ să fie un omomorfism resp. izomorfism al structurii algebrice corespunzătoare.

De exemplu, dacă $\mathcal{F}$ și $\mathcal{Q}$ sînt fascicule de grupuri resp. inele, φ_x va fi un omomorfism sau un izomorfism de grupuri resp. inele. Dacă $\mathcal{F}$ și $\mathcal{Q}$ sînt fascicule de $\mathcal{A}$ -module (cu același $\mathcal{A}$), atunci φ_x va fi o aplicație $\mathcal{A}_x$ -liniară.

Fasciculele pe X cu o anumită structură algebrică ca obiecte, împreună cu morfismele definite mai sus, formează o categorie. De ex. categoria fasciculelor de grupuri pe X , categoria fasciculelor de $\mathcal{A}$ -module pe X , unde $\mathcal{A}$ este un anumit fascicol de inele pe X , etc.

Propoziția 1. Dacă $\mathcal{F}$ este un fascicol cu structură algebrică pe X — fascicol de grupuri, de inele, de module, de algebre —, atunci structura algebrică se poate introduce și pe $\Gamma(W, \mathcal{F})$, oricare ar fi $W \subset X$.

Fie de exemplu $\mathcal{F}$ un fascicol de grupuri în transcriere aditivă. Dacă $s_1, s_2 \in \Gamma(W, \mathcal{F})$, vom defini aplicația $s_1 + s_2: W \rightarrow \mathcal{F}$, punînd pentru orice $x \in W$, $(s_1 + s_2)(x) = s_1(x) + s_2(x)$. Se verifică imediat că $s_1 + s_2 \in \Gamma(W, \mathcal{F})$ și că relativ la această lege de compunere $\Gamma(W, \mathcal{F})$ formează grup:

Într-adevăr, după observația 3 din § 1, nr. 5, $(s_1, s_2) \in \Gamma(W, \mathcal{F}) \times \Gamma(W, \mathcal{F})$ determină secțiunea $\sigma \in \Gamma(W, \mathcal{F} \vee \mathcal{F}): x \in W \rightarrow (s_1(x), s_2(x)) \in \mathcal{F} \vee \mathcal{F}$. Atunci $s_1 + s_2 = \Phi \circ \sigma$, deci $s_1 + s_2$ este o aplicație continuă.

Dacă $s \in \Gamma(W, \mathcal{F})$, aplicația $-s: W \rightarrow \mathcal{F}$, care asociază fiecărui $x \in W$ elementul $-s(x) \in \mathcal{F}_x$ este de asemenea continuă, deoarece $-s = \Psi \circ s$.

Aplicația $0: X \rightarrow \mathcal{F}$, care asociază fiecărui element $x \in X$ elementul neutru $0_x \in \mathcal{F}_x$, este o secțiune a lui $\mathcal{F}$ pe X , numită

secțiunea nulă. Într-adevăr, oricare ar fi $x \in X$, există o secțiune s a lui $\mathcal{F}$ peste un deschis U din X , care conține x , astfel încît $s(x) = 0_x$ (propoziția 3, § 1, nr. 4). Atunci există $-s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ și $s + (-s) \in \Gamma(U, \mathcal{F})$, dar $s + (-s) = 0|_U$, deci $0 \in \Gamma(X, \mathcal{F})$. Aplicația $0|_W$ este elementul neutru față de adunarea secțiunilor din $\Gamma(W, \mathcal{F})$ și pentru orice $s \in \Gamma(W, \mathcal{F})$ secțiunea $-s$ este elementul opus lui s din $\Gamma(W, \mathcal{F})$.

Observația 3. O altă definiție a fasciculelor de grupuri se obține înlocuind în definiția 1 condiția 3° cu

3'°. Aplicația $0: x \in X \rightarrow 0_x \in \mathcal{F}_x$ este continuă, deci este o secțiune a lui $\mathcal{F}$ pe X .

Să arătăm că 1°, 2°, 3'° implică 3°. Fie a un element arbitrar din $\mathcal{F}$. Conform observației 1 și relației $a + (-a) = 0_x$, unde $x = f(a)$, există vecinătățile v_a, v_{-a} și v_{0_x} aplicate de f omeomorf pe v_x și astfel încît restricția lui Φ la $v_a \cup v_{-a}$ să fie un omeomorfism pe v_{0_x} și totodată oricare ar fi $x' \in v_x$, $\mathcal{F}_{x'} \cap v_{0_x} = \{0_{x'}\}$. Dacă $\mathcal{F}_{x'} \cap v_a = \{a'\}$, atunci $\mathcal{F}_{x'} \cap v_{-a} = \{-a'\}$, deci $v_{-a} = \Psi(v_a)$ și Ψ este continuă în a .

Analog, dacă $\mathcal{A}$ este un fascicol de inele pe X , $\Gamma(W, \mathcal{A})$ formează un inel; dacă $\mathcal{F}$ este un fascicol de $\mathcal{A}$ -module pe X , $\Gamma(W, \mathcal{F})$ se organizează ca un $\Gamma(W, \mathcal{A})$ -modul etc.

Definițiile și rezultatele din § 1, nr. 5 și 6, se aplică cu completările necesare și pentru fasciculele cu structuri algebrice. Încheind paragraful de față, ne vom mărgini să dăm cîteva exemple, rămînînd ca să dezvoltăm acest punct de vedere în § 4, pentru categoria fasciculelor de $\mathcal{A}$ -module pe X , unde $\mathcal{A}$ este un fascicol de inele, deoarece acest caz intervine în mod deosebit în studiul funcțiilor analitice de mai multe variabile complexe.

Menționăm mai întîi și în cazul fasciculelor cu structură algebrică, *fascicolul constant* $(X \times M, \text{pr}_1, X)$, unde M este înzestrat cu structura algebrică respectivă (grup, inel etc.) și cu topologia discretă și pe care îl vom nota prescurtat M . De exemplu vom lucra ades cu fasciculele constante $\mathbb{Z}$ și $\mathbb{C}$.

Un *subfascicol* al unui fascicol $\mathcal{F}$ cu structură algebrică este un subfascicol a lui $\mathcal{F}$ în categoria fasciculelor de spații topologice,

care în raport cu operațiile din $\mathcal{F}$ formează fascicol cu aceeași structură algebrică ca și $\mathcal{F}$.

Fie $\mathcal{F}$ un fascicol cu structură algebrică de tipurile menționate mai sus (astfel încât fiecare fibră să conțină un element neutru). Dacă $\mathcal{G}$ și $\mathcal{H}$ sînt două subfascicole ale lui $\mathcal{F}$, atunci $\mathcal{G} \cap \mathcal{H}$ este un subfascicol al lui $\mathcal{F}$.

În problema racordării fasciculelor (propoziția 9, § 1, nr. 6), dacă $\mathcal{F}_i$ au o anumită structură algebrică, și $\mathcal{G}_i$ sînt izomorfisme corespunzătoare acestei structuri, $\mathcal{F}$ este înzestrat cu aceeași structură algebrică, iar θ_i sînt izomorfisme.

§ 3. Fascicole de germeni

În acest paragraf vom exemplifica rezultatele anterioare introducînd fasciculele de germeni *).

1. *Fascicolul germenilor de aplicații definite pe deschisele unui spațiu topologic X cu valori într-o mulțime Y .*

Fie X un spațiu topologic și Y o mulțime nevidă. Să notăm cu $\mathcal{U} = \{U \mid U \text{ deschis din } X\}$ și, pentru fiecare punct $x \in X$, cu $\mathcal{U}(x) = \{U \in \mathcal{U} \mid U \ni x\}$. Vom considera o familie $\mathfrak{A}$ de aplicații definite pe deschise din X cu valori în Y . Un element din $\mathfrak{A}$ este deci o aplicație $s: U \rightarrow Y$, cu $U \in \mathcal{U}$ și va fi notat (s, U) . Fie $\mathfrak{A}(x) = \{(s, U) \in \mathfrak{A} \mid U \in \mathcal{U}(x)\}$. Vom presupune că $\mathfrak{A}$ îndeplinește următoarele condiții:

i) $\mathfrak{A}(x) \neq \emptyset$, oricare ar fi $x \in X$.

ii) Familia $\mathfrak{A}$ este închisă față de operația de restricție: Prin urmare, dacă $(s, U) \in \mathfrak{A}$ și $U^* \in \mathcal{U}$, $U^* \subset U$, atunci $(s|_{U^*}, U^*) \in \mathfrak{A}$.

Definim în $\mathfrak{A}(x)$, pentru fiecare $x \in X$, următoarea relație de echivalență:

*) Amintim că în cap. I, § 11, am considerat germeni de funcții olomorfe într-un punct din $\mathbb{C}^n$. Acest caz va fi reluat în cap. III, § 3.

Dacă $(s_k, U_k) \in \mathfrak{U}(x)$, $k = 1, 2$,

$$(s_1, U_1) \sim (s_2, U_2),$$

atunci și numai atunci cînd există $U \in \mathcal{U}(x)$, $U \subset U_1 \cap U_2$, cu proprietatea: $s_1|_U = s_2|_U$.

Numim clasa de echivalență a cuplului (s, U) din $\mathfrak{U}(x)$ *germenele aplicației* $s: U \rightarrow Y$ în punctul x și o notăm cu s_x .

Orice germene este dat printr-un reprezentant al clasei și $s_x = \tilde{s}_x$ înseamnă: 1) $x = \tilde{x}$ și 2) dacă s_x e reprezentat de (s, U) și $\tilde{s}_x$ de $(\tilde{s}, \tilde{U})$, există $U^* \in \mathcal{U}(x)$, $U^* \subset U \cap \tilde{U}$, astfel încît $s|_{U^*} = \tilde{s}|_{U^*}$.

Notăm cu $\mathcal{F}_x$ mulțimea germenilor aplicațiilor din $\mathfrak{U}$ în punctul x și cu $\underline{\mathcal{F}} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$. Se pun în evidență în mod natural următoarele două aplicații:

- 1) *proiecția* $f: \underline{\mathcal{F}} \rightarrow X$, prin care: $s_x \rightarrow x$ și
- 2) *valoarea germenilor* $\tau: \underline{\mathcal{F}} \rightarrow Y$, prin care: $s_x \rightarrow s(x)$.

Aplicația 2) are sens, deoarece $s(x)$ nu depinde de reprezentantul (s, U) ales pentru germenele s_x ; $s(x)$ se numește *valoarea* lui s_x în punctul x și se notează uneori cu $s_x(x)$.

Propoziția 1. $\underline{\mathcal{F}}$ se poate organiza ca fascicol peste X cu proiecția f .

Vom înzestra $\underline{\mathcal{F}}$ cu o structură de spațiu topologic astfel încît f să fie un omeomorfism local, definind pentru fiecare $s_x \in \underline{\mathcal{F}}$ de reprezentant (s, U) ca *vecinătate* a lui s_x mulțimea $U^s = \{s_t \mid t \in U\}$. Dacă aplicația s cu care formăm mulțimea U^s este cunoscută, vom nota simplu această mulțime cu $\underline{U}$. Se verifică ușor axiomele vecinătăților dintr-un spațiu topologic.

Aplicația f este un omeomorfism local surjectiv:

1) Fie $s_x \in \underline{\mathcal{F}}$ de reprezentant (s, U) și $U = U^s$. Atunci $f|_{\underline{U}}$ este un omeomorfism: $\underline{U} \rightarrow U$. Vom nota cu $\bar{\varphi} = (f|_{\underline{U}})^{-1}$.

2) f este surjectiv, deoarece $\mathfrak{U}(x) \neq \emptyset$, oricare ar fi $x \in X$.

Observația 1. Cu notațiile de mai sus, φ este o secțiune în fascicolul $(\underline{\mathcal{F}}, f, X)$. Prin urmare, orice cuplu (s, U) din $\mathfrak{U}$ deter-

mină în $\mathcal{F}$ o secțiune $\varphi \in \Gamma(U, \mathcal{F})$. Notind cu aceeași literă restricțiile ca și aplicațiile inițiale, avem diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\tau} & s(U) \\ \varphi \swarrow & & \nearrow s \\ & U & \end{array} \quad (1)$$

i.e. $\tau \circ \varphi = s$ pe U și $s \circ f = \tau$ pe U .

Observația 2. Aplicația τ este surjecție, dacă pentru orice $y \in Y$ există $(s, U) \in \mathfrak{A}$ cu $y \in s(U)$.

Propoziția 2. Dacă Y are o structură algebrică, în anumite condiții relative la clasa $\mathfrak{A}$, fascicolul $\mathcal{F}$ poate fi înzestrat cu structură algebrică.

Fie, de exemplu, Y un grup aditiv și să presupunem că $\mathfrak{A}$ îndeplinește următoarele condiții pentru orice $x \in X$:

1° Oricare ar fi $(s_k, U_k) \in \mathfrak{A}(x)$, $k = 1, 2$, există $U \subset U_1 \cap U_2$, $U \in \mathcal{U}(x)$, astfel încît $(s_1 + s_2, U) \in \mathfrak{A}(x)^*$.

2° Există $U \in \mathcal{U}(x)$, astfel încît $(0, U) \in \mathfrak{A}(x)$, unde $0 : U \rightarrow Y$ este aplicația constant egală cu elementul neutru din Y .

3° Oricare ar fi $(s, U) \in \mathfrak{A}(x)$, există $V \in \mathcal{U}(x)$, $V \subset U$, astfel încît $(-s, V) \in \mathfrak{A}(x)$.

În aceste condiții, $\mathcal{F}_x$ formează grup față de următoarea lege de compunere: Dacă germenii $s_{hx} \in \mathcal{F}_x$, $k = 1, 2$, sînt dați resp. prin reprezentanții $(s_k, U_k) \in \mathfrak{A}(x)$ și dacă notăm ca mai sus $(s_1 + s_2, U) \in \mathfrak{A}(x)$, atunci definim

$$s_{1x} + s_{2x} = (s_1 + s_2)_x. \quad (2)$$

Se verifică imediat că definiția nu depinde de reprezentanții aleși și că $\mathcal{F}$ formează astfel un fascicol de grupuri pe X .

Observația 3. Aplicația τ induce în condițiile propoziției 2 un omomorfism: $\mathcal{F}_x \rightarrow Y$ pentru fiecare $x \in X$.

Observația 4. Fie $F : X \rightarrow X_1$ o aplicație continuă a două spații topologice X și X_1 , iar $(\mathcal{F}, f, X)$ resp. $(\mathcal{F}_1, f_1, X_1)$ două fascicole de

*) Am notat prescurtat $s_1 + s_2 = s_1|_U + s_2|_U$.

germeni de aplicații $\mathfrak{A}$ resp. $\mathfrak{A}_1$ definite pe deschise din X resp. X_1 cu valori în Y . Presupunem că $(s_1, U_1) \in \mathfrak{A}_1$ implică $(s = s_1 \circ F, F^{-1}(U_1)) \in \mathfrak{A}$. Atunci oricare ar fi $x \in X$, F induce o aplicație $F_x^*: \mathcal{F}_{1F(x)} \rightarrow \mathcal{F}_x$, care asociază unui germene $s_{1F(x)} \in \mathcal{F}_{1F(x)}$ germenele $s_x \in \mathcal{F}_x$. Dacă Y , $\mathcal{F}$ și $\mathcal{F}_1$ au o structură algebrică, F_x^* este un omomorfism al structurii respective. În particular, dacă F este un omeomorfism, pentru care $(s_1, U_1) \in \mathfrak{A}_1$ implică $(s_1 \circ F, F^{-1}(U_1)) \in \mathfrak{A}$ și $(s, U) \in \mathfrak{A}$ implică $(s \circ F^{-1}, F(U)) \in \mathfrak{A}_1$, atunci aplicația F^* de fibră F_x^* este un izomorfism: $\mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}^*$.

2. Cazuri particulare:

1) *Fascicolul germenilor de aplicații continue, definite pe deschise din spațiul topologic X cu valori în spațiul topologic Y , pe care-l vom nota $\mathcal{Q}(X, Y)$.*

În acest caz $\mathfrak{A}$ este mulțimea tuturor aplicațiilor (s, U) pentru $U \in \mathcal{U}$ și $s: U \rightarrow Y$ aplicație continuă. $\mathfrak{A}$ satisface condițiile i), ii).

Propoziția 3. *Aplicația $\tau: \mathcal{Q}(X, Y) \rightarrow Y$ este surjectivă și continuă, după cum rezultă din observația 2 și din (1).*

În cele ce urmează vom considera în special cazul $Y = \mathbb{C}$, în care aplicațiile din $\mathfrak{A}$ sînt funcții continue complexe definite pe deschise din X . Fascicolul $\mathcal{Q}(X, \mathbb{C})$, pe care-l vom nota prescurtat $\mathcal{Q}(X)$, este un fascicol de înele.

Fascicolul $\mathcal{Q}(X, \mathbb{C}^n)$ este un fascicol de $\mathcal{Q}(X)$ -module izomorf cu $\mathcal{Q}(X)^n$. (A se vedea § 4, nr. 5.)

2) Fie X un spațiu topologic, Y o mulțime, iar $\mathfrak{A}$ familia aplicațiilor (s, U) cu $U \in \mathcal{U}$ și s o aplicație constantă: $s(x) = y \in Y$,

) Folosim denumirea de izomorfism într-un sens mai general decît cel introdus în § 1, nr. 3, deoarece fasciculele $\mathcal{F}$ și $\mathcal{F}_1$ nu au aceeași bază. În general, date fasciculele $\mathcal{F}$ și $\mathcal{F}_1$ pe X resp. X_1 și o aplicație continuă (un omeomorfism) $F: X \rightarrow X_1$, o aplicație continuă (omeomorfism) $\Phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_1$, cu proprietatea $f_1 \circ \Phi = F \circ f$ și care, în cazul fasciculelor cu structură algebrică, acționează pe fibre ca un omomorfism (izomorfism), se numește F -morfism (F -izomorfism) al lui $\mathcal{F}$ în (pe) $\mathcal{F}_1$. În cazul nostru F^ este F^{-1} -izomorfism ([37], cap. II, 1.12). Se observă că ipoteza: $(s, U) \in \mathfrak{A} \Rightarrow (s \circ F^{-1}, F(U)) \in \mathfrak{A}_1$, care permite definirea aplicației F^{-1*} de fibră F_x^{-1*} , se poate înlocui cu cererea ca aplicația F^* să fie surjectivă.

oricare ar fi $x \in U$. Fascicolul corespunzător este izomorf cu fascicolul constant de fibră Y (§ 1, nr. 5, definiția 14). În cazul $Y = \mathbb{C}$, obținem fascicolul $\mathbb{C}$ de corpuri pe X , iar $\underline{\mathcal{C}}(X)$ este un fascicol de $\mathbb{C}$ -algebre.

3) *Fascicolul germenilor secțiunilor unei acoperiri* (Y, π, X) , pentru care $\pi(Y) = X$ și oricare ar fi $x \in X$ există o secțiune pe un deschis din $\mathcal{U}(x)$.

În acest caz $\mathcal{U}$ constă din aplicații $s : U \rightarrow Y$ continue cu condiția $\pi \circ s = 1_U$ și $U \in \mathcal{U}$. Dacă notăm cu $(\underline{\mathcal{F}}, f, X)$ acest fascicol, avem diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathcal{F}} & \xrightarrow{\tau} & Y \\ f \searrow & & \swarrow \pi \\ & X & \end{array} \quad (3)$$

Aplicația τ este continuă, mai mult diagrama (1) devine

$$\begin{array}{ccc} \underline{U} & \xrightarrow{\tau} & s(U) \\ f \searrow & \varphi \nearrow s & \swarrow \pi \\ & U & \end{array} \quad (1')$$

astfel încît $\tau|_U$ este un omeomorfism al lui $\underline{U}$ pe $s(U)$ *).

4) *Fascicolul germenilor secțiunilor unui fascicol.*

Propoziția 4. Dacă $(\underline{\mathcal{U}}, \pi, X)$ este un fascicol pe X , fascicolul $(\underline{\mathcal{F}}, f, X)$ al germenilor secțiunilor în $\underline{\mathcal{U}}$ definite pe deschise din X este izomorf cu $\underline{\mathcal{U}}$.

Să arătăm că $\tau : \underline{\mathcal{F}} \rightarrow \underline{\mathcal{U}}$ este un omeomorfism:

1° τ este surjectiv: Într-adevăr, oricare ar fi $y \in \underline{\mathcal{U}}$, există deschisul V din $\underline{\mathcal{U}}$, care conține punctul y , astfel încît $\pi|_V$ să fie un omeomorfism al lui V pe $\pi(V) \in \mathcal{U}(x)$, pentru $x = \pi(y)$. Atunci $s = (\pi|_V)^{-1} \in \Gamma[\pi(V), \underline{\mathcal{U}}]$ și $s(x) = y$, deci $\tau(s_x) = y$.

2° τ este injectiv: Dacă $\tau(s_{1x_1}) = \tau(s_{2x_2})$, din relația $f = \pi \circ \tau$ deducem că $x_1 = x_2 = x$, iar din $s_1(x) = s_2(x)$ și din consecința 2,

*) Nu putem însă afirma că τ este omeomorfism local, deoarece $s(U)$ nu este întotdeauna un deschis în Y .

§ 1, nr. 4, rezultă că există $U \in \mathcal{U}(x)$, astfel încît $s_1|_U = s_2|_U$ sau $s_{1x} = s_{2x}$.

3° τ este omeomorfism local, deoarece în diagrama (1') mulțimea $s(U)$ este deschisă.

Observația 5. Fie h un morfism al acoperirii (Y, π, X) în acoperirea (Y_1, π_1, X) .

1) Oricare ar fi $W \subset X$, h induce o aplicație $\tilde{h}: \Gamma(W, Y) \rightarrow \Gamma(W, Y_1)$, și anume $s_1 = \tilde{h}(s) = h \circ s$, pentru s arbitrar din $\Gamma(W, Y)$.

2) Fie $\mathcal{F}$ resp. $\mathcal{F}_1$ fasciculele germenilor de secțiuni pe deschise în aceste acoperiri. Atunci h induce aplicația $h_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_{1x}$, care asociază fiecărui $s_x \in \mathcal{F}_x$ germenele $s_{1x} \in \mathcal{F}_{1x}$. Aplicația $h: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_1$, care coincide cu h_x pe $\mathcal{F}_x$, este un morfism (fiindcă h este un omeomorfism local: $U^s \rightarrow U^{s_1}$, oricare ar fi $U \in \mathcal{U}$). Dacă h este un izomorfism al acoperirilor date, h este un izomorfism.

3) În cazul cînd Y și Y_1 au structuri algebrice, iar h este un omomorfism (izomorfism), atunci $\tilde{h}$ și h au aceeași proprietate.

Observația 5 va fi aplicată în cazul particular al fasciculelor.

§ 4. Categoria fasciculelor de module peste un fascicol de inele $\mathcal{A}$

1. În teoria funcțiilor analitice de mai multe variabile complexe o deosebită importanță prezintă categoria fasciculelor de module peste un fascicol $\mathcal{A}$ de inele comutative, cu element unitate. De aceea ne vom opri acum în special asupra acestei categorii de fascicule de pe spațiul topologic X .

De aici înainte vom presupune că *fasciculele de inele, pe care le vom considera, au următoarele proprietăți:*

1° Sînt fascicule de inele comutative cu element unitate. Dacă $\mathcal{A}$ este un astfel de fascicol vom nota 1_x elementul unitate al fibrei $\mathcal{A}_x$, $x \in X$.

2° Morfismele respective invariază elementele unitate.

3° Aplicația care asociază fiecărui $x \in X$ elementul $1_x \in \mathcal{A}_x$ este continuă. Ea va fi numită *secțiunea unu* și notată 1.

Fie deci $\mathcal{A}$ un fascicol de inele pe X . Fasciculele de $\mathcal{A}$ -module pe X formează o categorie, pe care o vom nota $\text{Mod } \mathcal{A}$, în care un morfism $h: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_1$ este morfism de fascicule (§ 1, nr. 3) și pentru fiecare $x \in X$, aplicația $h_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_{1x}$ este $\mathcal{A}_x$ -liniară.

Această categorie conține și fascicolul $\mathcal{A}$ considerat ca fascicol de $\mathcal{A}$ -module. Fasciculele de grupuri abeliene constituie un caz particular, fiind fascicule de $\mathbb{Z}$ -module.

Vom relua acum pentru categoria $\text{Mod } \mathcal{A}$ noțiunile dezvoltate în § 1, nr. 5 și 6 și în § 2.

2. Subfascicol

Propoziția 1. *Un subfascicol $\mathcal{F}$ al fascicolului de $\mathcal{A}$ -module $\mathcal{Q}$ este un deschis $\mathcal{F} \subset \mathcal{Q}$, astfel încît oricare ar fi $x \in X$, $\mathcal{F}_x = \mathcal{F} \cap \mathcal{Q}_x$ este un submodul al $\mathcal{A}_x$ -modulului $\mathcal{Q}_x$.*

Aceasta rezultă din propoziția 8, § 1, nr. 5 și din observația că prin restricție aplicațiile Φ , Ψ și χ din definițiile 1 și 3, § 2, organizează $\mathcal{F}$ ca fascicol de $\mathcal{A}$ -module.

Un exemplu de subfascicol al lui $\mathcal{F}$ este fascicolul nul 0, a cărei fibră se reduce în fiecare punct $x \in X$ la elementul $0_x \in \mathcal{F}_x$.

Propoziția 2. *Intersecția a două subfascicule $\mathcal{F}$ și $\mathcal{G}$ ale unui fascicol de $\mathcal{A}$ -module $\mathcal{L}$ este un fascicol de $\mathcal{A}$ -module $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, subfascicol al lui $\mathcal{L}$.*

Propoziția 2'. *Dacă $\mathcal{F}$ și $\mathcal{G}$ sînt două subfascicule ale lui $\mathcal{L}$, să notăm $\mathcal{F} + \mathcal{G} = \bigcup_{x \in X} (\mathcal{F}_x + \mathcal{G}_x)$, unde $\mathcal{F}_x + \mathcal{G}_x$ este submodulul lui $\mathcal{L}_x$ generat de $\mathcal{F}_x$ și $\mathcal{G}_x$. Atunci $\mathcal{F} + \mathcal{G}$ este un subfascicol al lui $\mathcal{L}$.*

3. Fascicol cît

Propoziția 3. Fie $(\mathcal{Q}, g, X)$ un fascicol de $\mathcal{A}$ -module pe X și $\mathcal{F}$ un subfascicol al lui $\mathcal{Q}$. Oricare ar fi $x \in X$, vom nota $\mathcal{A}_x$ -modulul cît $\mathcal{Q}_x / \mathcal{F}_x$ cu $(\mathcal{Q} / \mathcal{F})_x$, aplicația canonică $\mathcal{Q}_x \rightarrow (\mathcal{Q} / \mathcal{F})_x$

cu φ_x , mulțimea $\bigcup_{x \in X} (\mathcal{Q}/\mathcal{F})_x$ cu $\mathcal{Q}/\mathcal{F}$ și aplicația $\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}/\mathcal{F}$, care pe fibre se reduce la φ_x , cu φ . Această aplicație definește pe $\mathcal{Q}$ o relație de echivalență R : $a, b \in \mathcal{Q}$, $a \sim_R b \Leftrightarrow (g(a) = g(b) \pm x \text{ și } a - b \in \mathcal{F}_x)$. Organizînd $\mathcal{Q}/\mathcal{F}$ ca spațiu topologic cit relativ la R și definind proiecția $\gamma: \mathcal{Q}/\mathcal{F} \rightarrow X$, care asociază fiecărei clase $\dot{a} = a + \mathcal{F}_x$ punctul x , obținem un fascicol de $\mathcal{A}$ -module $(\mathcal{Q}/\mathcal{F}, \gamma, X)$ numit *fascicol cit*.

Afirmația se poate obține folosind definiția 12, § 1, nr. 5, propoziția 8, § 1, nr. 5 și observația 1, § 2: Dacă $b \sim_R a$, atunci $b = a + c$ cu $c \in \mathcal{F}_x$ și $x = g(a) = g(b)$. Există vecinătățile v_a , v_b și v_c , unde $v_c \subset \mathcal{F}$, astfel încît restricția lui g la fiecare dintre aceste vecinătăți să fie un omeomorfism, iar $\Phi(v_a \vee v_c) = v_b$ și deci omeomorfismul $(g|_{v_b})^{-1} \circ g|_{v_a}: v_a \rightarrow v_b$ să asocieze elemente echivalente relativ la R . Rezultă că $(\mathcal{Q}/\mathcal{F}, \gamma, X)$ este un fascicol și cum $(\mathcal{Q}/\mathcal{F})_x$ este un $\mathcal{A}_x$ -modul, se va verifica numai continuitatea celor trei aplicații Φ, Ψ, χ din definiția fasciculelor de module. Aplicația φ este un morfism în $\text{Mod } \mathcal{A}$.

4. Nucleu, imagine, conucleu, coimagine

Fie $u: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{Q}$ un morfism de fascicule de $\mathcal{A}$ -module pe X .

Definiția 1. Să notăm pentru fiecare $x \in X$ cu $\ker u_x$ nucleul aplicației $\mathcal{A}_x$ -liniare $u_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{Q}_x$, care este un submodule al $\mathcal{A}_x$ -modulului $\mathcal{F}_x$. Mulțimea $\ker u = \bigcup_{x \in X} \ker u_x$ formează un subfascicol al lui $\mathcal{F}$, numit *nucleul morfismului* u .

Conform propoziției 1 este suficient să verificăm că mulțimea $\ker u$ este un deschis din $\mathcal{F}$. Dar $\ker u = u^{-1}(0)$, unde 0 este subfascicolul zero al lui $\mathcal{Q}$, iar u este continuu.

Definiția 2. Se numește *imaginea morfismului* u și se notează $\text{im } u$ subfascicolul $u(\mathcal{F})$ al lui $\mathcal{Q}$, de fibră $\text{im } u_x = u(\mathcal{F}_x) \subset \mathcal{Q}_x$.

Definiția 3. Fascicolul cit $\mathcal{Q}/\text{im } u$ se numește *conucleul morfismului* u și se notează $\text{coker } u$, iar fascicolul cit $\mathcal{F}/\ker u$ se numește *coimaginea* lui u și se notează $\text{coim } u$.

Definiția 4. Un șir $\underline{F} \xrightarrow{u} \underline{Q} \xrightarrow{v} \underline{K}$ de fascicule de $\underline{A}$ -module și de morfisme se numește *șir exact*, dacă $\text{im } u = \ker v^*$).

Aceasta revine la faptul că șirul

$$\underline{F}_x \xrightarrow{u_x} \underline{Q}_x \xrightarrow{v_x} \underline{K}_x$$

este exact, oricare ar fi $x \in X$.

Definiția 5. Un șir $\dots \xrightarrow{d_{p-2}} \underline{F}_{p-1} \xrightarrow{d_{p-1}} \underline{F}_p \xrightarrow{d_p} \underline{F}_{p+1} \xrightarrow{d_{p+1}} \dots$ de fascicule de $\underline{A}$ -module și morfisme se numește *exact în $\underline{F}_p$* , dacă subșirul $\underline{F}_{p-1} \xrightarrow{d_{p-1}} \underline{F}_p \xrightarrow{d_p} \underline{F}_{p+1}$ este exact, i.e. dacă $\ker d_p = \text{im } d_{p-1}$. El se numește *exact*, dacă este exact în fiecare termen $\underline{F}_p$.

Propoziția 4. Dacă $u: \underline{F} \rightarrow \underline{Q}$ este un morfism, atunci avem șirurile exacte

$$0 \rightarrow \ker u \xrightarrow{i} \underline{F} \xrightarrow{j'} \text{coim } u \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \text{im } u \xrightarrow{i''} \underline{Q} \xrightarrow{j} \text{coker } u \rightarrow 0$$

care dau descompunerea canonică a lui u .

Are loc izomorfismul canonic: $\text{coim } u \xrightarrow{u'} \text{im } u$, care face comutativă diagrama

$$\begin{array}{ccc} \underline{F} & \xrightarrow{u} & \underline{Q} \\ j' \downarrow & & \uparrow i'' \\ \text{coim } u & \xrightarrow{u'} & \text{im } u \end{array}$$

Propoziția 5. Orice morfism $u: \underline{F} \rightarrow \underline{Q}$ din categoria fasciculelor de $\underline{A}$ -module induce pentru fiecare $W \subset X$ un omomorfism de $\Gamma(W, \underline{A})$ -module $\tilde{u}: \Gamma(W, \underline{F}) \rightarrow \Gamma(W, \underline{Q})$ definit prin relația

$$\tilde{u}(s) = u \circ s, \quad s \in \Gamma(W, \underline{F}).$$

*) Noțiunea de șir exact se definește în categorii aditive [13] p. 60 sau [59], p. 14.

Propoziția 6. Dacă $0 \rightarrow \underline{\mathcal{F}} \xrightarrow{u} \underline{\mathcal{Q}} \xrightarrow{v} \underline{\mathcal{K}} \rightarrow 0$ este un șir exact de fascicole, atunci avem șirul exact

$$0 \rightarrow \Gamma(W, \underline{\mathcal{F}}) \xrightarrow{\tilde{u}} \Gamma(W, \underline{\mathcal{Q}}) \xrightarrow{\tilde{v}} \Gamma(W, \underline{\mathcal{K}}).$$

1) Cum u este injectiv se verifică imediat că și $\tilde{u}$ are aceeași proprietate: Fie $s \in \ker \tilde{u}$. Atunci oricare ar fi $x \in W$, $u[s(x)] = 0_x \in \mathcal{Q}_x$, deci $s(x) \in \ker u_x = \{0_x\} \subset \mathcal{F}_x$ sau s este secțiunea nulă a lui $\underline{\mathcal{F}}$ pe W .

2) $\ker \tilde{v} = \text{im } \tilde{u}$: Incluziunea $\text{im } \tilde{u} \subset \ker \tilde{v}$ rezultă din egalitatea $\tilde{v} \circ \tilde{u} = \tilde{v} \circ u$. Fie $s \in \ker \tilde{v}$. Cum $s(W) \subset \ker v = \text{im } u$ și u este un izomorfism $\underline{\mathcal{F}} \rightarrow \text{im } u$, aplicația $\sigma = u^{-1} \circ s \in \Gamma(W, \underline{\mathcal{F}})$ și $s = u \circ \sigma \in \text{im } \tilde{u}$.

3) În genere $\tilde{v}$ nu este surjectiv, după cum arată următorul exemplu ([44], p. 172):

Fie X un spațiu Hausdorff conex, a și b două puncte distincte din X . Considerăm șirul exact $0 \rightarrow \underline{\mathcal{F}} \xrightarrow{u} \underline{\mathcal{Q}} \xrightarrow{v} \underline{\mathcal{K}} \rightarrow 0$, în care $\underline{\mathcal{Q}}$ este fascicolul constant de fibră $\mathbb{C}$ peste X , $\underline{\mathcal{F}}$ subfascicolul de fibre $\mathcal{F}_a = 0$, $\mathcal{F}_b = 0$ și $\mathcal{F}_x = \mathbb{C}$ pentru $x \in X - \{a, b\}$, iar $\underline{\mathcal{K}}$ fascicolul cit $\underline{\mathcal{Q}}/\underline{\mathcal{F}}$. Secțiunile din $\Gamma(X, \underline{\mathcal{Q}})$ sint aplicații constante pe X , deci $\text{im } \tilde{v}$ cuprinde secțiuni din $\Gamma(X, \underline{\mathcal{K}})$ care au aceeași valoare în punctele a și b , în timp ce în $\Gamma(X, \underline{\mathcal{K}})$ există secțiuni care iau valori diferite arbitrare în punctele a și b .

Un alt exemplu va fi expus în observația 1 din cap. IV, § 1, nr. 1, p. 285. Remarcăm că Γ definește (pentru W fixat din X) un functor de la categoria $\text{Mod } \mathcal{A}$ la categoria grupurilor abeliene, care asociază fiecărui fascicol $\underline{\mathcal{F}}$ grupul $\Gamma(W, \underline{\mathcal{F}})$ și fiecărui morfism u morfismul $\tilde{u}$. Propoziția 6 arată că acest functor este exact la stînga ([13], p. 61). Se vede din demonstrație că aceeași concluzie se obține și în ipoteza unui șir exact $0 \rightarrow \underline{\mathcal{F}} \xrightarrow{u} \underline{\mathcal{Q}} \xrightarrow{v} \underline{\mathcal{K}}$.

5. Suma directă de două fascicole

Propoziția 7. Fie $\underline{\mathcal{F}}$ și $\underline{\mathcal{Q}}$ două fascicole de $\mathcal{A}$ -module pe X . Organizînd fiecare fibră a fascicolului $\underline{\mathcal{F}} \vee \underline{\mathcal{Q}}$ ca produsul direct sau

ca suma directă*) de $\mathcal{A}_x$ -module $\mathcal{F}_x$ și $\mathcal{Q}_x$, atunci $\mathcal{F} \vee \mathcal{Q}$ devine un fascicol de $\mathcal{A}$ -module, care va fi numit suma directă a fasciculelor $\mathcal{F}$ și $\mathcal{Q}$ și va fi notat $\mathcal{F} \oplus \mathcal{Q}$.

Un element din $\mathcal{F} \oplus \mathcal{Q}$ va fi notat (a, b) cu $a \in \mathcal{F}$ și $b \in \mathcal{Q}$.

Suma directă se definește pentru un număr finit de fascicule de $\mathcal{A}$ -module. În particular, vom folosi suma directă a m fascicule izomorfe cu $\mathcal{F}$, pe care o vom nota $\mathcal{F}^m$. Prin definiție, $\mathcal{F}^0 = 0$.

Observația 1. Conform observației 3 din § 1, nr. 5, $\Gamma(W, \mathcal{F} \oplus \mathcal{Q}) = \Gamma(W, \mathcal{F}) \oplus \Gamma(W, \mathcal{Q})$, oricare ar fi $W \subset X$ și relația se extinde la sume directe finite arbitrare.

6. Procedul de racordare al fasciculelor (§ 1, nr. 6 și § 2) se aplică în cazul fasciculelor de $\mathcal{A}$ -module pe X cerind ca $\mathcal{F}_i$ să fie fascicule de $\mathcal{A}_{U_i}$ -module pe U_i , $i \in I$. Atunci fascicolul $\mathcal{F}$ obținut prin racordare va fi un fascicol de $\mathcal{A}$ -module.

7. Rezultatele obținute mai sus arată că $\text{Mod } \mathcal{A}$ este o categorie abeliană ([13], p. 59, [59] p. 14, [51], p. 139).

După cum am indicat și în § 1, noțiunile și propozițiile din acest paragraf pot fi formulate în categorii de fascicule cu diferite structuri algebrice.

§ 5. Categoria fasciculelor coerente de $\mathcal{A}$ -module

Printre fasciculele de $\mathcal{A}$ -module deosebit de importante în teoria funcțiilor de mai multe variabile complexe sînt fasciculele coerente, pe care le vom introduce în acest paragraf și care se bucură de proprietatea că anumite afirmații valabile într-un punct din X pentru fibra respectivă se păstrează într-o vecinătate a punctului pentru restricția fascicolului la această vecinătate. Începem expunerea prin cîteva exemple de $\mathcal{A}$ -module și unele rezultate relative

*) Remarcăm că într-o categorie aditivă, produsul direct și suma directă a două obiecte sînt izomorfe ([13], p. 38).

la morfismele fasciculelor $\mathcal{A}^q$. Vom defini apoi fasciculele de tip finit și fasciculele coerente. În încheiere (nr. 8), vom stabili o serie de proprietăți ale acestor fascicule, din care rezultă faptul că fasciculele coerente de $\underline{\mathcal{A}}$ -module formează o subcategorie abeliană a categoriei $\text{Mod } \underline{\mathcal{A}}$, pe care o vom nota $\text{Coh } \underline{\mathcal{A}}^*$).

1. Exemple de fascicule de $\underline{\mathcal{A}}$ -module

1° Suma directă $\underline{\mathcal{A}}^m$, m număr natural și evident $\underline{\mathcal{A}}^0 = 0$.

Definiția 1. Un fascicol de $\underline{\mathcal{A}}$ -module izomorf cu $\underline{\mathcal{A}}^m$ se numește fascicol liber.

2° Fascicolul generat de un număr finit de secțiuni $f_1, \dots, f_p \in \Gamma(X, \underline{\mathcal{F}})$, unde $\underline{\mathcal{F}}$ este un fascicol de $\underline{\mathcal{A}}$ -module pe X .

Vom nota cu $\underline{\mathcal{M}} = \underline{\mathcal{M}}(f_1, \dots, f_p)$ submodulul lui $\Gamma(X, \underline{\mathcal{F}})$ generat de f_j , $j = 1, \dots, p$, peste $\Gamma(X, \underline{\mathcal{A}})$.

În fiecare punct $x \in X$, fie $\underline{\mathcal{M}}_x$ submodulul lui $\underline{\mathcal{F}}_x$ generat peste $\underline{\mathcal{A}}_x$ de $f_j(x)$, i.e. un element din $\underline{\mathcal{M}}_x$ este o combinație liniară

$$\sum_{j=1}^p a_j f_j(x), \text{ cu } a_j \in \underline{\mathcal{A}}_x.$$

Mulțimea $\underline{\mathcal{M}} = \bigcup_{x \in X} \underline{\mathcal{M}}_x \subset \underline{\mathcal{F}}$ este deschisă: Într-adevăr există o vecinătate U a lui x și secțiunile $\alpha_j \in \Gamma(U, \underline{\mathcal{A}})$ cu $\alpha_j(x) = a_j$ (propoziția 3, § 1, nr. 4). Atunci $f = \sum_{j=1}^p \alpha_j f_j \in \Gamma(U, \underline{\mathcal{F}})$, deci $f(U)$ este un deschis din $\underline{\mathcal{F}}$ (propoziția 4, § 1, nr. 4). Dar $f(x) \in f(U) \subset \underline{\mathcal{M}}$.

După propoziția 1, § 4, nr. 2, $\underline{\mathcal{M}}$ formează un subfascicol al lui $\underline{\mathcal{F}}$. Acest fascicol va fi notat $\underline{\mathcal{M}}(f_1, \dots, f_p)$ și numit fascicolul generat de secțiunile f_j . Evident, $\underline{\mathcal{M}}(f_1, \dots, f_p) \subset \Gamma[X, \underline{\mathcal{M}}(f_1, \dots, f_p)]$.

Dacă $Y \subset X$ și $f_1, \dots, f_p \in \Gamma(Y, \underline{\mathcal{F}})$, se definește analog fascicolul de $\underline{\mathcal{A}}_Y$ -module pe Y : $\underline{\mathcal{M}}(f_1, \dots, f_p)$, care este un subfascicol al lui $\underline{\mathcal{F}}_Y$.

Pentru prescurtarea expunerii, dacă $\underline{\mathcal{F}}_Y = \underline{\mathcal{M}}(f_1, \dots, f_p)$ vom spune că $f_1, \dots, f_p$ generează fascicolul $\underline{\mathcal{F}}$ pe Y .

*) Coh reprezintă prescurtarea cuvîntului francez *cohérent* sau englez *coherent*.

3° Fascicolul relațiilor între un număr finit de secțiuni $f_1, \dots, f_p \in \Gamma(X, \underline{\mathcal{F}})$, unde $\underline{\mathcal{F}}$ este un fascicol de $\underline{\mathcal{A}}$ -module.

Vom nota cu $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(f_1, \dots, f_p) = \{ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \Gamma(X, \underline{\mathcal{A}}^p) \mid \sum_{j=1}^p \alpha_j f_j = 0 \in \Gamma(X, \underline{\mathcal{F}}) \}$ submodulul lui $\Gamma(X, \underline{\mathcal{A}}^p)$ peste $\Gamma(X, \underline{\mathcal{A}})$ format de relațiile α între $f_1, \dots, f_p$.

În fiecare punct $x \in X$, fie $\mathfrak{R}_x$ submodulul lui $\underline{\mathcal{A}}_x^p$ format de elementele $(a_1, \dots, a_p) \in \underline{\mathcal{A}}_x^p$, pentru care $\sum_{j=1}^p a_j f_j(x) = 0_x \in \underline{\mathcal{F}}_x$.

Mulțimea $\mathfrak{R} = \bigcup_{x \in X} \mathfrak{R}_x \subset \underline{\mathcal{A}}^p$ este un deschis, deoarece oricare ar fi $x \in X$, există o vecinătate U a lui x și secțiunile $\alpha_j \in \Gamma(U, \underline{\mathcal{A}})$, $j = 1, \dots, p$, cu $\alpha_j(x) = a_j$ și $\sum_{j=1}^p \alpha_j f_j = 0 \in \Gamma(U, \underline{\mathcal{F}})$. Dacă α este secțiunea din $\Gamma(U, \underline{\mathcal{A}}^p)$ de componente α_j , atunci $\alpha(U)$ este un deschis din $\underline{\mathcal{A}}^p$, care conține $(a_1, \dots, a_p)$ și este inclus în $\mathfrak{R}$.

Prin urmare $\mathfrak{R}$ formează un subfascicol al lui $\underline{\mathcal{A}}^p$, notat $\mathfrak{R}(f_1, \dots, f_p)$ și numit fascicolul relațiilor între secțiunile f_j . În acest caz $\mathfrak{R}(f_1, \dots, f_p) = \Gamma[X, \mathfrak{R}(f_1, \dots, f_p)]$.

Analog se definește fascicolul de $\underline{\mathcal{A}}_Y$ -module $\mathfrak{R}(f_1, \dots, f_p)$, pentru $Y \subset X$ și $f_1, \dots, f_p \in \Gamma(Y, \underline{\mathcal{F}})$.

2. Morfisme ale fasciculelor $\underline{\mathcal{A}}^q$, q — număr natural.

Fie $\underline{\mathcal{F}}$ un fascicol de $\underline{\mathcal{A}}$ -module pe X .

Propoziția 1.1) Orice morfism $u: \underline{\mathcal{A}} \rightarrow \underline{\mathcal{F}}$ este unic determinat de secțiunea $s = \tilde{u}(1) \in \Gamma(X, \underline{\mathcal{F}})$, unde 1 este secțiunea unu din $\Gamma(X, \underline{\mathcal{A}})$, iar $\tilde{u}: \Gamma(X, \underline{\mathcal{A}}) \rightarrow \Gamma(X, \underline{\mathcal{F}})$ omomorfismul indus de u (propoziția 5, § 4, nr. 4).

Într-adevăr, oricare ar fi $a \in \underline{\mathcal{A}}_x$, x arbitrar din X ,

$$u(a) = a u(1_x) = a s(x). \quad (1)$$

2) *Reciproc, orice secțiune $s \in \Gamma(X, \underline{\mathcal{F}})$ definește un morfism u , după relația (1).*

Aplicația u este continuă, deoarece $u = \chi \circ \omega$, unde

$\omega: \underline{\mathcal{A}} \rightarrow \underline{\mathcal{A}} \vee s(X) \subset \underline{\mathcal{A}} \vee \underline{\mathcal{F}}$, cu $\omega(a) = (a, s(x))$ pentru $a \in \underline{\mathcal{A}}_x$, iar $\chi: \underline{\mathcal{A}} \vee \underline{\mathcal{F}} \rightarrow \underline{\mathcal{F}}$ cu $\chi(a, s(x)) = as(x)$.

Propoziția 2.1) *Orice morfism $u: \underline{\mathcal{A}}^q \rightarrow \underline{\mathcal{F}}$ este unic determinat de un sistem de q secțiuni ale lui $\underline{\mathcal{F}}$ peste X .*

Fie $s_j = \tilde{u}(e_j)$, unde $e_j = (0, \dots, 0, \underset{j}{1}, 0, \dots, 0)$ este secțiunea lui $\underline{\mathcal{A}}^q$ peste X , care asociază fiecărui $x \in X$, elementul $e_{jx} = (\underset{j}{0_x}, \dots, 0_x, 1_x, 0_x, \dots, 0_x)$ din $\underline{\mathcal{A}}^q_x$ de componente 0_x , exceptînd componenta j care este 1_x , ($j = 1, \dots, q$). Fiecare element $a \in \underline{\mathcal{A}}^q$, se poate scrie $a = (a_1, \dots, a_q) = \sum_{j=1}^q a_j e_{jx}$, dacă x este proiecția sa. Atunci

$$u(a) = \sum_{j=1}^q a_j s_j(x). \quad (2)$$

2) *Reciproc, q secțiuni $s_j \in \Gamma(X, \underline{\mathcal{F}})$, $j = 1, \dots, q$, determină prin relația (2) un morfism $u: \underline{\mathcal{A}}^q \rightarrow \underline{\mathcal{F}}$.*

Fie $u_j: \underline{\mathcal{A}} \rightarrow \underline{\mathcal{F}}$ morfismul asociat prin relația (1) secțiunii s_j , $j = 1, \dots, q$. Atunci $u^* = (u_1, \dots, u_q)$ este un morfism: $\underline{\mathcal{A}}^q \rightarrow \underline{\mathcal{F}}^q$ care asociază elementului $a = (a_1, \dots, a_q) \in \underline{\mathcal{A}}^q$ elementul $(a_1 s_1(x), \dots, a_q s_q(x)) \in \underline{\mathcal{F}}^q$, iar $u = \Phi \circ u^*$, unde $\Phi: \underline{\mathcal{F}}^q \rightarrow \underline{\mathcal{F}}$ este morfismul corespunzător adunării.

Observația 1. Prin definiție $\ker u$ este subfascicolul lui $\underline{\mathcal{A}}^q$ format de elementele $a = (a_1, \dots, a_q)$ cu proprietatea următoare: Dacă x este proiecția lui a , atunci

$$\sum_{j=1}^q a_j s_j(x) = 0_x \in \underline{\mathcal{F}}_x. \quad (3)$$

Deci $\ker u = \mathfrak{R}(s_1, \dots, s_q)$, fascicolul relațiilor între secțiunile s_j . De asemenea în $u = \mathfrak{M}(s_1, \dots, s_q)$, subfascicolul lui $\mathcal{F}$ generat de secțiunile s_j .

Propoziția 3. Pentru ca un morfism $u: \mathcal{A}^q \rightarrow \mathcal{F}$ să fie surjectiv, este necesar și suficient ca cele q secțiuni $s_j \in \Gamma(X, \mathcal{F})$, care definesc pe u , să genereze fascicolul $\mathcal{F}$, i.e. oricare ar fi $x \in X$, orice $f \in \mathcal{F}_x$ să fie o combinație liniară de $s_j(x)$ cu coeficienți în $\mathcal{A}_x$:

$$f = \sum_{j=1}^q a_j s_j(x), \quad a_j \in \mathcal{A}_x.$$

Atunci $\mathcal{F}$ este izomorf cu $\mathcal{A}^q / \mathfrak{R}(s_1, \dots, s_q)$.

3. Fascicole de tip finit

Definiția 2. Un fascicol de $\mathcal{A}$ -module $\mathcal{F}$ se numește *fascicol de tip finit*, dacă oricare ar fi $x \in X$, există o vecinătate U a lui x și un număr finit q de secțiuni $s_j \in \Gamma(U, \mathcal{F})$, $j = 1, \dots, q$, care generează $\mathcal{F}_U$ ca fascicol de $\mathcal{A}_U$ -module.

Conform propoziției 3, putem da următoarea formulare echivalentă:

Definiția 2'. Fascicolul de $\mathcal{A}$ -module $\mathcal{F}$ se numește *de tip finit*, dacă oricare ar fi $x \in X$, există o vecinătate U a lui x , un număr întreg $q \geq 0$ și un morfism surjectiv $u: \mathcal{A}_U^q \rightarrow \mathcal{F}_U$.

Observația 2. Se vede că noțiunea de fascicol de tip finit are caracter local și se păstrează prin restricția fascicolului la o submulțime a lui X : Dat fascicolul $\mathcal{F}$ de tip finit pe X , oricare ar fi $Y \subset X$, fascicolul de $\mathcal{A}_Y$ -module $\mathcal{F}_Y$ este de tip finit.

Propoziția 4. Dacă $\mathcal{F}$ este un fascicol de tip finit și dacă $s_1, \dots, s_q$ sînt q secțiuni ale lui $\mathcal{F}$ peste o vecinătate U a unui punct x arbitrar din X , cu proprietatea că $s_1(x), \dots, s_q(x)$ generează $\mathcal{F}_x$ ca $\mathcal{A}_x$ -modul, atunci există o vecinătate W a lui x , astfel încît $s_j|_W$, $j = 1, \dots, q$, generează $\mathcal{F}_W$ ca fascicol de $\mathcal{A}_W$ -module.

Deoarece $\mathcal{F}$ este de tip finit, există într-o vecinătate U_1 a lui x secțiunile $t_1, \dots, t_p$, care generează $\mathcal{F}_y$, oricare ar fi $y \in U_1$. În punctul x ,

$$t_h(x) = \sum_{j=1}^q a_{hj} s_j(x), \quad h = 1, \dots, p,$$

cu $a_{hj} \in \mathcal{A}_x$. Conform propoziției 3, § 1, nr. 4, există într-o vecinătate U_2 a lui x secțiunile α_{hj} ale lui $\mathcal{A}$, pentru care $\alpha_{hj}(x) = a_{hj}$.

Prin urmare, $t_h(x) = \sum_{j=1}^q \alpha_{hj}(x) s_j(x)$, $h = 1, \dots, p$. După consecința 2, § 1, nr. 4, există o vecinătate W a lui x , $W \subset U \cap U_1 \cap U_2$, astfel încît pentru orice $y \in W$, să avem $t_h(y) = \sum_{j=1}^q \alpha_{hj}(y) s_j(y)$, $h = 1, \dots, p$, deci $s_1(y), \dots, s_q(y)$ să genereze $\mathcal{F}_y$ ca $\mathcal{A}_y$ -modul.

Consecința 1. Dacă un fascicol de tip finit $\mathcal{F}$ este nul într-un punct $x \in X$ (i.e. $\mathcal{F}_x = \{0_x\}$), atunci el este nul într-o vecinătate a lui x .

Într-adevăr, secțiunea nulă generează $\mathcal{F}_x$, deci generează $\mathcal{F}_y$ pentru y dintr-o vecinătate a lui x .

Consecința 2. Dacă fascicolul de tip finit $\mathcal{F}$ este spațiu separat și X este conex, atunci sau $\mathcal{F}_x \neq \{0_x\}$ oricare ar fi $x \in X$ sau $\mathcal{F} = 0$.

Observația 3. Fibrele unui fascicol de tip finit sînt module finit generate.

Fie X un spațiu topologic astfel încît există un deschis $\Omega \subset X$, care nu este închis în X și fie $\mathcal{A}$ un fascicol de inele pe X . Fascicolul de $\mathcal{A}$ -module $\mathcal{F}$, pentru care: $\mathcal{F}_x = \mathcal{A}_x$, $x \in \Omega$ și $\mathcal{F}_x = \{0_x\}$, $x \notin \Omega$, arată că reciproca acestei afirmații nu este adevărată.

4. Fascicole coerente

Definiția 3. Un fascicol $\mathcal{F}$ de $\mathcal{A}$ -module se numește *coerent*, dacă

1° Fascicolul $\mathcal{F}$ este de tip finit.

2° Oricare ar fi secțiunile $s_1, \dots, s_q$ ale fascicolului $\underline{\mathcal{F}}$ peste un deschis $U \subset X$, fascicolul relațiilor între aceste secțiuni $\underline{\mathfrak{R}}(s_1, \dots, s_q)$ este de tip finit peste U .

Evident condiția 2° este echivalentă cu

2'° Oricare ar fi numărul întreg $q \geq 0$, deschisul $U \subset X$ și morfismul $u: \underline{\mathcal{A}}_U^q \rightarrow \underline{\mathcal{F}}_U$, fascicolul $\ker u$ este de tip finit peste U .

Observația 4. Noțiunea de fascicol coerent are de asemenea *caracter local*, după cum rezultă stabilind echivalența condiției 2° cu condiția 2''°.

2''° Oricare ar fi punctul $x \in X$, există o vecinătate U^* a lui x , astfel încît dacă $s_1, \dots, s_q \in \Gamma(W^*, \underline{\mathcal{F}})$, fascicolul $\underline{\mathfrak{R}}(s_1, \dots, s_q)$ este de tip finit peste W^* , oricare ar fi deschisul $W^* \subset U^*$.

Să verificăm că 2''° implică 2°: Fie U un deschis din X și $\sigma_1, \dots, \sigma_q \in \Gamma(U, \underline{\mathcal{F}})$. Să demonstrăm că $\underline{\mathfrak{R}}(\sigma_1, \dots, \sigma_q)$ este fascicol de tip finit peste U . Într-adevăr, oricare ar fi $x \in U$, există vecinătatea U^* a lui x , astfel încît luînd $s_j = \sigma_j|_{U \cap U^*}$, $j = 1, \dots, q$, $\underline{\mathfrak{R}}(s_1, \dots, s_q) = \underline{\mathfrak{R}}_{U \cap U^*}(\sigma_1, \dots, \sigma_q)^*$ este de tip finit relativ la $U \cap U^*$.

Iată acum o altă condiție echivalentă cu 2°, care poate fi folosită în definiția coerenței:

2'''° Oricare ar fi deschisul $U \subset X$ și morfismul $u: \underline{\mathcal{A}}_U^q \rightarrow \underline{\mathcal{F}}_U$, q -număr întreg ≥ 0 , există pentru fiecare $x \in U$ o vecinătate, $W \subset U$ și un șir exact

$$\underline{\mathcal{A}}_W^p \xrightarrow{v} \underline{\mathcal{A}}_W^q \xrightarrow{u} \underline{\mathcal{F}}_W, \quad (4)$$

p -număr întreg ≥ 0 .

2'° $\Rightarrow$ 2'''°. Cum $\ker u$ este de tip finit pe U , oricare ar fi $x \in U$, există o vecinătate $W \subset U$ a lui x și un șir exact

$$\underline{\mathcal{A}}_W^p \xrightarrow{j} (\ker u)_W \rightarrow 0, \quad (5)$$

care împreună cu șirul exact

$$0 \rightarrow (\ker u)_W \xrightarrow{i} \underline{\mathcal{A}}_W^q \xrightarrow{u} \underline{\mathcal{F}}_W \quad (6)$$

ne dă (4).

) Am notat $\underline{\mathfrak{R}}_{U \cap U^}(\sigma_1, \dots, \sigma_q)$ restricția fascicolului $\underline{\mathfrak{R}}(\sigma_1, \dots, \sigma_q)$ la $U \cap U^*$.

$2'''' \Rightarrow 2''$. Date U și u , $\ker u$ este de tip finit, deoarece oricare ar fi $x \in U$ există W și un șir exact (4), iar corestricția lui v la $(\ker u)_W$ ne dă un morfism j surjectiv, (5).

Observația 5. Coerența se păstrează prin restricție: Fie $\mathcal{F}$ un fascicol de $\mathcal{A}$ -module coerent pe X și Y o submulțime a lui X . Atunci $\mathcal{F}_Y$ este un fascicol de $\mathcal{A}_Y$ -module coerent pe Y .

Conform observației 2, vom verifica numai condiția $2''$. Să notăm cu Ω un deschis din Y , $\Omega = U \cap Y$ cu U deschis din X și fie $s_1, \dots, s_q \in \Gamma(\Omega, \mathcal{F})$. Să arătăm că $\mathcal{R}(s_1, \dots, s_q)$ este fascicol de tip finit pe Ω . În acest scop, să luăm un punct x arbitrar din Ω . Există vecinătatea U_1 a lui x în X și $\sigma_j \in \Gamma(U_1, \mathcal{F})$ cu $\sigma_j(x) = s_j(x)$, $j = 1, \dots, q$, deci vecinătatea U_2 a lui x în X , $U_2 \subset U_1 \cap U$, astfel încît $\sigma_j = s_j$ pe $\Omega_1 = U_2 \cap Y$. Cum $\mathcal{R}(\sigma_1, \dots, \sigma_q)$ este de tip finit pe U_1 , există o vecinătate U_3 a lui x în U_1 și șirul exact: $\mathcal{A}_{U_1}^m \rightarrow \mathcal{R}_{U_1}(\sigma_1, \dots, \sigma_q) \rightarrow 0$, cu m un număr întreg ≥ 0 . În $\Omega_2 = U_3 \cap \Omega_1$ avem atunci șirul exact $\mathcal{A}_{\Omega_1}^m \rightarrow \mathcal{R}_{\Omega_1}(s_1, \dots, s_q) \rightarrow 0$, ceea ce trebuia demonstrat.

Observația 6. Deoarece noțiunile de fascicol de tip finit și fascicol coerent au caracter local, iar prin racordarea fasciculelor $\mathcal{F}_i$ o proprietate locală se transmite fascicolului $\mathcal{F}$ (§ 1, nr. 6, și § 4, nr. 6), dacă $\mathcal{F}_i$ sînt fascicule de $\mathcal{A}_{U_i}$ -module de tip finit resp. coerente, atunci $\mathcal{F}$ este un fascicol de $\mathcal{A}$ -module de tip finit resp. coerent.

5. Proprietăți ale fasciculelor de tip finit

Propoziția 5. Orice fascicol $\mathcal{K}$ al unui fascicol $\mathcal{Q}$ de tip finit este de tip finit.

Fie v aplicația canonică a lui $\mathcal{Q}$ pe $\mathcal{K}$, care este surjectivă. Ori-care ar fi $x \in X$, există o vecinătate U a lui x și o surjecție $\varphi: \mathcal{A}_U \rightarrow \mathcal{Q}_U$. Atunci $v \circ \varphi: \mathcal{A}_U \rightarrow \mathcal{K}_U$ este o surjecție.

Propoziția 6. Fie șirul exact $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{u} \mathcal{Q} \xrightarrow{v} \mathcal{K} \rightarrow 0$.

Dacă $\mathcal{F}$ și $\mathcal{K}$ sînt de tip finit, atunci $\mathcal{Q}$ este de tip finit.

Să notăm cu x un punct arbitrar din X . Există o vecinătate U a lui x și surjecțiile $\varphi: \mathcal{A}_U^p \rightarrow \mathcal{F}_U$ resp. $\psi: \mathcal{A}_U^q \rightarrow \mathcal{H}_U$, generate de secțiunile $s_j \in \Gamma(U, \mathcal{F})$, $j = 1, \dots, p$, și $t_h \in \Gamma(U, \mathcal{H})$, $h = 1, \dots, q$. Cum v este surjectiv, există o vecinătate $W \subset U$ a lui x și secțiunile $t'_h \in \Gamma(W, \mathcal{Q})$, astfel încît $v \circ t'_h = t_h|_W$, (consecința 3, § 1, nr. 4). Fie de asemenea $s'_j = u \circ s_j|_W \in \Gamma(W, \mathcal{Q})$. Secțiunile $(s'_1, \dots, s'_p)$ și $(t'_1, \dots, t'_q)$ determină morfismele $\varphi': \mathcal{A}_W^p \rightarrow \mathcal{Q}_W$ și $\psi': \mathcal{A}_W^q \rightarrow \mathcal{Q}_W$, evident $\varphi' = u \circ \varphi|_W$ și $v \circ \psi' = \psi|_W$. Secțiunile $(s'_1, \dots, s'_p, t'_1, \dots, t'_q)$ determină un morfism $\chi: \mathcal{A}_W^{p+q} \rightarrow \mathcal{Q}_W$, care asociază fiecărui element $(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q) \in \mathcal{A}_W^{p+q}$, y arbitrar din W , elementul $\sum_{j=1}^p a_j s'_j(y) + \sum_{h=1}^q b_h t'_h(y)$. Notînd prescurtat $(a, b) = (a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q)$, putem scrie $\chi(a, b) = \varphi'(a) + \psi'(b)$.

Să demonstrăm că χ este surjectiv: Fie $g \in \mathcal{Q}_y$. Atunci $v(g) = \psi(b)$ pentru un anumit $b \in \mathcal{A}_y^q$. Notînd $g' = \psi'(b)$, avem $v(g - g') = 0$, deci $g - g' \in \text{im } u = \text{im } \varphi'$ și există $a \in \mathcal{A}_y^p$, astfel încît $g - g' = \varphi'(a)$. Prin urmare, $g = \chi(a, b)$.

Consecința 3. Dacă $\mathcal{F}$ și $\mathcal{Q}$ sînt fascicule de tip finit, atunci suma directă $\mathcal{F} \oplus \mathcal{Q}$ este de tip finit.

Într-adevăr, avem șirul exact

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \oplus \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow 0. \quad (7)$$

6. Proprietăți ale fasciculelor, care satisfac condiția 2° din definiția coerenței.

Propoziția 7. Orice subfascicol $\mathcal{F}$ al unui fascicol $\mathcal{Q}$, care satisface 2°, satisface de asemenea 2°.

Fie deschisul $U \subset X$ și morfismul $\varphi: \mathcal{A}_U^q \rightarrow \mathcal{F}_U$. Prin ipoteză există monomorfismul $u: \mathcal{F}_U \rightarrow \mathcal{Q}_U$ (restricția aplicației de incluziune $\mathcal{F} \subset \mathcal{Q}$ la $\mathcal{F}_U$). Cum $\mathcal{Q}$ verifică 2°, $\ker(u \circ \varphi)$ este de tip finit. Dar $\ker \varphi = \ker(u \circ \varphi)$.

Consecința 4. Oricare ar fi morfismul $v: \underline{Q} \rightarrow \underline{K}$, dacă $\underline{Q}$ are proprietatea 2° , atunci $\ker v$ are aceeași proprietate.

Consecința 5. Fie $\underline{F}$ și $\underline{Q}$ subfascicole ale unui fascicol de $\mathcal{A}$ -module $\underline{L}$. Dacă unul dintre ele verifică 2° , atunci $\underline{F} \cap \underline{Q}$ verifică 2° .

Propoziția 8. Fie șirul exact $0 \rightarrow \underline{F} \xrightarrow{u} \underline{Q} \xrightarrow{v} \underline{K} \rightarrow 0$. Dacă $\underline{F}$ și $\underline{K}$ satisfac condiția 2° , $\underline{Q}$ satisface 2° .

Fie U un deschis din X și ψ un morfism $\mathcal{A}'_U \rightarrow \underline{Q}_U$. Deoarece $\ker(v \circ \psi)$ este de tip finit, există pentru fiecare $x \in U$ o vecinătate W și un morfism surjectiv $\lambda: \mathcal{A}'_W \rightarrow \ker(v \circ \psi)_W$. Ținând seama de relațiile $\psi[\ker(v \circ \psi)] \subset (\ker v)_U$ și $\ker v = \operatorname{im} u \simeq \underline{F}$, deducem că $\ker(\psi \circ \lambda)$ este de tip finit pe W . Însă se verifică ușor că $(\ker \psi)_W = \lambda[\ker(\psi \circ \lambda)]^*$.

Consecința 6. Suma directă $\underline{F} \oplus \underline{Q}$ a două fascicole $\underline{F}$ și $\underline{Q}$, care satisfac condiția 2° , are aceeași proprietate.

7. Proprietăți ale fasciculelor care satisfac condițiile 1° sau 2° din definiția coerenței.

Propoziția 9. Fie șirul exact $0 \rightarrow \underline{F} \xrightarrow{u} \underline{Q} \xrightarrow{v} \underline{K}$. Dacă $\underline{Q}$ satisface condiția 1° și $\underline{K}$ condiția 2° , atunci $\underline{F}$ este de tip finit (satisfacă 1°).

Fie $x \in X$ arbitrar. Prin ipoteză există o vecinătate U a lui x și un epimorfism $\psi: \mathcal{A}'_U \rightarrow \underline{Q}_U$. Deoarece $\ker(v \circ \psi)$ este de tip finit pe U , $(\ker v)_U = \psi[\ker(v \circ \psi)]$, $\operatorname{im} u = \ker v$ și $\underline{F}$ este izomorf cu $\operatorname{im} u$, rezultă afirmația.

Propoziția 10. Fie șirul exact $\underline{F} \xrightarrow{u} \underline{Q} \xrightarrow{v} \underline{K} \rightarrow 0$. Dacă $\underline{F}$ satisface condiția 1° și $\underline{Q}$ condiția 2° , atunci $\underline{K}$ satisface 2° .

Fie U un deschis din X , $\psi: \mathcal{A}'_U \rightarrow \underline{K}_U$ un morfism și x un punct din U . Reluând procedeul din demonstrația propoziției 6

*) Această relație are loc ori de câte ori avem un șir de fascicole și morfisme $\underline{L} \xrightarrow{\lambda} \underline{M} \xrightarrow{\psi} \underline{N}$, iar $\ker \psi \subset \operatorname{im} \lambda$. În cazul nostru $\ker \psi \subset \ker(v \circ \psi)$.

(cu observația că φ este în genere definit pe un deschis $U_1 \subset U$ care conține x și că $W \subset U_1$) formăm morfismul $\chi: \mathcal{A}_W^{p+q} \rightarrow \mathcal{Q}_W$.

Prin ipoteză $\ker \chi$ este acum de tip finit. Fie $\Lambda: \mathcal{A}^{p+q} \rightarrow \mathcal{A}^q$ morfismul prin care unui element $(a, b) \in \mathcal{A}^{p+q}$ îi corespunde $b \in \mathcal{A}^q$. Să arătăm că $\Lambda(\ker \chi) = (\ker \psi)_W$. Într-adevăr, dacă $b \in \ker \psi$, atunci $\psi'(b) = \varphi'(a)$ pentru un anumit $a \in \mathcal{A}_y^p$. Elementul $(-a, b) \in \ker \chi$, iar $b = \Lambda(-a, b) \in \Lambda(\ker \chi)$. Invers, dacă $b = \Lambda(a, b)$ cu $\chi(a, b) = 0$, atunci $\psi'(b) = -\varphi'(a)$, deci $\psi(b) = 0$, sau $b \in \ker \psi$. Aplicînd propoziția 5 deducem că fascicolul $\ker \psi$ este de tip finit.

8. Proprietăți ale fasciculelor coerente

Propoziția 11. Orice subfascicol $\mathcal{F}$ de tip finit al unui fascicol $\mathcal{Q}$ coerent este coerent.

Într-adevăr după propoziția 7, fascicolul $\mathcal{F}$ satisface și condiția 2°.

Teorema 1. Fie $\mathcal{F}$ și $\mathcal{Q}$ două fascicule coerente și $u: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{Q}$ un morfism. Atunci $\operatorname{im} u$, $\ker u$, $\operatorname{coker} u$ și $\operatorname{coim} u$ sînt fascicule coerente.

1) Deoarece șirurile $\mathcal{F} \xrightarrow{u} \operatorname{im} u \rightarrow 0$ și $0 \rightarrow \operatorname{im} u \xrightarrow{i} \mathcal{Q}$ sînt exacte (i — incluziunea), aplicînd propozițiile 5 resp. 7, deducem că $\operatorname{im} u$ verifică 1° și 2°.

2) $\ker u$ satisface 2° ca subfascicol al lui $\mathcal{F}$ și 1° după propoziția 9 aplicată șirului exact $0 \rightarrow \ker u \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{u} \mathcal{Q}$.

3) Din șirul exact $\operatorname{im} u \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow \operatorname{coker} u \rightarrow 0$ și propozițiile 5 și 10, deducem apoi că fascicolul $\operatorname{coker} u$ are proprietățile 1° și 2°.

4) $\operatorname{coim} u$ este izomorf cu $\operatorname{im} u$. (O demonstrație directă a coerenței acestui fascicol se obține din șirul exact $0 \rightarrow \ker u \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \operatorname{coim} u \rightarrow 0$, procedînd ca la punctul 3).)

Teorema 2. Dacă un șir de fascicule coerente $\mathcal{F} \xrightarrow{u} \mathcal{Q} \xrightarrow{v} \mathcal{K}$ este exact într-un punct $x \in X$, atunci șirul este exact în toate punctele unei vecinătăți a lui x .

Intr-adevăr, $\ker(v \circ u)$ este un subfascicol coerent al lui $\underline{F}$, deci $\underline{F}/\ker(v \circ u)$ este coerent și nul în x . După consecința 1, el este nul într-o vecinătate U a lui x . Prin urmare în U avem $v(\operatorname{im} u) = 0^*$ sau $\operatorname{im} u \subset \ker v^*$. Cum $\ker v/\operatorname{im} u^*$ este coerent în U și nul în x , există o vecinătate W a lui x , $W \subset U$, astfel încît $\ker v_y = \operatorname{im} u_y$, oricare ar fi $y \in W$.

Teorema 3 (Serre.) *Dat șirul exact $0 \rightarrow \underline{F} \xrightarrow{u} \underline{Q} \xrightarrow{v} \underline{K} \rightarrow 0$, dacă două din fasciculele $\underline{F}$, $\underline{Q}$, $\underline{K}$ sînt coerente, atunci și al treilea este coerent.*

1) Dacă $\underline{F}$ și $\underline{Q}$ sînt coerente, $\underline{K} \simeq \operatorname{coker} u$, deci este coerent după teorema 1.

2) Dacă $\underline{Q}$ și $\underline{K}$ sînt coerente, $\underline{F} \simeq \ker v$ și deci este coerent după aceeași teoremă.

3) Dacă $\underline{F}$ și $\underline{K}$ sînt coerente, $\underline{Q}$ este coerent după propozițiile 6 și 8.

Consecința 7. *Suma directă a unui număr finit de fascicule coerente este un fascicol coerent.*

Propoziția 12. *Dacă $\underline{F}$ și $\underline{Q}$ sînt subfascicule coerente ale unui fascicol coerent de $\mathcal{A}$ -module $\underline{L}$, atunci $\underline{F} + \underline{Q}$ și $\underline{F} \cap \underline{Q}$ sînt coerente.*

Deoarece morfismul $\Phi: \underline{F} \oplus \underline{Q} \rightarrow \underline{F} + \underline{Q}$, care asociază cuplului (a, b) suma $a + b$, este surjectiv, $\underline{F} + \underline{Q}$ este de tip finit (propoziția 5, nr. 5) și cum $\underline{F} + \underline{Q}$ este subfascicol al fascicolului coerent $\underline{L}$, el este coerent (propoziția 11).

Fie θ restricția la $\underline{F}$ a morfismului canonic $\underline{L} \rightarrow \underline{L}/\underline{Q}$. Evident, $\ker \theta = \underline{F} \cap \underline{Q}$, deci aplicînd teorema 1, deducem că $\underline{F} \cap \underline{Q}$ este coerent.

Importanța noțiunii de fascicol coerent constă în faptul că ea permite să se treacă de la proprietăți punctuale la proprietăți locale. Pe lîngă propoziția 4, nr. 3, valabilă mai general pentru fascicule de tip finit, demonstrăm în această privință:

*) Pentru prescurtare nu am notat restricțiile cu indicele U .

Teorema 4.1) *Un fascicol $\mathcal{F}$ coerent are proprietatea: Pentru orice punct $x \in X$ există o vecinătate W și un șir exact*

$$\mathcal{A}_W^p \xrightarrow{v} \mathcal{A}_W^q \xrightarrow{u} \mathcal{F}_W \rightarrow 0, \quad (7)$$

p și q fiind două numere întregi ≥ 0 .

2) *Reciproc, dacă $\mathcal{A}$ este coerent (considerat ca fascicol de $\mathcal{A}$ -module) și $\mathcal{F}$ are proprietatea de la punctul 1), atunci $\mathcal{F}$ este coerent.*

1) *Proprietatea rezultă imediat din 1° și 2°', definiția 3, nr. 4.*

2) *Fasciculele $\mathcal{A}^p$ și $\mathcal{A}^q$ sînt coerente după consecința 7. Deoarece $\mathcal{F}_W \simeq \text{coker}(\mathcal{A}_W^p \rightarrow \mathcal{A}_W^q)$, după teorema 1 rezultă că $\mathcal{F}$ este coerent.*

Se vede că în ipoteza $\mathcal{A}$ -coerent, toate fasciculele coerente se obțin local sub forma de conuclee de morfisme $\mathcal{A}^p \rightarrow \mathcal{A}^q$ (abstracție făcînd de un izomorfism).

Definiția 4. Fie $\mathcal{A}$ un fascicol de inele pe X . Un fascicol de $\mathcal{A}$ -module $\mathcal{F}$ se numește fascicol de *prezentare finită*, dacă pentru orice $x \in X$ există o vecinătate W și un șir exact

$$\mathcal{A}_W^p \rightarrow \mathcal{A}_W^q \rightarrow \mathcal{F}_W \rightarrow 0,$$

unde p și q sînt două numere întregi ≥ 0 .

În cazul în care $\mathcal{A}$ este fascicol coerent, fasciculele de prezentare finită și cele coerente coincid, iar proprietatea la punctul 1) teorema 4 poate fi luată drept definiție pentru fasciculele coerente. Vom vedea că acesta este tocmai cazul, în care vom folosi fasciculele coerente (cap. III, § 7). Fasciculele de prezentare finită se folosesc în teoria spațiilor analitice [42].

Observația 7. Deoarece $\mathcal{A}$ este întotdeauna de tip finit, $\mathcal{A}$ este coerent atunci și numai atunci cînd oricare ar fi deschisul $U \subset X$ și secțiunile $s_j \in \Gamma(U, \mathcal{A})$, $j = 1, \dots, p$, p arbitrar, fascicolul relațiilor $\mathfrak{R}(s_1, \dots, s_p)$ este de tip finit în U . În acest caz $\mathfrak{R}(s_1, \dots, s_p)$ este și coerent.

Mai mult, dacă $\mathcal{A}$ și $\mathcal{F}$ sînt coerente, iar $f_1, \dots, f_p$ sînt secțiuni din $\Gamma(X, \mathcal{F})$, atunci $\mathfrak{M}(f_1, \dots, f_p)$ și $\mathfrak{R}(f_1, \dots, f_p)$ sînt coerente ca fiind

im u și $\ker u$ în morfismul $u: \mathcal{A}^p \rightarrow \mathcal{F}$ determinat de secțiunile $f_j, j = 1, \dots, p$. Aceeași observație dacă înlocuim X cu o submulțime $W \subset X$ și dacă $f_j \in \Gamma(W, \mathcal{F})$.

Observația 8. Dacă $\mathcal{A}$ este coerent, în definiția coerentei fascicolului de $\mathcal{A}$ -module $\mathcal{F}$ se poate înlocui condiția 2° prin condiția mai slabă, dată de proprietatea din teorema 4.1), care se poate formula și astfel:

2^{IV}. Oricare ar fi $x \in X$, există o vecinătate U a lui X și un număr întreg $q \geq 0$, astfel încît $\mathcal{F} \simeq \mathcal{A}_U^q / \mathcal{N}$, unde $\mathcal{N}$ este un subfascicol al lui $\mathcal{A}_U^q$ de tip finit.

Prin urmare, în loc de a cere ca pentru orice morfism $u: \mathcal{A}_U \rightarrow \mathcal{F}_U$, $\ker u$ să fie de tip finit, se cere această condiție numai pentru un morfism surjectiv.

§ 6. Teoreme de prelungire

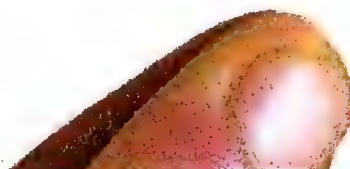
1. Scopul acestui paragraf constă în a demonstra că în anumite condiții un fascicol coerent definit pe un compact Y din spațiul topologic de bază X se prelungește printr-un fascicol coerent pe o vecinătate a lui Y .

Vom începe prin câteva definiții și convenții.

Fie Y o submulțime a lui X , inzestrată cu topologia indusă și $\mathcal{A}$ un fascicol de inele ca și în §§ 4 și 5.

Definiția 1. Numim *fascicol de $\mathcal{A}$ -module pe Y* un fascicol de $\mathcal{A}_Y$ -module. Un fascicol de $\mathcal{A}$ -module pe Y se numește *de tip finit* resp. *coerent*, dacă este fascicol de $\mathcal{A}_Y$ -module de tip finit resp. coerent.

Fascicolele pe care le vom considera în cele ce urmează vor fi fascicole de $\mathcal{A}$ -module (pe X sau pe o submulțime a sa) și pentru prescurtare nu vom repeta mereu această proprietate. De asemenea, vom scrie fascicol de tip finit sau coerent pe Y în loc de fascicol de $\mathcal{A}_Y$ -module de tip finit resp. coerent.



2. Vom demonstra mai întâi o teoremă de prelungire a morfismelor de la un punct la o vecinătate a lui. În acest scop vom folosi

Propoziția 1. Fie $\mathcal{F}$ și $\mathcal{Q}$ două fascicule de $\mathcal{A}$ -module, $\mathcal{F}$ de tip finit, și $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{Q}$, $\psi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{Q}$ două morfisme. Mulțimea $M = \{x \in X \mid \varphi_x = \psi_x\}$ este deschisă.

Fie $x_0 \in M$. Există o vecinătate U a lui x_0 și secțiunile $s_j \in \Gamma(U, \mathcal{F})$, $j = 1, \dots, q$, astfel încît pentru orice $x \in U$, fibra $\mathcal{F}_x$ este $\mathcal{A}_x$ -modulul generat de $s_1(x), \dots, s_q(x)$. Deoarece $\varphi \circ s_j$ și $\psi \circ s_j$ sînt secțiuni în $\mathcal{Q}$ peste U și coincid în x_0 , există o vecinătate W a lui x_0 , $W \subset U$, în care $\varphi \circ s_j = \psi \circ s_j$. Dar, oricare ar fi $x \in W$,

un element arbitrar $c \in \mathcal{F}_x$ este de forma $c = \sum_{j=1}^p a_j s_j(x)$, deci $\varphi(c) = \psi(c)$ sau $\varphi_x = \psi_x$.

Teorema 1. Dacă $\mathcal{F}$ și $\mathcal{Q}$ sînt fascicule pe X , $\mathcal{F}$ coerent, și dacă pentru un punct $x \in X$, există un omomorfism $\Phi_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{Q}_x$, atunci există o vecinătate U a lui x , astfel încît Φ_x se prelungește la un morfism $\Phi: \mathcal{F}_U \rightarrow \mathcal{Q}_U$.

Deoarece $\mathcal{F}$ este de tip finit, există o vecinătate U_0 a lui x și un număr finit q de secțiuni $s_j \in \Gamma(U_0, \mathcal{F})$, $j = 1, \dots, q$, astfel încît oricare ar fi $y \in U_0$ un element oarecare din $\mathcal{F}_y$ se scrie sub forma

$$\sum_{j=1}^q a_j s_j(y), \text{ cu } a = (a_1, \dots, a_q) \in \mathcal{A}_y^q.$$

Există o vecinătate U_1 a lui x , $U_1 \subset U_0$, și secțiunile $S_j \in \Gamma(U_1, \mathcal{Q})$, cu proprietatea $S_j(x) = \Phi_x[s_j(x)]$, $j = 1, \dots, q$.

Definim aplicația $\Phi_y: \mathcal{F}_y \rightarrow \mathcal{Q}_y$, $y \in U_1$, prin relația $\Phi_y \left[\sum_{j=1}^q a_j s_j(y) \right] = \sum_{j=1}^q a_j S_j(y)$, oricare ar fi $a \in \mathcal{A}_y^q$. Să arătăm că Φ_y este univoc determinată într-o vecinătate a lui x . Pentru aceasta este suficient să verificăm că

$$\sum_{j=1}^q a_j s_j(y) = 0_y \in \mathcal{F}_y \Rightarrow \sum_{j=1}^q a_j S_j(y) = 0_y \in \mathcal{Q}_y, \quad (1)$$

pentru y dintr-o anumită vecinătate a lui x .

Fascicolul $\mathcal{F}$ fiind coerent, fascicolul $\mathfrak{R}(s_1, \dots, s_q)$ este de tip finit pe U_0 , deci există o vecinătate U_2 a lui x , $U_2 \subset U_1$, și un număr finit p de secțiuni $c_k = (c_{k1}, \dots, c_{kq}) \in \Gamma[U_2, \mathfrak{R}(s_1, \dots, s_q)]$ care generează în fiecare punct $y \in U_2$, fibra $\mathfrak{R}_y(s_1, \dots, s_q)$ ca $\mathcal{A}_y$ -modul. Prin urmare, pentru orice $y \in U_2$ avem

$$\sum_{j=1}^q c_{kj}(y) s_j(y) = 0_y \in \mathcal{F}_y, \quad k = 1, \dots, p \quad (2)$$

și dacă

$$\sum_{j=1}^q a_j s_j(y) = 0_y \in \mathcal{F}_y, \quad (3)$$

atunci există $b = (b_1, \dots, b_p) \in \mathcal{A}_y^p$, astfel încît

$$a = \sum_{k=1}^p b_k c_k(y). \quad (4)$$

Deoarece Φ_x este un omomorfism, (2) implică

$$\sum_{j=1}^q c_{kj}(x) S_j(x) = 0_x \in \mathcal{Q}_x, \quad k = 1, \dots, p. \quad (5)$$

Cum $\sum_{j=1}^q c_{kj} S_j \in \Gamma(U_2, \mathcal{Q})$, relația (5) arată că există o vecinătate U a lui x , $U \subset U_2$, astfel încît restricția $\sum_{j=1}^q c_{kj} S_j = 0 \in \Gamma(U, \mathcal{Q})$.

În concluzie, dacă $y \in U$, din (3) rezultă

$$\sum_{j=1}^q a_j S_j(y) = \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^q b_k c_{kj}(y) S_j(y) = 0_y \in \mathcal{Q}_y.$$

Prin construcție aplicația $\Phi_y: \mathcal{F}_y \rightarrow \mathcal{Q}_y$ este un $\mathcal{A}_y$ -omomorfism, $y \in U$.

Să verificăm că aplicația $\Phi: \mathcal{F}_U \rightarrow \mathcal{Q}_U$, de fibră Φ_y , este continuă.

Fie $\sum_{j=1}^q a_j s_j(y)$ un element oarecare din $\mathcal{F}_U$ de proiecție y , un

punct arbitrar din U . Există vecinătatea W a lui y din U și secțiunile $t_j \in \Gamma(W, \underline{\mathcal{A}})$ cu $t_j(y) = a_j$, $j = 1, \dots, q$, deci

$$s = \sum_{j=1}^q t_j s_j \in \Gamma(W, \underline{\mathcal{F}}) \text{ și } S = \sum_{j=1}^q t_j S_j \in \Gamma(W, \underline{\mathcal{Q}}).$$

Se vede că $\Phi \circ s = S$ și cum $s: W \rightarrow s(W)$ resp. $S: W \rightarrow S(W)$ sînt omeomorfisme, rezultă că Φ este un omeomorfism: $s(W) \rightarrow S(W)$, iar $s(W)$ și $S(W)$ sînt deschise, care conțin elementele $s(y) = \sum_{j=1}^q a_j s_j(y)$ resp. $\Phi[s(y)]$.

3. Pentru a demonstra o teoremă de prelungire a morfismelor de la un compact la o vecinătate a sa, vom introduce o nouă ipoteză relativ la spațiul X .

Teorema 2. *Fie X un spațiu topologic cu sistem fundamental de vecinătăți închise în fiecare punct, Y un compact din X , $\underline{\mathcal{F}}$ și $\underline{\mathcal{Q}}$ două fascicule pe X , $\underline{\mathcal{F}}$ coerent și $\varphi: \underline{\mathcal{F}}_Y \rightarrow \underline{\mathcal{Q}}_Y$ un morfism. Atunci φ se prelungește la un morfism $\Phi: \underline{\mathcal{F}}_U \rightarrow \underline{\mathcal{Q}}_U$, U fiind o vecinătate convenabilă a lui Y .*

1) Oricare ar fi punctul $x \in Y$, conform teoremei 1 există o vecinătate ω a lui x în X la care φ_x se prelungește printr-un morfism $\varphi_\omega: \underline{\mathcal{F}}_\omega \rightarrow \underline{\mathcal{Q}}_\omega$. Deoarece φ și φ_ω sînt definite pe $\underline{\mathcal{F}}_\omega \cap Y$ și coincid pe $\underline{\mathcal{F}}_x$, după propoziția 1 există o vecinătate W a lui x , $W \subset \omega$, astfel încît $\varphi|_{W \cap Y} = \varphi_\omega|_{W \cap Y}$. Notăm $\varphi_\omega|_W = \varphi_W$.

2) Din faptul că Y este compact, rezultă că un număr finit de deschise W : fie $W_1, \dots, W_N$ formează o acoperire a lui Y . Notînd $\varphi_j = \varphi_{W_j}$, avem $\varphi_j = \varphi$ pe $\underline{\mathcal{F}}_{W_j \cap Y}$ și deci $\varphi_j = \varphi_i$ pe $\underline{\mathcal{F}}_{W_{ij} \cap Y}$.

3) Deoarece orice punct din X are un sistem fundamental de vecinătăți închise, putem construi o acoperire deschisă $\{V_j\}$, $j = 1, \dots, N$, a lui Y , cu $\bar{V}_j \subset W_j$ (*).

*) Oricare ar fi $p \in Y$, cum p aparține unui W_j există o vecinătate u a lui p cu $\bar{u} \subset W_j$. Din acoperirea $\{u\}_{p \in Y}$ a lui Y extragem o acoperire finită $u^1, \dots, u^r$ și luăm $V_j = \bigcup_{\bar{u}^i \subset W_j} u^i$ sau $\emptyset$, dacă nici un $\bar{u}^i$ nu este inclus în W_j .

Să notăm $M = \bigcup_{j=1}^N \bar{V}_j$ și $\psi_j = \varphi_j|_{\bar{V}_j}$. Pentru fiecare punct $x \in M$, putem grupa indicii j în mulțimea $\{j_1, \dots, j_s\}$ ($\neq \emptyset$, cu $1 \leq s \leq N$) și (dacă $s < N$) mulțimea complementară $\{j_{s+1}, \dots, j_N\}$, astfel încît $x \in \bigcap_{h=1}^s \bar{V}_{j_h}$ și (dacă $s < N$) $x \notin \bigcup_{h=s+1}^N \bar{V}_{j_h}$.

Mulțimea Δ a punctelor $x \in M$, unde morfismele $\psi_{j_h x}: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{Q}_x$, $h = 1, \dots, s$, coincid, este deschisă în M : Într-adevăr, pentru orice $x \in M$, există o vecinătate $\mathcal{O}$ a lui x în X , care nu intersectează $\bigcup_{h=s+1}^N \bar{V}_{j_h}$ și este inclusă în $\bigcap_{h=1}^s W_{j_h}$. Dacă $x \in \Delta$, aplicînd propoziția 1, deducem că există o vecinătate $\mathcal{W}$ a lui x în X , $\mathcal{W} \subset \mathcal{O}$, în care φ_{j_h} , $h = 1, \dots, s$, au aceleași fibre. Prin urmare, $\mathcal{W} \cap M \subset \Delta$, i.e. $\Delta = \Omega \cap M$, cu Ω deschis în X .

Cum $Y \subset \Delta \cap (\bigcup_{j=1}^N V_j) = \Omega \cap (\bigcup_{j=1}^N V_j) = U$ și φ se prelungește la morfismul $\Phi: \mathcal{F}_U \rightarrow \mathcal{Q}_U$, unde $\Phi_x = \psi_{j_x}$ dacă $x \in V_j$, teorema 2 este demonstrată.

4. Teorema 3. Fie X un spațiu Hausdorff cu sistem fundamental de vecinătăți închise în fiecare punct, Y un compact din X , $\mathcal{A}$ un fascicol de inele coerent pe X și $\mathcal{F}$ un fascicol coerent pe Y (de $\mathcal{A}_Y$ -module). Atunci există vecinătatea U a lui Y în X și fascicolul coerent $\mathcal{Q}$ pe U , astfel încît $\mathcal{Q}_Y \simeq \mathcal{F}$.

1) Vom construi mai întîi, pentru fiecare punct $x \in Y$, un fascicol coerent definit pe o vecinătate W a lui x , care pe $W \cap Y$ să fie izomorf cu $\mathcal{F}_{W \cap Y}$. Din teorema 4, § 5, nr. 8, rezultă că, oricare ar fi $x \in Y$, există o vecinătate W_0 a lui x și un șir exact

$$\mathcal{A}_{W_0 \cap Y}^p \xrightarrow{v} \mathcal{A}_{W_0 \cap Y}^q \xrightarrow{u} \mathcal{F}_{W_0 \cap Y} \rightarrow 0. \quad (6)$$

Aplicînd teorema 1, deducem că există o vecinătate W_1 a lui x , $W_1 \subset W_0$, și un morfism $\tilde{v}: \mathcal{A}_{W_1}^p \rightarrow \mathcal{A}_{W_1}^q$, astfel încît $\tilde{v}_x = v_x$. Pe $W_1 \cap Y$ sînt definite ambele morfisme v și $\tilde{v}$, deci conform pro-

poziției 1, există o vecinătate W a lui x , $W \subset W_1$, cu proprietatea că $\tilde{v}|_{W \cap Y} = v|_{W \cap Y}$. Fascicolul $\underline{Q} = (\text{coker } \tilde{v})_W$ este un fascicol coerent pe W , iar restricția sa la $W \cap Y$ este izomorfă cu $\underline{F}_{W \cap Y}$.

2) Fiindcă Y este compact, el este acoperit de un număr finit de deschise W . Fie $W_1, \dots, W_N$ aceste deschise, $\underline{Q}^j$ fascicolul coerent pe W_j construit la punctul 1) și τ_j izomorfismul: $\underline{Q}^j_{W_j \cap Y} \rightarrow \underline{F}_{W_j \cap Y}$. Pe $W_{ij} \cap Y^*$, avem izomorfismul $\tau_{ji}: \underline{Q}^i_{W_{ij} \cap Y} \rightarrow \underline{Q}^j_{W_{ij} \cap Y}$, definit prin relația $\tau_{ji} = \tau_j^{-1} \circ \tau_i$. Evident, $\tau_{ii} = 1_{\underline{Q}^i_{W_i \cap Y}}$ și $\tau_{ik} \circ \tau_{kj} \circ \tau_{ji} = 1_{\underline{Q}^i_{W_{ijk} \cap Y}}$.

Repetînd procedeul de la teorema 2, construim acoperirea $\{V_j\}_{j=1, \dots, N}$ a lui Y cu $\bar{V}_j \subset W_j$ și notăm $M = \bigcup_{j=1}^N \bar{V}_j$.

Oricare ar fi indicii $i, j = 1, \dots, N$, restricțiile fasciculelor $\underline{Q}^i$ și $\underline{Q}^j$ la W_{ij} sînt coerente, mulțimea $Y_{ij} = \bar{V}_i \cap \bar{V}_j \cap Y$ este un compact din W_{ij} și $\tau_{ij}|_{Y_{ij}}$ un izomorfism: $\underline{Q}^j_{Y_{ij}} \rightarrow \underline{Q}^i_{Y_{ij}}$. Conform lemei 1 de mai jos și teoremei 2 aplicate repetat, există un deschis $U^{ij} (= U^{ji})$ din X , astfel încît:

- $Y_{ij} \subset U^{ij} \subset W_{ij}$;
- $\tau_{ij}|_{Y_{ij}}$ se prelungește la un izomorfism $\tau_{ij}: \underline{Q}^j_{U^{ij}} \rightarrow \underline{Q}^i_{U^{ij}}$;
- $U^{ii} = W_i$ și $\tau_{ii} = 1_{\underline{Q}^i_{W_i}}$ și
- $\tau_{ik} \circ \tau_{kj} \circ \tau_{ji} = 1_{\underline{Q}^i_{U^{ijk}}}$, $U^{ijk} = U^{ij} \cap U^{jk} \cap U^{ki}$.

Într-adevăr există un deschis U_1^{ij} , $Y_{ij} \subset U_1^{ij} \subset W_{ij}$, și un morfism τ_{ij} , care prelungește $\tau_{ij}|_{Y_{ij}}$ la $\underline{Q}^j_{U_1^{ij}}$. Morfismul $\tau_{ij} \circ \tau_{ji}$ este definit pe $\underline{Q}^i_{U_1^{ij} \cap U_1^{ji}}$ și coincide cu identitatea pe $\underline{Q}^i_{Y_{ij}}$. Există deci un

*) Convenim ca intersecțiile de mulțimi considerate în cursul demonstrației să fie nevide, exceptînd atunci cînd vom menționa contrariul, și notăm restricțiile ca și morfismele inițiale.

deschis U_2^{ij} , $Y_{ij} \subset U_2^{ij} \subset U_1^{ij} \cap U_1^{ji}$, astfel încît $\tau_{ij} \circ \tau_{ji} = 1_{\underline{U}_2^{ij}}$.

Condițiile a)–c) sînt verificate luînd $U_3^{ij} = U_2^{ij} \cap U_2^{ji}$.

Pentru a realiza și ultima condiție ordonăm tripletele de indici. Fie (i, j, k) primul triplet. Dacă $U_3^{ijk} = U_3^{ij} \cap U_3^{jk} \cap U_3^{ki} = \emptyset$ sau dacă $U_3^{ijk} \neq \emptyset$ și $\tau_{ik} \circ \tau_{kj} \circ \tau_{ji} = 1_{\underline{U}_3^{ijk}}$, considerăm condiția

d) verificată de tripletul (i, j, k) și trecem la tripletul următor. În cazul contrar, dacă $Y_{ijk} = Y_{ij} \cap Y_{jk} \cap Y_{ki} \neq \emptyset$ există un deschis U_4^{ijk} , $Y_{ijk} \subset U_4^{ijk} \subset U_3^{ijk}$, pentru care $\tau_{ik} \circ \tau_{kj} \circ \tau_{ji} = 1_{\underline{U}_4^{ijk}}$

și după lema 1 există deschisele U_4^{st} , astfel încît $Y^{st} \subset U_4^{st} \subset U_3^{st}$, unde $(s, t) = (i, j), (j, k), (k, i)$, și $U_4^{ij} \cap U_4^{jk} \cap U_4^{ki} = U_4^{ijk}$. În ipoteza $Y_{ijk} = \emptyset$, aplicăm lema 1, pentru $U_4^{ijk} = \emptyset$. Pentru perechile de indici (s, t) diferite de $(i, j), (j, k)$ și (k, i) (dacă există) luăm $U_4^{st} = U_3^{st}$. Condiția d) este astfel verificată pentru tripletul (i, j, k) . Continuăm, considerînd tripletul următor. Procedeu se termină după un număr finit de etape. Luăm $U^{st} = U_q^{st}$ pentru q corespunzător ultimei etape și $s, t = 1, \dots, N$.

3) Fie Δ mulțimea punctelor $x \in M$ cu proprietatea următoare: oricare ar fi indicii $i, j = 1, \dots, N$, dacă $x \in \bar{V}_i \cap \bar{V}_j$, atunci $x \in U^{ij}$.

Să arătăm că $Y \subset \Delta$: În acest scop, să asociem fiecărui punct $x \in Y$ o vecinătate $\mathcal{O}$, astfel încît $\mathcal{O} \subset M \cap \left(\bigcap_{h=1}^s W_{j_h} \right)$, iar $\mathcal{O} \cap \left(\bigcup_{h=s+1}^N \bar{V}_{j_h} \right) = \emptyset$. Mulțimea $\Omega = \mathcal{O} \cap \left(\bigcap_{i,j \in \{j_1, \dots, j_s\}} U^{ij} \right)$ este o vecinătate a lui x , inclusă în Δ . Într-adevăr, $x \in \mathcal{O}$ și $x \in Y_{ij}$ pentru $i, j \in \{j_1, \dots, j_s\}$, iar $Y_{ij} \subset U^{ij}$, deci $x \in \Omega$. Dacă $y \in \Omega$, atunci $y \in M$ și dacă $y \in \bar{V}_i \cap \bar{V}_j$, atunci $i, j \in \{j_1, \dots, j_s\}$, deci $y \in U^{ij}$ prin construcția lui Ω . Prin urmare, $y \in \Omega$ implică $y \in \Delta$.

Fie $U_j = \Delta \cap V_j$, $j = 1, \dots, N$ și $U = \bigcup_{j=1}^N U_j$. Mulțimea U este

deschisă și include pe Y . Totodată $U_{ij} \subset \Delta \cap \bar{V}_i \cap \bar{V}_j \subset U^{ij}$.

Fasciculele $\underline{Q}_{U_j}^i$ și izomorfismele $\tau_{ij}|_{U_{ij}}$ ne dau prin racordare (§ 1, nr. 6, § 4, nr. 6, § 5, nr. 4, observația 6) un fascicol coerent $\underline{Q}$ definit pe U , avînd restricția $\underline{Q}_Y$ izomorfă cu $\underline{F}$.

Izomorfismul dintre $\underline{Q}_Y$ și $\underline{F}$ rezultă din unicitatea racordării, ținînd seama că pe Y pentru acoperirea $\{Y \cap U_j\}_{j=1, \dots, N}$ fascicolul $\underline{Q}_Y$ se obține racordînd $\underline{Q}_{Y \cap U_j}^i$, fascicolul $\underline{F}$ poate fi privit ca racordarea fasciculelor $\underline{F}_{Y \cap U_j}$, iar $\underline{Q}_{Y \cap U_j}^i$ și $\underline{F}_{Y \cap U_j}$ sînt izomorfe prin τ_j .

L e m a 1. *Date într-un spațiu topologic separat compactele K_j , deschisele $V_j \supset K_j$, $j = 1, \dots, n$, și un deschis W , astfel încît $V_1 \dots n \supset W \supset K_1 \dots n$, există deschisele W_j cu următoarele proprietăți:*

$$V_j \supset W_j \supset K_j \text{ și } W_{1 \dots n} = W^*).$$

1) Fie $n = 2$. Compactele $H_j = K_j - W$ sînt disjuncte, deci există deschisele U_j , astfel încît $U_j \supset H_j$ și $U_{12} = \emptyset$. Putem presupune $V_j \supset U_j$. Deschisele $W_j = U_j \cup W$ satisfac condițiile cerute în enunț.

2) Procedînd prin inducție, presupunem lema adevărată pentru $n - 1$ și aplicăm rezultatul stabilit la punctul 1) pentru deschisele $V_{1 \dots n-1} \supset K_{1 \dots n-1}$ și $V_n \supset K_n$. Există deci deschisele $W^{1 \dots n-1}$ și W_n , astfel încît $V_{1 \dots n-1} \supset W^{1 \dots n-1} \supset K_{1 \dots n-1}$, respectiv $V_n \supset W_n \supset K_n$ și $W^{1 \dots n-1} \cap W_n = W$. Deoarece lema este adevărată pentru $n - 1$, există deschisele W_j , $j = 1, \dots, n - 1$, cu proprietățile $V_j \supset W_j \supset K_j$ și $W_{1 \dots n-1} = W^{1 \dots n-1}$. Aceste deschise împreună cu W_n satisfac condițiile lemei.

§ 7. Coomologie cu coeficienți într-un fascicol

Un instrument deosebit de important pentru demonstrarea teoremelor fundamentale relative la funcțiile analitice de mai multe variabile complexe, îl constituie teoria coomologiei. De exemplu,

*) Am notat ca de obicei $V_1 \cap \dots \cap V_n = V_{1 \dots n}$, $K_1 \cap \dots \cap K_n = K_{1 \dots n}$ etc.

cu ajutorul acestei teorii vom putea deduce exactitatea unui șir de secțiuni asociat unui șir exact de fascicule (completînd propoziția 6, § 4, nr. 4). Exactitatea șirului de secțiuni este însă o proprietate globală în timp ce exactitatea șirului de fascicule o proprietate punctuală, iar în cazul coerent locală ([44], p. 172).

Vom prezenta în cele ce urmează numai unele rezultate strict necesare din coomologia lui Čech. Teoria generală a coomologiei se găsește de ex. în lucrările [13], cap. IV; [51], cap. III, [84], cap. II și III.

1. *Coomologia unei acoperiri.* Fie X un spațiu topologic, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ o acoperire deschisă a lui X și $\mathcal{F}$ un fascicol de grupuri abeliene pe X . Reamintim notațiile: $U_{i_0 \dots i_n} = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_n}$ și $\Gamma(U, \mathcal{F})$ — grupul secțiunilor lui $\mathcal{F}$ peste deschisul U din X . Dacă $U = \emptyset$, convenim să luăm $\Gamma(U, \mathcal{F}) = 0$.

Definiția 1. Fie p un număr întreg ≥ 0 . Un p -colanț al acoperirii $\mathcal{U}$ este o aplicație c a lui I^{p+1} , care asociază fiecărui sistem $(i_0, \dots, i_p) \in I^{p+1}$ o secțiune $c_{i_0 \dots i_p} \in \Gamma(U_{i_0 \dots i_p}, \mathcal{F})$ și care este alternată, i.e. dacă $(j_0, \dots, j_p)$ este o permutare a indicilor $(i_0, \dots, i_p)$, iar $\varepsilon = \pm 1$ după paritatea acestei permutări, atunci $c_{j_0 \dots j_p} = \varepsilon c_{i_0 \dots i_p}$.

Mulțimea p -colanțurilor acoperirii $\mathcal{U}$ se organizează ca un grup abelian, folosind operația de adunare a secțiunilor din $\Gamma(U, \mathcal{F})$. Vom nota acest grup cu $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, iar suma directă a grupurilor $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ pentru $p \geq 0$, cu $C(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Vom introduce *operatorul de cofrontieră* $\delta: C(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, ca un endomorfism a cărui restricție la $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, notată $\delta^p: C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, este definită prin relația:

$$(\delta^p c)_{i_0 \dots i_{p+1}} = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j c_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_{p+1}}, \quad (1)$$

unde notația $i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_p$ arată că indicele i_j este omis, iar secțiunile din membrul stîng din (1) sînt restrînse la $U_{i_0 \dots i_{p+1}}$. Convenim

pentru simplificarea scrierii să suprimăm semnul restricției ori de câte ori sensul este evident.

Se verifică prin calcul direct că

$$\delta^p \circ \delta^{p-1} = 0. \quad (2)$$

Propoziția 1. $\ker \delta^0 = \Gamma(X, \underline{\mathcal{F}})$.

Fie $c \in C^0(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}})$ cu $\delta^0 c = 0$. Oricare ar fi $(i_0, i_1) \in I^2$, avem $(\delta^0 c)_{i_0 i_1} = c_{i_1} - c_{i_0} = 0$. Deci c definește o secțiune în $\underline{\mathcal{F}}$ peste X , pe care o vom nota cu aceeași literă, și anume $c(x) = c_i(x)$ dacă $x \in U_i$, oricare ar fi $i \in I$. Reciproc, orice secțiune $c \in \Gamma(X, \underline{\mathcal{F}})$ definește prin restricție un 0-colanț, notat c și care aparține nucleului lui δ^0 . Identificînd $\Gamma(X, \underline{\mathcal{F}})$ cu $\ker \delta^0$ pe baza acestui izomorfism și notînd cu i injectia corespunzătoare: $\Gamma(X, \underline{\mathcal{F}}) \rightarrow C^0(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}})$, putem scrie *complexul de grupuri* *)

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \underline{\mathcal{F}}) \xrightarrow{i} C^0(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}}) \xrightarrow{\delta^0} C^1(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}}) \xrightarrow{\delta^1} \dots C^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}}) \xrightarrow{\delta^p} \dots \quad (3)$$

Definiția 2. Un p -colanț c se numește p -cociclu, dacă $\delta^p c = 0$, i.e. $c \in \ker \delta^p$ și p -cofrontieră, dacă există un $(p-1)$ -colanț b , astfel încît $c = \delta^{p-1} b$, i.e. $c \in \operatorname{im} \delta^{p-1}$.

Vom nota cu

$$Z^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}}) = \ker \delta^p,$$

$$Z^0(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}}) = \Gamma(X, \underline{\mathcal{F}}), \text{ și cu}$$

$$B^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}}) = \operatorname{im} \delta^{p-1}, \quad p \geq 1.$$

*) Se numește *complex* într-o categorie abeliană un șir de obiecte și morfisme $\dots \rightarrow G^p \xrightarrow{d^p} G^{p+1} \rightarrow \dots$, $p \in \mathbb{Z}$, unde $d^p \circ d^{p-1} = 0$. Dacă $G^p = 0$ pentru $p < 0$, complexul se numește *pozitiv* sau *complex de colanțuri*. Complexele formează o categorie, pe care se introduc functorii Z^p , B^p , H^p , ca în definițiile 2 și 3 de mai jos. În cazul unui complex de colanțuri H^p se numește *functor* sau *obiect de coomologie de dimensiunea p* ([13], cap. IV, §1).

Relația (2) arată că $B^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}}) \subset Z^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}})$, astfel încît putem da

Definiția 3. Numim grup de p -coomologie (grup de coomologie de dimensiune p) al acoperirii $\mathcal{U}$ cu coeficienți în fascicolul $\underline{\mathcal{F}}$ grupul

$$H^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}}) = Z^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}}) / B^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}}), \quad p \geq 1, \quad (4)$$

respectiv

$$H^0(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}}) = \Gamma(X, \underline{\mathcal{F}}).$$

2. Coomologia spațiului X . Vom studia acum comportarea grupurilor de coomologie, atunci cînd trecem de la o acoperire la o rafinare a ei.

Definiția 4. Se spune că o acoperire $\mathcal{U}^* = \{U_\alpha^*\}_{\alpha \in A}$ a unui spațiu topologic X constituie o rafinare a acoperirii $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ (sau că este mai fină decît acoperirea $\mathcal{U}$), dacă există o aplicație $\Phi: A \rightarrow I$, astfel încît oricare ar fi $\alpha \in A$ să avem $U_\alpha^* \subset U_{\Phi(\alpha)}$.

Propoziția 2. Dacă $\mathcal{U}^*$ este o rafinare a lui $\mathcal{U}$, atunci Φ determină un omomorfism

$$\rho_\Phi: C(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}}) \rightarrow C(\mathcal{U}^*, \underline{\mathcal{F}}),$$

care aplică $C^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}})$ în $C^p(\mathcal{U}^*, \underline{\mathcal{F}})$ conform următoarei relații:
Pentru $c \in C^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}})$,

$$(\rho_\Phi c)_{\alpha_0 \dots \alpha_p} = c_{\Phi(\alpha_0) \dots \Phi(\alpha_p)}|_{U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}^*}. \quad (5)$$

Prin calcul direct se obține imediat că

$$\delta^p \circ \rho_\Phi = \rho_\Phi \circ \delta^p. \quad (6)$$

Datorită acestei proprietăți: $\rho_\Phi[Z^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}})] \subset Z^p(\mathcal{U}^*, \underline{\mathcal{F}})$ și $\rho_\Phi[B^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}})] \subset B^p(\mathcal{U}^*, \underline{\mathcal{F}})$, astfel încît ρ_Φ induce un omomorfism

$$\rho_\Phi^*: H^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}}) \rightarrow H^p(\mathcal{U}^*, \underline{\mathcal{F}}^*).$$

Pentru un p -cociclu $c \in Z^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}})$ vom nota cu $\dot{c} = c + B^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}})$ clasa lui c din $H^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}})$ și analog vom proceda pentru acoperirea $\mathcal{U}^*$. Atunci

$$\rho_\Phi^* \dot{c} = \overline{\rho_\Phi c^{**}}. \quad (7)$$

Propoziția 3. *Presupunînd mulțimea A de indici total ordonată, omomorfismul ρ_Φ^* nu depinde de Φ .*

În acest scop să considerăm o altă aplicație $\Psi: A \rightarrow I$ relativ la care $\mathcal{U}^*$ este o rafinare a lui $\mathcal{U}$. Prin urmare oricare ar fi α , avem $U_\alpha^* \subset U_{\Phi(\alpha)\Psi(\alpha)}$.

Vom defini o aplicație k numită *operator de omotopie*, care stabilește o legătură între colanțurile celor două acoperiri

$$k: C^{p+1}(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}}) \rightarrow C^p(\mathcal{U}^*, \underline{\mathcal{F}}), p \geq 0.$$

Dacă $c \in C^{p+1}(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}})$, atunci kc este p -colanțul din $C^p(\mathcal{U}^*, \underline{\mathcal{F}})$, care pentru $\alpha_0 < \dots < \alpha_p$ satisface relația

$$(kc)_{\alpha_0 \dots \alpha_p} = \sum_{j=0}^p (-1)^j c_{\Phi(\alpha_0) \dots \Phi(\alpha_j) \Psi(\alpha_j) \dots \Psi(\alpha_p)}. \quad (8)$$

Pentru un sistem $(\alpha_0, \dots, \alpha_p) \in A^{p+1}$ arbitrar, kc se obține ținînd seama că este o aplicație alternată în raport cu indicii. Evident, k este un omomorfism.

) În general dacă $\rho: Z \rightarrow Z^$ este un omomorfism de grupuri, iar B și B^* sînt subgrupuri normale în Z resp. Z^* , astfel încît $\rho(B) \subset B^*$, ρ induce un omomorfism ρ^* între grupurile cit: $Z/B \rightarrow Z^*/B^*$.

**) Pentru $p=0$, ρ_Φ^* este un izomorfism, și anume pe baza identificării lui $H^0(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}})$ cu $\Gamma(X, \underline{\mathcal{F}})$ el devine izomorfismul identic.

Propoziția 4. Dacă $p \geq 1$, atunci aplicația $C^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}}) \rightarrow C^p(\mathcal{U}^*, \underline{\mathcal{F}})$:

$$k \circ \delta + \delta \circ k = \rho_{\Psi} - \rho_{\Phi}. \quad (9)$$

Dacă $p = 0$, atunci

$$k \circ \delta = \rho_{\Psi} - \rho_{\Phi}. \quad (9')$$

Indicăm de exemplu verificarea relației (9). Fie $c \in C^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}})$, $p \geq 1$ și $\alpha_0 < \dots < \alpha_p$. Avem

$$\begin{aligned} [(k \circ \delta + \delta \circ k)c]_{\alpha_0 \dots \alpha_p} &= \sum_{j=0}^p (-1)^j (\delta c)_{\Phi(\alpha_0) \dots \Phi(\alpha_j) \Psi(\alpha_j) \dots \Psi(\alpha_p)} + \\ &+ \sum_{u=0}^p (-1)^u (kc)_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_u \dots \alpha_p} = \\ &= \sum_{j=1}^p (-1)^j \sum_{u=0}^{j-1} (-1)^u c_{\Phi(\alpha_0) \dots \widehat{\Phi(\alpha_u)} \dots \Phi(\alpha_j) \Psi(\alpha_j) \dots \Psi(\alpha_p)} + \\ &+ \sum_{j=0}^p c_{\Phi(\alpha_0) \dots \Phi(\alpha_{j-1}) \Psi(\alpha_j) \dots \Psi(\alpha_p)} - \\ &- \sum_{j=0}^p c_{\Phi(\alpha_0) \dots \Phi(\alpha_j) \Psi(\alpha_{j+1}) \dots \Psi(\alpha_p)} + \\ &+ \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j \sum_{u=j+1}^p (-1)^{u+1} c_{\Phi(\alpha_0) \dots \Phi(\alpha_j) \Psi(\alpha_j) \dots \widehat{\Psi(\alpha_u)} \dots \Psi(\alpha_p)} + \\ &+ \sum_{u=1}^p (-1)^u \sum_{j=0}^{u-1} (-1)^j c_{\Phi(\alpha_0) \dots \Phi(\alpha_j) \Psi(\alpha_j) \dots \widehat{\Psi(\alpha_u)} \dots \Psi(\alpha_p)} + \\ &+ \sum_{u=0}^{p-1} (-1)^u \sum_{j=u+1}^p (-1)^{j-1} c_{\Phi(\alpha_0) \dots \widehat{\Phi(\alpha_u)} \dots \Phi(\alpha_j) \Psi(\alpha_j) \dots \Psi(\alpha_p)}. \end{aligned}$$

Prima și a șasea sumă resp. a patra și a cincea se reduc, iar din a doua și a treia rămâne $c_{\Psi(\alpha_0) \dots \Psi(\alpha_p)} - c_{\Phi(\alpha_0) \dots \Phi(\alpha_p)}$. Dacă $(\alpha_0, \dots, \alpha_p)$

este arbitrar, rezultatul se păstrează, după cum se vede efectuind o transpoziție a doi indici vecini.

Relația (9) implică $\rho_\Phi^* = \rho_\Psi^*$. Într-adevăr, dacă $p \geq 1$ și $c \in \in Z^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}})$ atunci $(\rho_\Psi - \rho_\Phi) c = \delta(kc) \in B^p(\mathcal{U}^*, \underline{\mathcal{F}})$ și $\widehat{\rho_\Psi c} = \widehat{\rho_\Phi c}$. Prin urmare, dacă acoperirea $\mathcal{U}^*$ este o rafinare a acoperirii $\mathcal{U}$, omomorfismul ρ_Φ^* este independent de Φ , de aceea vom nota ρ_Φ^* — punînd în evidență numai acoperirile $\mathcal{U}$ și $\mathcal{U}^*$ — cu $\sigma(\mathcal{U}, \mathcal{U}^*) : H^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}}) \rightarrow H^p(\mathcal{U}^*, \underline{\mathcal{F}})$.

Observația 1. Omomorfismul σ are următoarea *proprietate de tranzitivitate*: Dacă $\mathcal{U}^*$ este o rafinare a lui $\mathcal{U}$ și $\mathcal{U}^{**}$ o rafinare a lui $\mathcal{U}^*$, atunci $\sigma(\mathcal{U}, \mathcal{U}^{**}) = \sigma(\mathcal{U}^*, \mathcal{U}^{**}) \circ \sigma(\mathcal{U}, \mathcal{U}^*)$.

Observația 2. Dacă acoperirea $\mathcal{U}^*$ este o rafinare a lui $\mathcal{U}$ și $\mathcal{U}$ este o rafinare a lui $\mathcal{U}^*$, atunci $\sigma(\mathcal{U}, \mathcal{U}^*)$ este un izomorfism, deoarece $\sigma(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ este izomorfismul identic asociat aplicației $\Phi = 1_I$.

Vom considera mulțimea acoperirilor deschise ale spațiului topologic X și vom defini în această mulțime următoarea relație de echivalență: Două acoperiri $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ și $\mathcal{U}^* = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ sînt echivalente, dacă fiecare este o rafinare a celeilalte. Vom nota cu $\mathcal{U}$ clasa acoperirilor echivalente cu $\mathcal{U}$ și cu $\mathfrak{U}$ mulțimea acestor clase. Introducem în $\mathfrak{U}$ o relație de ordine parțială: $\mathcal{U} \leq \mathcal{U}^*$, dacă $\mathcal{U}^*$ este o rafinare a lui $\mathcal{U}$. În raport cu această relație $\mathfrak{U}$ este o mulțime filtrantă și crescător și descrescător: Într-adevăr date acoperirile $\mathcal{U}^k = \{U_i^k\}_{i \in I_k}$, $k = 1, 2$, acoperirea $\mathcal{U}^1 \cup \mathcal{U}^2$ este rafinată de fiecare dintre ele, iar acoperirea $\mathcal{U}^{12} = \{U_i^1 \cap U_j^2\}_{(i,j) \in I_1 \times I_2}$ le rafinează pe amîndouă.

Fiecărei clase $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}$ îi corespunde grupul $H^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}})$, determinat pînă la un izomorfism. Grupurile $H^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}})$ și omomorfismele $\sigma(\mathcal{U}, \mathcal{U}^*)$ formează un sistem inductiv filtrant peste $\mathfrak{U}$ ([13], p. 73). Într-adevăr, avem mulțimea $\{H^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}})\}_{\mathcal{U} \in \mathfrak{U}}$ și pentru $\mathcal{U} \leq \mathcal{U}^*$, morfismul $\sigma(\mathcal{U}, \mathcal{U}^*) : H^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}}) \rightarrow H^p(\mathcal{U}^*, \underline{\mathcal{F}})$ cu proprietă-

tile: 1) $\sigma(\mathcal{U}, \mathcal{U}) = 1_{H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})}$ și 2) $\sigma(\mathcal{U}, \mathcal{U}^{**}) = \sigma(\mathcal{U}^*, \mathcal{U}^{**}) \circ \sigma(\mathcal{U}, \mathcal{U}^*)$ pentru $\mathcal{U} \leq \mathcal{U}^* \leq \mathcal{U}^{**}$.

În categoria grupurilor abeliene există *limita inductivă a acestui sistem* $\lim_{\rightarrow} \{H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \sigma\} = H^p(X, \mathcal{F})$ ([13], p. 77).

Grupul $H^p(X, \mathcal{F})$ se definește introducând în suma directă a mulțimilor $H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ pentru $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}$, următoarea relație de echivalență: $\dot{c} \in H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ și $\dot{d} \in H^p(\tilde{\mathcal{U}}, \mathcal{F})$ sunt echivalente, dacă există $\mathcal{U}^*$, astfel încît $\mathcal{U}^* \geq \mathcal{U}$, $\mathcal{U}^* \geq \tilde{\mathcal{U}}$ și $\sigma(\mathcal{U}, \mathcal{U}^*) \dot{c} = \sigma(\tilde{\mathcal{U}}, \mathcal{U}^*) \dot{d}$. Vom nota clasa de echivalență a lui $\dot{c}$ cu $\{\dot{c}\}$, iar $H^p(X, \mathcal{F})$ va fi mulțimea claselor $\{\dot{c}\}$, pentru $\dot{c} \in H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ și $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}$, care se organizează în mod natural ca grup abelian, punînd pentru $\dot{c}_k \in H^p(\mathcal{U}_k, \mathcal{F})$ și $\mathcal{U} \geq \mathcal{U}_k$, $k = 1, 2$, $\{\dot{c}_1\} + \{\dot{c}_2\} = \{\sigma(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}) \dot{c}_1 + \sigma(\mathcal{U}_2, \mathcal{U}) \dot{c}_2\}$. Pentru fiecare $\mathcal{U}$ avem omomorfismul $\sigma(\mathcal{U}, X): H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^p(X, \mathcal{F})$ (bine determinat pînă la izomorfism), care asociază fiecărei clase $\dot{c} \in H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ clasa $\{\dot{c}\} \in H^p(X, \mathcal{F})$. Evident, dacă $\mathcal{U} \leq \mathcal{U}^*$, $\sigma(\mathcal{U}, X) = \sigma(\mathcal{U}^*, X) \circ \sigma(\mathcal{U}, \mathcal{U}^*)$. Se verifică, de asemenea ușor, proprietatea de universalitate a $\lim_{\rightarrow}$: Dacă H este un grup abelian și $S_{\mathcal{U}}: H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H$, o familie de omomorfisme indexată după mulțimea $\mathfrak{U}$ astfel încît pentru $\mathcal{U} \leq \mathcal{U}^*$, să avem $S_{\mathcal{U}} = S_{\mathcal{U}^*} \circ \sigma(\mathcal{U}, \mathcal{U}^*)$, vom defini omomorfismul $S = \lim_{\rightarrow} S_{\mathcal{U}}: H^p(X, \mathcal{F}) \rightarrow H$, punînd pentru $\dot{c} \in H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, $S\{\dot{c}\} = S_{\mathcal{U}} \dot{c}$. Avem $S \circ \sigma(\mathcal{U}, X) = S_{\mathcal{U}}$.

Definiția 5. Grupul $H^p(X, \mathcal{F})$ se numește *grupul de p-coomologie (grupul de coomologie de dimensiunea p) al spațiului topologic X cu coeficienți în $\mathcal{F}^*$)*.

*) A se vedea legătura cu functorii coomologici, [13], cap. IV, § 3 și § 8, precum și [51], p. 230, [24], p. 27, sau [44], p. 175.

În cazul $p = 0$, identificînd $H^0(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}})$ cu $\Gamma(X, \underline{\mathcal{F}})$ pentru orice $\mathcal{U}$, $\sigma(\mathcal{U}, \mathcal{U}^*)$ este izomorfismul identic, iar

$$H^0(X, \underline{\mathcal{F}}) = \Gamma(X, \underline{\mathcal{F}}).$$

Propoziția 5. Dacă $\mathcal{U}^*$ este o rafinare a lui $\mathcal{U}$ și $p = 1$, atunci $\sigma(\mathcal{U}, \mathcal{U}^*)$ este injectiv.

Fie $\Phi: A \rightarrow I$ aplicația ce definește rafinarea $\mathcal{U}^*$ a lui $\mathcal{U}$ și $c \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}})$, astfel încît $\sigma(\mathcal{U}, \mathcal{U}^*)c = 0$ sau $\rho_\Phi c \in B^1(\mathcal{U}^*, \underline{\mathcal{F}})$. Există deci $a \in C^0(\mathcal{U}^*, \underline{\mathcal{F}})$ pentru care $\rho_\Phi c = \delta a$. Oricare ar fi indicii α și β din A , avem $c_{\Phi(\alpha)\Phi(\beta)} = a_\beta - a_\alpha$ pe $U_{\alpha\beta}^*$. Ne propunem să construim un 0-colanț $b \in C^0(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}})$, astfel încît $c = \delta b$ sau $c_{ij} = b_j - b_i$, oricare ar fi i și j din I . Cum $U_i = \bigcup_{\alpha \in A} (U_i \cap U_\alpha^*)$ și cum avem $c_{\Phi(\alpha)i} + a_\alpha = c_{\Phi(\beta)i} + a_\beta$ pe $U_i \cap U_{\alpha\beta}^*$, problema se rezolvă luînd $b_i = c_{\Phi(\alpha)i} + a_\alpha$ pe $U_i \cap U_\alpha^*$.

3. Vom considera acum un morfism $u: \underline{\mathcal{F}} \rightarrow \underline{\mathcal{Q}}$ de fascicule de grupuri abeliene pe X și vom studia legătura dintre grupurile de coomologie $H^p(X, \underline{\mathcal{F}})$ și $H^p(X, \underline{\mathcal{Q}})$.

Morfismul u induce pentru orice deschis $U \subset X$ un omomorfism $\tilde{u}: \Gamma(U, \underline{\mathcal{F}}) \rightarrow \Gamma(U, \underline{\mathcal{Q}})$, care asociază fiecărei secțiuni $s \in \Gamma(U, \underline{\mathcal{F}})$ secțiunea $\tilde{u}(s) = u \circ s$ (propoziția 5, § 4, nr. 4) și pentru orice acoperire deschisă $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ a lui X un omomorfism, pe care îl vom nota $\hat{u}: C(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}}) \rightarrow C(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{Q}})$ și care asociază fiecărui colanț $c \in C^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}})$ colanțul uc , definit în modul următor:

$$(\hat{u}c)_{i_0 \dots i_p} = \tilde{u}(c_{i_0 \dots i_p}), (i_0, \dots, i_p) \in I^{p+1}. \quad (10)$$

Deoarece

$$\delta \circ \hat{u} = \hat{u} \circ \delta,$$

$\hat{u}$ induce un omomorfism $u^*: H^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}}) \rightarrow H^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{Q}})$, și anume

$$u^* \dot{c} = \hat{u} c, \quad (11)$$

pentru fiecare $\dot{c} \in H^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}})$ de reprezentant $c \in Z^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}})$.

Se verifică ușor că pentru o rafinare $\mathcal{U}^* = \{U_\alpha^*\}_{\alpha \in A}$ a acoperirii $\mathcal{U}$, dată de aplicația $\Phi: A \rightarrow I$, avem *)

$$\hat{u} \circ \rho_\Phi = \rho_\Phi \circ \hat{u}$$

și deci

$$u^* \circ \sigma(\mathcal{U}, \mathcal{U}^*) = \sigma(\mathcal{U}, \mathcal{U}^*) \circ u^*. \quad (12)$$

Relația (12) ne permite să trecem la limita inductivă peste $\mathfrak{U}$. În concluzie u determină un omomorfism, pe care îl vom nota tot $u^*: H^p(X, \underline{\mathcal{F}}) \rightarrow H^p(X, \underline{\mathcal{Q}})$ și anume, dacă $\{\dot{c}\}$ este un element arbitrar din $H^p(X, \underline{\mathcal{F}})$, unde $\dot{c} \in H^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}})$, prin definiție

$$u^* \{\dot{c}\} = \{u^* \dot{c}\} \quad (13)$$

din $H^p(X, \underline{\mathcal{Q}})^{**}$, ([13], p. 74, propoziția 3).

Propoziția 6. *Dat șirul exact de fascicule de grupuri abeliene pe X ,*

$$0 \rightarrow \underline{\mathcal{F}} \xrightarrow{u} \underline{\mathcal{Q}} \xrightarrow{v} \underline{\mathcal{K}} \rightarrow 0 \quad (14)$$

) Am însemnat cu ρ_Φ atât aplicația relativă la fascicolul $\underline{\mathcal{F}}$ cît și cea relativă la fascicolul $\underline{\mathcal{Q}}$; aceeași observație pentru $\sigma(\mathcal{U}, \mathcal{U}^)$. De asemenea $\hat{u}$ și u^* depind de acoperirea considerată; dacă am fi notat $u_{\mathcal{U}}^*: H^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}}) \rightarrow H^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{Q}})$, în relația (12) în loc de u^* am avea $u_{\mathcal{U}}^*$ în membrul stîng și $u_{\mathcal{U}}^*$ în cel drept.

**) Ținînd seama de nota precedentă, aplicația $u^*: H^p(X, \underline{\mathcal{F}}) \rightarrow H^p(X, \underline{\mathcal{Q}})$ se poate scrie $u^* = \varinjlim u_{\mathcal{U}}^*$.

avem șirurile exacte de grupuri

$$0 \rightarrow \Gamma(U, \underline{\mathcal{F}}) \xrightarrow{\tilde{u}} \Gamma(U, \underline{\mathcal{Q}}) \xrightarrow{\tilde{v}} \Gamma(U, \underline{\mathcal{H}}) \quad (15)$$

pentru orice deschis $U \subset X$ și

$$0 \rightarrow C(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}}) \xrightarrow{\hat{u}} C(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{Q}}) \xrightarrow{\hat{v}} C(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{H}}) \quad (16)$$

pentru orice acoperire $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ a lui X .

Exactitatea șirului (15) a fost demonstrată în § 4, nr. 4, propoziția 6. Să verificăm exactitatea șirului (16):

1) $\ker \hat{u} = 0$: Dacă $c \in C^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}}) \cap \ker \hat{u}$, atunci oricare ar fi sistemul de indici $(i_0, \dots, i_p) \in I^{p+1}$, avem $u \circ c_{i_0, \dots, i_p} = 0$. Prin urmare $c_{i_0, \dots, i_p} = 0$ sau $c = 0$.

2) $\ker \hat{v} = \text{im } \hat{u}$. Din relația $\widehat{v \circ u} = \hat{v} \circ \hat{u}$, rezultă $\text{im } \hat{u} \subset \ker \hat{v}$. Dacă $c \in \ker \hat{v}$, atunci $c = \hat{u} d$, unde pentru orice $(i_0, \dots, i_p) \in I^{p+1}$ $d_{i_0, \dots, i_p} = u^{-1} \circ c_{i_0, \dots, i_p}$, iar $u^{-1}: \text{im } u \rightarrow \underline{\mathcal{F}}$.

Observația 3. Exactitatea șirului (14) în $\mathcal{H}$ nu este necesară pentru a stabili exactitatea șirurilor (15) și (16) deci, ca și propoziția 6 din § 4, nr. 4, *propoziția 6 de mai sus rămâne valabilă pentru orice șir exact* $0 \rightarrow \underline{\mathcal{F}} \rightarrow \underline{\mathcal{Q}} \rightarrow \underline{\mathcal{H}}$.

După cum am remarcat și în § 4, chiar în ipoteza v surjectiv, omomorfismele $\tilde{v}$ și $\hat{v}$ nu sînt totdeauna surjective. De aceea, dat șirul exact (14), vom introduce grupul

$$C_*(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{H}}) = \hat{v}[C(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{Q}})],$$

numit *grupul colanțurilor ascendente*, pentru care putem scrie șirul exact

$$0 \rightarrow C(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}}) \xrightarrow{\hat{u}} C(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{Q}}) \xrightarrow{\hat{v}} C_*(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{H}}) \rightarrow 0, \quad (17)$$

unde $\hat{v}$ reprezintă acum corestricția aplicației $\hat{v}$ din șirul (16) la $C_*(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{H}})$.

Cum $\delta \circ \hat{v} = \hat{v} \circ \delta$, avem incluziunea

$$\delta^{p-1}[C_a^{p-1}(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{H}})] \subset C_a^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{H}}).$$

Fie δ_a restricția lui δ la $C_a(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{H}})$. Pentru $p \geq 1$, definim

$$Z_a^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{H}}) = \ker \delta_a^p = \ker \delta^p \cap C_a^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{H}}) \supset \hat{v}[Z^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{Q}})],$$

$$B_a^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{H}}) = \operatorname{im} \delta_a^{p-1} = \delta^{p-1}[C_a^{p-1}(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{H}})] = \hat{v}[B^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{Q}})] \subset \\ \subset B^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{H}}) \cap C_a^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{H}})$$

și

$$H_a^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{H}}) = Z_a^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{H}}) / B_a^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{H}}). \quad (18)$$

Pentru $p = 0$, vom lua

$$H_a^0(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{H}}) = \ker \delta_a^0. \quad (18')$$

Evident, $\hat{v} \Gamma[X, \underline{\mathcal{Q}}] = \Gamma_a(X, \underline{\mathcal{H}}) \subset H_a^0(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{H}}) = \Gamma(X, \underline{\mathcal{H}}) \cap C_a^0(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{H}})$.

Deoarece $Z_a^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{H}}) \subset Z^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{H}})$ și $B_a^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{H}}) \subset B^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{H}})$, avem omomorfismul canonic

$$\chi : H_a^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{H}}) \rightarrow H^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{H}}), \quad (19)$$

care pentru $p = 0$ se reduce la incluziune.

Vom defini acum un nou operator

$$d^* : H_a^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{H}}) \rightarrow H^{p+1}(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}}), \quad (20)$$

care justifică denumirea de colanțuri ascendente folosită mai sus.

Oricare ar fi $(\hat{h})_a \in H_a^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{H}})$, deoarece $h \in Z_a^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{H}})$, $\delta h = 0$ și există $g \in C^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{Q}})$ cu $\hat{v}g = h$. Atunci $\delta g \in C^{p+1}(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{Q}})$ și $\hat{v}(\delta g) = 0$, deci $\delta g \in \operatorname{im} \hat{u}$ și există $f \in C^{p+1}(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}})$ cu $\hat{u}f = \delta g$. Fiindcă $\hat{u}$ este injectiv, $f \in Z^{p+1}(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}})$. Vom asocia clasei

$(\dot{h})_a \in H_a^p(\mathcal{U}, \mathcal{H})$ clasa $\dot{f} \in H^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Această corespondență este independentă atât de reprezentantul h ales din clasa $(\dot{h})_a$ cît și de elementul g din $\hat{v}^{-1}(h)$: Fie $h^* \in (\dot{h})_a$, atunci $h^* = h + \delta b$ cu $b \in C_a^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{H})$ și $b = \hat{v}c$ cu $c \in C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{Q})$. Ca mai sus, există $g^* \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{Q})$, pentru care $\hat{v} g^* = h^*$ și $f^* \in Z^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ cu $\hat{u}f^* = \delta g^*$. Avem $\hat{u}(f^* - f) = \delta(g^* - g)$ și $\hat{v}(g^* - g) = \delta b = \hat{v} \delta c$. Prin urmare, $\hat{v}(g^* - g - \delta c) = 0$ și există $\varphi \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ pentru care $g^* - g - \delta c = \hat{u} \varphi$. Putem scrie $\hat{u}(f^* - f) = \hat{u} \delta \varphi$ și cum $\hat{u}$ este injectiv $f^* - f = \delta \varphi \in B^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ sau $\dot{f}^* = \dot{f}$. Vom nota d^* omomorfismul definit mai sus: $(\dot{h})_a \rightarrow \dot{f}$.

Teorema 1. Dacă șirul (14) este exact, atunci șirul

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{u^*} H^0(\mathcal{U}, \mathcal{Q}) \xrightarrow{v^*} H_a^0(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \xrightarrow{d^*} H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{u^*} \\ \rightarrow H^1(\mathcal{U}, \mathcal{Q}) \xrightarrow{v^*} \dots H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{u^*} H^p(\mathcal{U}, \mathcal{Q}) \xrightarrow{v^*} H_a^p(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \xrightarrow{d^*} \\ \rightarrow H^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{u^*} \dots \end{aligned} \quad (21)$$

este exact.

Deoarece șirul (15) este exact, va fi suficient să verificăm numai următoarele relații:

1) $\ker d^* = \operatorname{im} v^*$, $p \geq 0$.

Fie $(\dot{h})_a \in \operatorname{im} v^* \subset H_a^p(\mathcal{U}, \mathcal{H})$; $h = \hat{v}g$ cu $g \in Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{Q})$; $d^*(\dot{h})_a = \dot{f} \in H^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, unde $\hat{u}f = \delta g = 0$; rezultă $f = 0$ și $(\dot{h})_a \in \ker d^*$.

Invers, fie $(\dot{h})_a \in \ker d^*$; $h = \hat{v}g$ cu $\delta g = \hat{u}f$ și $f = \delta \varphi$, $\varphi \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$; prin urmare $\gamma = g - \hat{u} \varphi \in Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{Q})$, iar $\hat{v} \gamma = \hat{v}g$ sau $(\dot{h})_a = v^* \dot{\gamma} \in \operatorname{im} v^*$.

Pentru $p = 0$ raționamentele sînt aceleași cu evidente modificări de notație: de exemplu, în loc de $(\dot{h})_a$ vom avea h .

2) $\ker u^* = \operatorname{im} d^*$, $p \geq 1$.

Dacă $\dot{f} \in \text{im } d^*$, există $g \in C^{p-1}(\mathcal{U}, \underline{Q})$ astfel încît $\delta g = \hat{u}f$ sau $\hat{u}f \in B^p(\mathcal{U}, \underline{Q})$ și $\dot{f} \in \ker u^*$.

Invers, dacă $\dot{f} \in \ker u^*$, atunci $\hat{u}f = \delta g$ cu $g \in C^{p-1}(\mathcal{U}, \underline{Q})$ și, notînd $h = \hat{v}g$, avem $\delta h = 0$ și $\dot{f} = d^*(\dot{h})_a \in \text{im } d^*$. (Pentru $p = 1$, $\dot{f} = d^* h$).

3) $\ker v^* = \text{im } u^*$, $p \geq 1$.

$\text{im } u^* \subset \ker v^*$, deoarece $v^* \circ u^* = (v \circ u)^* = 0$.

Invers, dacă $\dot{g} \in \ker v^*$, $\hat{v}g = \delta \hat{v}\gamma$ cu $\gamma \in C^{p-1}(\mathcal{U}, \underline{Q})$ și $g - \delta\gamma = \hat{u}f$; dar atunci $\dot{g} = u^*\dot{f} \in \text{im } u^*$.

Să considerăm ca mai sus mulțimea filtrantă $\mathfrak{U}$ a claselor de acoperiri $\mathcal{U}$ ale lui X echivalente relativ la rafinare. Dacă $\mathcal{U} \leq \mathcal{U}^*$ omomorfismul $\sigma(\mathcal{U}, \mathcal{U}^*): H^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{H}}) \rightarrow H^p(\mathcal{U}^*, \underline{\mathcal{H}})$ induce un omomorfism $\sigma_a(\mathcal{U}, \mathcal{U}^*): H_a^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{H}}) \rightarrow H_a^p(\mathcal{U}^*, \underline{\mathcal{H}})$, definit prin $\sigma_a(\mathcal{U}, \mathcal{U}^*)(\dot{c})_a = (\widehat{\rho_\Phi c})_a$, dacă $c \in Z_a^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{H}})$ iar Φ este aplicația prin care $\mathcal{U}^*$ este o rafinare a lui $\mathcal{U}$.

Grupurile $H_a^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{H}})$ și omomorfismele σ_a formează un sistem inductiv filtrant peste $\mathfrak{U}$ și vom introduce grupul $H_a^p(X, \underline{\mathcal{H}})$ ca $\varinjlim \{H_a^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{H}}), \sigma_a\}$.

Deoarece $\sigma \circ \chi = \chi \circ \sigma_a$, trecînd la limita inductivă, obținem omomorfismul canonic, pe care îl vom nota din nou cu χ^*)

$$\chi: H_a^p(X, \underline{\mathcal{H}}) \rightarrow H^p(X, \underline{\mathcal{H}}) \quad (22)$$

unde $\chi\{(\dot{c})_a\} = \{\dot{c}\}$ pentru $\{(\dot{c})_a\} \in H_a^p(X, \underline{\mathcal{H}})$ și $p \geq 1$, iar χ este incluziunea pentru $p = 0$.

În categoria grupurilor abeliene functorul $\varinjlim$ (limita inductivă fiind relativă la o mulțime filtrantă) este exact, după cum se

*) Evident, folosind o notație mai completă, și anume notînd cu $\chi_{\mathcal{U}}$ în loc de χ omomorfismul (19), vom avea

$$\sigma(\mathcal{U}, \mathcal{U}^*) \circ \chi_{\mathcal{U}} = \chi_{\mathcal{U}^*} \circ \sigma_a(\mathcal{U}, \mathcal{U}^*), \text{ iar în (22), } \chi = \varinjlim \chi_{\mathcal{U}} \text{ după } \mathfrak{U}.$$

verifică direct ([13], p. 77, propoziția 5). Trecînd deci la limită inductivă în șirul exact (21) și notînd din nou cu u^* , v^* , d^* morfismele limită inductivă, obținem

Teorema 2. *Dacă șirul (14) este exact, atunci șirul*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(X, \underline{\mathcal{F}}) \rightarrow H^0(X, \underline{\mathcal{Q}}) \rightarrow H_a^0(X, \underline{\mathcal{H}}) \rightarrow H^1(X, \underline{\mathcal{F}}) \rightarrow \dots \\ \rightarrow H^p(X, \underline{\mathcal{F}}) \xrightarrow{u^*} H^p(X, \underline{\mathcal{Q}}) \xrightarrow{v^*} H_a^p(X, \underline{\mathcal{H}}) \xrightarrow{d^*} H^{p+1}(X, \underline{\mathcal{F}}) \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (23)$$

este exact.

Observația 3'. Ca și propoziția 6, teoremele 1 și 2 rămîn valabile dacă în locul șirului exact (14) avem doar șirul exact $0 \rightarrow \underline{\mathcal{F}} \rightarrow \underline{\mathcal{Q}} \rightarrow \underline{\mathcal{H}}$. Am prezentat totuși aceste rezultate în forma de mai sus, deoarece în cazuri foarte importante pentru aplicații, din exactitatea șirului (14) rezultă că χ , (22), este un izomorfism, deci $H_a^p(X, \underline{\mathcal{H}})$ se poate înlocui în (23) cu $H^p(X, \underline{\mathcal{H}})$. (Șirul astfel obținut din (23) se numește *șir exact de coomologie*.) Acesta este, de exemplu, cazul spațiilor paracompacte, cărora le consacram § 8. (A se vedea teorema 11, § 8, nr. 2.)

4. Fără a introduce nici o restricție relativ la spațiul X , ne vom ocupa acum de o clasă particulară de fascicule, *fasciculele flasce*, pentru care vom putea stabili mai întîi că functorul Γ este exact și apoi că grupurile de coomologie de dimensiune $p \geq 1$ sînt nule. Va rezulta în particular, $H_a^p(X, \underline{\mathcal{H}}) = H^p(X, \underline{\mathcal{H}})$, oricare ar fi $p \geq 0$, dacă fasciculele din (14) sînt flasce.

Noțiunea de fascicol flasc poate fi definită pentru orice fel de fascicol pe un spațiu topologic. Conform aplicațiilor pe care le urmărim, vom considera fascicule de grupuri abeliene pe X .

Definiția 6. Fascicolul $\underline{\mathcal{F}}$ se numește fascicol *flasc*, dacă oricare ar fi deschisul $U \subset X$ și secțiunea $s \in \Gamma(U, \underline{\mathcal{F}})$, există o secțiune $S \in \Gamma(X, \underline{\mathcal{F}})$ cu $S|_U = s$.

Evident, definiția 6 admite și următoarea formulare echivalentă:

Definiția 6'. Fascicolul $\underline{\mathcal{F}}$ se numește *flasc*, oricare ar fi deschisul $U \subset X$, omomorfismul de restricție: $\Gamma(X, \underline{\mathcal{F}}) \rightarrow \Gamma(U, \underline{\mathcal{F}})$ este surjectiv.

Exemplu: Fie $(\underline{\mathcal{F}}, \pi, X)$ un fascicol de grupuri abeliene pe X . Fascicolul germenilor de aplicații $f: U \rightarrow \underline{\mathcal{F}}$ cu $\pi \circ f = 1_U$, U deschis din X , numit uneori și fascicolul germenilor de secțiuni discontinue în $\underline{\mathcal{F}}$, este flasc.

Observația 4. Noțiunea de fascicol flasc este *locală*. Să presupunem că orice punct din X posedă o vecinătate peste care fascicolul $\underline{\mathcal{F}}$ este flasc. Fie $s \in \Gamma(U, \underline{\mathcal{F}})$, unde U este un deschis oarecare din X , și să notăm cu $\mathcal{L}$ mulțimea cuplurilor (s', U') , unde U' este un deschis din X care include U , $s' \in \Gamma(U', \underline{\mathcal{F}})$ și $s'|_U = s$. Introducem pe $\mathcal{L}$ relația de ordine parțială: $(s', U') \leq (s'', U'')$, dacă $U' \subset U''$ și $s''|_{U'} = s'$. Orice submulțime $\mathcal{L}^* \subset \mathcal{L}$ total ordonată, $\mathcal{L}^* = \{(s_i, U_i)\}_{i \in I}$, cu I total ordonată, are un element majorant în $\mathcal{L}$: $(\sigma, \bigcup_{i \in I} U_i)$, unde $\sigma|_{U_i} = s_i$, $i \in I$. Axioma lui Zorn arată deci că există un element maximal, de exemplu $(\tilde{s}, \tilde{U})$ în $\mathcal{L}$. Dacă $\tilde{U} \neq X$, există un deschis $V \not\subset \tilde{U}$, pe care $\underline{\mathcal{F}}$ este flasc, deci la care $\tilde{s}|_{V \cap \tilde{U}}$ se prelungește. (Dacă $V \cap \tilde{U} = \emptyset$, prelungirea lui $\tilde{s}$ la V este arbitrară.) Notînd tot cu $\tilde{s}$ această prelungire, obținem un element $(\tilde{s}, \tilde{U} \cup V)$ în $\mathcal{L}$, care arată că $(\tilde{s}, \tilde{U})$ nu este maximal, ceea ce constituie o contradicție. Prin urmare, $\tilde{U} = X$ și $\underline{\mathcal{F}}$ este flasc pe X .

Propoziția 7. *Dat șirul exact de fascicole și morfisme*
 $0 \rightarrow \underline{\mathcal{F}} \xrightarrow{u} \underline{\mathcal{Q}} \xrightarrow{v} \underline{\mathcal{K}} \rightarrow 0$ *pe* X , *dacă* $\underline{\mathcal{F}}$ *este flasc, atunci șirul de grupuri și omomorfisme*

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \underline{\mathcal{F}}) \xrightarrow{\tilde{u}} \Gamma(X, \underline{\mathcal{Q}}) \xrightarrow{\tilde{v}} \Gamma(X, \underline{\mathcal{K}}) \rightarrow 0 \quad (24)$$

este exact.

Conform propoziției 6, § 4, nr. 4 rămâne să arătăm numai că $\tilde{v}$ este surjectiv.

Fie $\sigma \in \Gamma(X, \underline{\mathcal{H}})$, $x_0 \in X$ arbitrar și $h_0 = \sigma(x_0)$. Cum v este surjectiv, există $g_0 \in \underline{Q}$ cu $v(g_0) = h_0$ și deci o vecinătate U a lui x_0 și o secțiune $\tau \in \Gamma(U, \underline{Q})$, astfel încît $v \circ \tau = \sigma$ pe U . Fie $\mathcal{L}$ mulțimea cuplurilor (s, V) , cu V deschis din X , $s \in \Gamma(V, \underline{Q})$ și $v \circ s = \sigma|_V$, ordonată ca mai sus prin prelungire: $(s_1, V_1) \leq (s_2, V_2)$, dacă $V_1 \subset V_2$ și $s_1 = s_2|_{V_1}$. Ca mai sus, submulțimile total ordonate ale lui $\mathcal{L}$ au element majorant în $\mathcal{L}$, deci $\mathcal{L}$ cuprinde un element maximal: fie $(\tilde{s}, \tilde{V})$. Dacă $\tilde{V} \neq X$, atunci există un deschis W din X , care nu este inclus în $\tilde{V}$ și o secțiune $t \in \Gamma(W, \underline{Q})$, astfel încît $v \circ t = \sigma|_W$. În cazul $\tilde{V} \cap W = \emptyset$, ω egal cu $\tilde{s}$ pe $\tilde{V}$ și cu t pe W ar determina un element $(\omega, \tilde{V} \cup W) \in \mathcal{L}$ și $(\tilde{s}, \tilde{V})$ nu ar fi maximal. Fie deci $\tilde{V} \cap W \neq \emptyset$. Pe $\tilde{V} \cap W$ avem $v \circ (\tilde{s} - t) = 0$, deci există o secțiune $f \in \Gamma(\tilde{V} \cap W, \underline{\mathcal{F}})$ astfel încît $u \circ f = \tilde{s} - t$ pe $\tilde{V} \cap W$. Dar $\underline{\mathcal{F}}$ este flasc, deci f se prelungește, la o secțiune peste X , pe care o vom nota tot f . Prin urmare $\tilde{s}$ pe $\tilde{V}$ și $u \circ f + t$ pe W definesc o secțiune $\omega \in \Gamma(\tilde{V} \cup W, \underline{Q})$, iar $v \circ \omega = \sigma$ pe $\tilde{V} \cup W$. Cum $(\omega, \tilde{V} \cup W)$ majorează pe $(\tilde{s}, \tilde{V})$ în $\mathcal{L}$, obținem din nou o contradicție. În concluzie $\tilde{V} = X$, iar $\tilde{s} \in \Gamma(X, \underline{Q})$ satisface relația $v \circ \tilde{s} = \sigma$.

Consecința 1. *Dat șirul exact de fascicule și morfisme $0 \rightarrow \underline{\mathcal{F}} \xrightarrow{u} \underline{Q} \xrightarrow{v} \underline{\mathcal{H}} \rightarrow 0$ pe X , dacă $\underline{\mathcal{F}}$ și $\underline{Q}$ sînt fascicule flasce, atunci și $\underline{\mathcal{H}}$ este flasc.*

Fie $\sigma \in \Gamma(U, \underline{\mathcal{H}})$, unde U este un deschis din X . Conform propoziției precedente, există $s \in \Gamma(U, \underline{Q})$ astfel încît $v \circ s = \sigma$. Dar $\underline{Q}$ fiind flasc, s se prelungește la o secțiune în $\underline{Q}$ peste X , pe care o vom nota tot s , iar $v \circ s$ prelungește σ la o secțiune în $\underline{\mathcal{H}}$ peste X .

Consecința 2. *Dacă*

$$0 \rightarrow \underline{\mathcal{F}}_0 \xrightarrow{d_0} \underline{\mathcal{F}}_1 \xrightarrow{d_1} \dots \rightarrow \underline{\mathcal{F}}_k \xrightarrow{d_k} \underline{\mathcal{F}}_{k+1} \rightarrow \dots \quad (25)$$

este un șir exact de fascicule flasce pe X , atunci șirul

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \underline{\mathcal{F}}_0) \xrightarrow{\tilde{d}_0} \Gamma(X, \underline{\mathcal{F}}_1) \xrightarrow{\tilde{d}_1} \dots \rightarrow \Gamma(X, \underline{\mathcal{F}}_k) \xrightarrow{\tilde{d}_k} \Gamma(X, \underline{\mathcal{F}}_{k+1}) \rightarrow \dots \quad (26)$$

este de asemenea exact.

Aplicăm propoziția 4, § 4, nr. 4, notînd $\underline{\mathcal{Q}}_k = \ker d_k$. Avem șirurile exacte

$$0 \rightarrow \underline{\mathcal{Q}}_k \rightarrow \underline{\mathcal{F}}_k \rightarrow \underline{\mathcal{Q}}_{k+1} \rightarrow 0.$$

Cum $\underline{\mathcal{Q}}_0 = \underline{\mathcal{F}}_0$, din consecința 1 rezultă că $\underline{\mathcal{Q}}_k$ sînt fascicule flasce, iar propoziția 7 ne dă exactitatea șirurilor

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \underline{\mathcal{Q}}_k) \rightarrow \Gamma(X, \underline{\mathcal{F}}_k) \rightarrow \Gamma(X, \underline{\mathcal{Q}}_{k+1}) \rightarrow 0,$$

de unde rezultă exactitatea șirului (26).

Teorema 3. *Fie $\underline{\mathcal{F}}$ un fascicol de grupuri abeliene flasc peste spațiul topologic X . Oricare ar fi acoperirea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ a lui X , avem $H^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}}) = 0$ pentru $p \geq 1$ și deci $H^p(X, \underline{\mathcal{F}}) = 0$.*

Vom demonstra teorema prin inducție după p .

1) *Cazul $p = 1$:* Fie $c \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}})$; să arătăm că există $b \in C^0(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}})$, astfel încît $c = \delta b$. Putem presupune că mulțimea I nu se reduce la un singur indice, deoarece atunci $C^1(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}}) = 0$. Să considerăm mulțimea $\mathcal{L}$ a cuplelor (b, J) , unde $J \subseteq I$ și b este o aplicație ce asociază fiecărui indice $i \in J$ o secțiune $b_i \in \Gamma(U_i, \underline{\mathcal{F}})$, astfel încît pentru orice pereche de indici $i, j \in J$, pentru care $U_{ij} \neq \emptyset$, să avem $c_{ij} = b_j - b_i$ în U_{ij} .

Mulțimea $\mathcal{L}$ nu este vidă. Ea cuprinde, de exemplu, o mulțime J formată din doi indici i și j , unde luăm $b_i = 0$ și b_j — restricția

la U_j a secțiunii din $\Gamma(X, \mathcal{F})$ obținută prelungind c_{ij} la X (ceea ce este posibil, $\mathcal{F}$ fiind flase).

Dacă $J \neq I$ și $\alpha \in I - J$, vom arăta că există b' , astfel încît $(b', J \cup \{\alpha\}) \in \mathcal{L}$. Pentru fiecare $i \in J$, luăm $b'_i = b_i$ și definim b'_α , cerînd ca pe $U_{\alpha i} \neq \emptyset$ să avem $b'_\alpha = b_i + c_{i\alpha}$. Dacă $U_\alpha \cap \bigcap_{i \in J} U_i \neq \emptyset$, b'_α este bine determinat pe $U_\alpha \cap \bigcap_{i \in J} U_i$, deoarece pentru $U_{\alpha ij} \neq \emptyset$ din relația $\delta c = 0$ rezultă $b'_i + c_{i\alpha} = b_j + c_{j\alpha}$ pe $U_{\alpha ij}$; definim b'_α pe U_α prin prelungire de la $U_\alpha \cap \bigcap_{i \in J} U_i$ la X și restricție la U_α . Dacă $U_\alpha \cap \bigcap_{i \in J} U_i = \emptyset$, atunci putem lua pentru b'_α orice secțiune din $\Gamma(U_\alpha, \mathcal{F})$.

Introducem pe $\mathcal{L}$ următoarea relație de ordine: $(b^*, J^*) \leq (\tilde{b}, \tilde{J})$, dacă $J^* \subset \tilde{J}$ și dacă $\tilde{b}|_{J^*} = b^*$. Submulțimile ordonate total ale lui $\mathcal{L}$ au element majorant în $\mathcal{L}$, deci $\mathcal{L}$ conține un element maximal, fie (b, J) . Dacă $J \neq I$, atunci construim ca mai sus pentru $\alpha \in I - J$, cuplul $(b', J \cup \{\alpha\}) \geq (b, J)$, ceea ce este absurd.

Prin urmare, $J = I$ și $b \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ cu $\delta b = c$.

2) *Cazul* $p > 1$. Presupunem teorema adevărată pentru orice spațiu topologic X , orice acoperire $\mathcal{U}$ a lui X și orice $(p-1)$ -ciclu din $Z^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Fie $c \in Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Prin urmare

$$\sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j c_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_{p+1}} = 0. \quad (27)$$

Vom demonstra că există $b \in C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, astfel încît $c = \delta b$.

Există cuple (b, J) , cu $J \subset I$ și b — o aplicație alternată, care asociază fiecărui sistem $(i_0, \dots, i_{p-1}) \in J^p$, secțiunea $b_{i_0 \dots i_{p-1}} \in \Gamma(U_{i_0 \dots i_{p-1}}, \mathcal{F})$, astfel încît pentru $(i_0, \dots, i_p) \in J^{p+1}$,

$$(\delta b)_{i_0 \dots i_p} = \sum_{s=0}^p (-1)^s b_{i_0 \dots \hat{i}_s \dots i_p} = c_{i_0 \dots i_p}. \quad (28)$$

De exemplu, luăm $J = \{i_0, \dots, i_p\} \subset I$, $b_{i_0 \dots i_p}$ — restricția la $U_{i_0 \dots i_p}$ a prelungirii *) lui $c_{i_0 \dots i_p}$ la X și $b_{i_0 \dots \hat{i}_t \dots i_p} = 0$, $t = 1, \dots, p$. (În cazul în care I nu conține $p+1$ indici diferiți, $Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$).

Fie (b, J) un cuplu de acest fel cu $J \neq I$ și $\alpha \in I - J$. Să construim b' definit pentru $J \cup \{\alpha\}$: Dacă $(i_0, \dots, i_{p-1}) \in J^p$, alegem $b'_{i_0 \dots i_{p-1}} = b_{i_0 \dots i_{p-1}}$. Secțiunile $b'_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_{p-1} \alpha}$ vor trebui să satisfacă în $U_{i_0 \dots i_{p-1} \alpha}$ relația

$$\sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j b'_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_{p-1} \alpha} = c_{i_0 \dots i_{p-1} \alpha} + (-1)^{p+1} b_{i_0 \dots i_{p-1}}. \quad (29)$$

Pentru a construi $b'_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_{p-1} \alpha}$, vom folosi ipoteza inducției. Fie α fix și $(i_0, \dots, i_{p-1})$ un element arbitrar din J^p . Atunci

$$c'_{i_0 \dots i_{p-1}} = c_{i_0 \dots i_{p-1} \alpha} + (-1)^{p+1} b_{i_0 \dots i_{p-1}} \quad (30)$$

este o secțiune din $\Gamma(U_{i_0 \dots i_{p-1} \alpha}, \mathcal{F})$ și definește un $(p-1)$ -colanț pentru acoperirea $\mathcal{U}^* = \{U_{\alpha i}\}_{i \in J}$ a spațiului $X^* = \bigcup_{i \in J} U_{\alpha i}$, pe care îl vom nota cu c^* . Prin urmare, $c^* \in C^{p-1}(\mathcal{U}^*, \mathcal{F}_{X^*})$, unde $\mathcal{F}_{X^*}$ este flasc pe X^* . Ținând seama de (27), (28) și (30), verificăm că $c^* \in Z^{p-1}(\mathcal{U}^*, \mathcal{F}_{X^*})$:

$$\begin{aligned} (\delta c^*)_{i_0 \dots i_p} &= \sum_{s=0}^p (-1)^s c^*_{i_0 \dots \hat{i}_s \dots i_p} = \sum_{s=0}^p (-1)^s c_{i_0 \dots \hat{i}_s \dots i_p \alpha} + \\ &+ (-1)^{p+1} \sum_{s=0}^p (-1)^s b_{i_0 \dots \hat{i}_s \dots i_p} = \\ &= \sum_{s=0}^p (-1)^s c_{i_0 \dots \hat{i}_s \dots i_p \alpha} + (-1)^{p+1} c_{i_0 \dots i_p} = (\delta c)_{i_0 \dots i_p \alpha} = 0. \end{aligned}$$

*) Evident putem efectua prelungirea lui $c_{i_0 \dots i_p}$ astfel încât să se păstreze relațiile $c_{j_0 \dots j_p} = \varepsilon c_{i_0 \dots i_p}$, unde $(j_0, \dots, j_p)$ este o permutare a lui $(i_0, \dots, i_p)$, iar $\varepsilon = \pm 1$ după paritatea permutării.

Ipoteza inducției ne asigură deci existența unui $(p-2)$ -colanț, $a \in C^{p-2}(\mathcal{U}^*, \underline{\mathcal{F}}_{X^*})$, astfel încît $c^* = \delta a$. Definim $b'_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_{p-1} \alpha}$ ca fiind restricția la $U_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_{p-1} \alpha}$ a prelungirii lui $a_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_{p-1}}$ la X .

Considerînd mulțimea $\mathcal{L}$ a cuplurilor (b, J) și repetînd raționamentul de la punctul 1), deducem existența unui cuplu maximal (b, I) , unde $b \in C^{p-1}(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}})$ și $\delta b = c$.

5. În § 8 vom studia pe spații paracompacte și alte cazuri de fascicule, care au proprietăți analoge cu propoziția 7 și teorema 3. După cum vom vedea în cele ce urmează, anularea anumitor grupuri de coomologie va juca un rol important. De aceea menționăm două observații evidente:

Observația 5. Fie $\underline{\mathcal{F}}$ un fascicol de grupuri abeliene pe un spațiu topologic X . Grupul $H^p(X, \underline{\mathcal{F}}) = 0$ pentru un $p \geq 1$, dacă și numai dacă oricare ar fi acoperirea $\mathcal{U}$ a lui X și $c \in Z^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}})$, există o rafinare $\mathcal{U}^*$ a lui $\mathcal{U}$, dată de o aplicație Φ , astfel încît $\rho_\Phi c \in B^p(\mathcal{U}^*, \underline{\mathcal{F}})$. Dacă $H^1(X, \underline{\mathcal{F}}) = 0$, atunci $H^1(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}}) = 0$ oricare ar fi acoperirea $\mathcal{U}$ (conform propoziției 5) și reciproc.

Observația 6. Dacă pentru acoperirea $\mathcal{U}$ a unui spațiu topologic X există un număr natural m , astfel încît intersecția a $m+1$ mulțimi diferite ale acoperirii să fie întotdeauna nulă, atunci $C^m(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}}) = 0$, deci $H^m(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}}) = 0$, oricare ar fi fascicolul $\underline{\mathcal{F}}$ de grupuri abeliene pe X .

Să presupunem că X are proprietatea:

i) Există un număr natural m , pentru care orice acoperire $\mathcal{U}$ a lui X admite o rafinare $\mathcal{U}^*$, astfel încît intersecția a $m+1$ mulțimi diferite arbitrare din $\mathcal{U}^*$ este nulă.

Atunci pentru orice fascicol $\underline{\mathcal{F}}$ și orice $p \geq m$ putem scrie $H^p(X, \underline{\mathcal{F}}) = 0$.

Spații cu proprietatea i) sînt, de exemplu, spațiile metrice, separabile de dimensiune $\leq n$, pentru care $m = n+1$ ([32], p. 60, teorema 6.1) și în cap. V, § 3, nr. 2, propoziția 2, vom folosi observația de mai sus.

6. În încheierea acestui paragraf vom stabili încă două propoziții, pe care le vom aplica ulterior.

Propoziția 8. Fie Y o submulțime închisă a spațiului topologic X și $\underline{\mathcal{F}}$ un fascicol de grupuri abeliene pe Y . Mulțimea $\widetilde{\underline{\mathcal{F}}} = \bigcup_{x \in X} \widetilde{\mathcal{F}}_x$, unde $\widetilde{\mathcal{F}}_x = \mathcal{F}_x$ dacă $x \in Y$ și $\widetilde{\mathcal{F}}_x = 0_x$ dacă $x \notin Y$, se organizează într-un singur mod ca fascicol peste X , pentru care $\widetilde{\underline{\mathcal{F}}}_Y = \underline{\mathcal{F}}$. Acest fascicol se numește prelungirea trivială a lui $\underline{\mathcal{F}}$ la X și are următoarea proprietate:

$$H^p(Y, \underline{\mathcal{F}}) \simeq H^p(X, \widetilde{\underline{\mathcal{F}}}). \quad (31)$$

1) Proiecția π este dată prin construcție. Vom defini un sistem fundamental de vecinătăți pentru elementele din $\widetilde{\underline{\mathcal{F}}}$ în modul următor: Dacă $x \in X - Y$ luăm ca vecinătate a lui 0_x mulțimea $\widetilde{\mathcal{F}}_U = \pi^{-1}(U)$, unde U este un deschis din X , $x \in U \subset X - Y$. Dacă $a \in \widetilde{\mathcal{F}}_x$ cu $x \in Y$, alegem un deschis Ω din $\underline{\mathcal{F}}$, astfel încât $a \in \Omega$ și $\pi|_{\Omega}$ să fie un omeomorfism a lui Ω pe un deschis din Y ; fie $\pi(\Omega) = U \cap Y$ cu U deschis în X ; luăm ca vecinătate a lui a mulțimea $\widetilde{\Omega} = \Omega \cup \widetilde{\mathcal{F}}_{U-Y}$.

2) Oricare ar fi deschisul $U \subset X$, vom nota cu $\widetilde{\varphi}$ aplicația care asociază fiecărei secțiuni $\widetilde{s} \in \Gamma(U, \widetilde{\underline{\mathcal{F}}})$ restricția sa $s = \widetilde{s}|_{U \cap Y} \in \Gamma(U \cap Y, \underline{\mathcal{F}})$.

Aplicația $\widetilde{\varphi}$ arată că $\Gamma(U, \widetilde{\underline{\mathcal{F}}}) \simeq \Gamma(U \cap Y, \underline{\mathcal{F}})$, ceea ce implică (31) pentru $p = 0$.

Unei acoperiri $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ a lui X îi vom asocia acum acoperirea $\mathcal{O} = \{V_i = U_i \cap Y\}_{i \in I}$ a lui Y . Aplicația $\widetilde{\varphi}$ induce izomorfismul $\widehat{\varphi}: C^p(\mathcal{U}, \widetilde{\underline{\mathcal{F}}}) \rightarrow C^p(\mathcal{O}, \underline{\mathcal{F}})$ care comută cu δ , astfel încât obținem izomorfismul $\varphi^*: H^p(\mathcal{U}, \widetilde{\underline{\mathcal{F}}}) \rightarrow H^p(\mathcal{O}, \underline{\mathcal{F}})$.

Să remarcăm că asocierea $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{O}$ de mai sus este surjectivă. Într-adevăr, dacă $\mathcal{O} = \{U_i \cap Y\}_{i \in I}$ putem lua $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I} \cup \{X - Y\}$, deoarece Y este închis. Considerînd mulțimea filtrantă inductiv $\mathfrak{A}$ a claselor de acoperiri $\mathcal{U}$ relative la

rafinare și ținând seama că aplicația $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ induce aplicația surjectivă $\tilde{\mathcal{U}} \rightarrow \tilde{\mathcal{V}}$, deducem: $H^p(X, \tilde{\mathcal{F}}) \simeq H^p(Y, \mathcal{F})$.

Propoziția 9. Fie X un spațiu topologic și $\mathcal{F}$ un fascicol de grupuri abeliene pe X . Oricare ar fi p și $q \geq 1$, avem

$$H^p(X, \mathcal{F}^q) \simeq [H^p(X, \mathcal{F})]^q. \quad (32)$$

Într-adevăr, oricare ar fi deschisul $U \subseteq X$, $\Gamma(U, \mathcal{F}^q) \simeq [\Gamma(U, \mathcal{F})]^q$. Prin urmare pentru orice acoperire $\mathcal{U}$, $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}^q) \simeq [C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})]^q$. Cum acest izomorfism permută cu δ , rezultă $H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}^q) \simeq [H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})]^q$. Trecând la limită inductivă, obținem (32).

§ 8. Coomologia spațiilor paracompacte

1. În acest paragraf vom aprofunda cazul spațiilor paracompacte, pentru care teorema lui de Rham arată că prin metoda dezvoltată în § 7 obținem un șir exact de coomologie. Aceste spații se bucură și de alte proprietăți remarcabile, astfel încât varietățile paracompacte constituie un cadru adecvat pentru stabilirea rezultatelor fundamentale ale teoriei funcțiilor analitice de mai multe variabile complexe.

Vom aminti mai întâi unele proprietăți ale spațiilor paracompacte care se găsesc demonstrate în [84] p. 70—81, [51] p. 186—188, și [29] p. 155, cu excepția teoremelor 1, 5 și 6 pentru care indicăm [58], p. 125 și 249, [12], cartea 3.

Definiția 1. Un spațiu topologic X se numește *paracompact*, dacă este un spațiu Hausdorff și dacă orice acoperire deschisă a sa admite o rafinare (definiția 4, § 7, nr. 2) local finită.

Teorema 1. Un subspațiu închis al unui spațiu paracompact este paracompact. Orice închis dintr-un spațiu paracompact are un sistem fundamental de vecinătăți închise, deci paracompacte.

Teorema 2. Suma topologică a unei familii de spații paracompacte este un spațiu paracompact.

Teorema 3. (*Dieudonné*). Orice spațiu paracompact este normal.

Teorema 4. Un spațiu local compact, numerabil la infinit*), în particular cu bază numerabilă, este paracompact.

Teorema 5. (*Stone*). Un spațiu metrizabil este paracompact. Orice submulțime a unui spațiu metrizabil, formînd subspațiu metrizabil, are un sistem fundamental de vecinătăți paracompacte.

Teorema 6. (*Uryson*). Un spațiu normal cu bază numerabilă este metrizabil și separabil.

Teorema 7. O acoperire a unui spațiu local compact, paracompact admite o rafinare local finită cu submulțimi relativ compacte.

Ca o consecință a teoremei 3, în cazul spațiilor paracompacte se aplică și

Teorema 8. Dacă $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ este o acoperire punctual finită (deci în particular, local finită) a unui spațiu normal X , există o rafinare $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$, astfel încît $\bar{V}_i \subset U_i$ oricare ar fi $i \in I$.

De asemenea vom folosi *partiția unității subordonată unei acoperiri*.

Teorema 9. Fie $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ o acoperire local finită a spațiului normal X . Atunci există o familie de funcții continue $\{f_i\}_{i \in I}$ cu următoarele proprietăți:

$$1^\circ f_i : X \rightarrow [0, +\infty).$$

$$2^\circ \text{supp } f_i \subset U_i.$$

*) Un spațiu topologic X se numește *numerabil la infinit*, dacă este o reuniune numerabilă de mulțimi compacte. Un spațiu local compact, numerabil la infinit se poate scrie sub forma

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n, \text{ cu } K_n \text{ compact și } K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}.$$

3° Oricare ar fi $x \in X$, $\sum_i f_i(x) = 1^*$.

2. Presupunînd spațiul topologic X paracompact, vom relua acum teoria coomologiei cu coeficienți într-un fascicol dezvoltată în § 7. Convenim să păstrăm notații folosite în acel paragraf.

Propoziția 1. Fie X un spațiu paracompact și $\underline{Q} \xrightarrow{v} \underline{\mathcal{H}} \rightarrow 0$ un șir exact de fascicule de grupuri abeliene pe X . Dacă $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ este o acoperire a lui X și $c \in C^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{H}})$, atunci există o rafinare $\mathcal{U}^* = \{U_\alpha^*\}_{\alpha \in A}$ a lui $\mathcal{U}$, astfel încît notînd cu Φ aplicația corespunzătoare rafinării, $\Phi: A \rightarrow I$, $U_\alpha^* \subset U_{\Phi(\alpha)}$, și cu ρ_Φ omomorfismul indus, $\rho_\Phi: C^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{H}}) \rightarrow C^p(\mathcal{U}^*, \underline{\mathcal{H}})$, să avem $\rho_\Phi c \in C_a^p(\mathcal{U}^*, \underline{\mathcal{H}}) = \hat{v}[C^p(\mathcal{U}^*, \underline{Q})]$.

Spațiul $\bar{X}$ este paracompact și, trecînd eventual la o rafinare, putem presupune acoperirea $\mathcal{U}$ local finită. Conform teoremei 8 există o acoperire $\mathcal{V}$ cu $\bar{V}_i \subset U_i$, oricare ar fi $i \in I$.

Vom forma acoperirea $\mathcal{U}^* = \{U_x^*\}_{x \in X}$, alegînd pentru fiecare punct $x \in X$, o vecinătate U_x^* cu următoarele proprietăți:

- 1° Dacă $x \in U_i$ (resp. V_i), atunci $U_x^* \subset U_i$ (resp. V_i).
- 2° Dacă $U_x^* \cap V_i \neq \emptyset$, atunci $U_x^* \subset U_i$.
- 3° Dacă $x \in U_{i_0 \dots i_p}$, există $s \in \Gamma(U_x^*, \underline{Q})$, astfel încît $v \circ s = c_{i_0 \dots i_p}|_{U_x^*}$.

Într-adevăr orice punct $x \in X$ are o vecinătate U_x^1 , care intersectează numai un număr finit de mulțimi U_i . Fie $U_{j_1}, \dots, U_{j_r}$ aceste mulțimi și (cu o numerotare convenabilă a indicilor) $V_{j_1}, \dots, V_{j_r}$ și $U_{j_1}, \dots, U_{j_r}$ ($r_2 \geq r_1$) mulțimile V_i resp. U_i , care

*) Pentru fiecare punct $x \in X$ există o vecinătate U , care intersectează numai un număr finit de mulțimi $U_{i_1}, \dots, U_{i_m}$ din $\mathcal{U}$. Prin urmare, $f_i(x) = 0$ pentru $i \neq$

$i_1, \dots, i_m$ și condiția 3° exprimă de fapt relația $\sum_{k=1}^m f_{i_k}(x) = 1$. S-a notat cu $\text{supp } f$ suportul funcției f , i.e. închiderea mulțimii $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$.

conțin punctul x . Orice vecinătate U_x^2 a lui x , inclusă în $U_x^1 \cap \bigcap V_{j_1 \dots j_{r_1}} \cap U_{j_{r_1+1} \dots j_{r_2}}$, satisface condiția 1°.

Să alegem acum o vecinătate U_x^3 a lui x , care să verifice atât condiția 1° cât și condiția 2°. Dacă $U_x^2 \cap V_i = \emptyset$ pentru $i = j_{r_1+1}, \dots, j_{r_2}$, atunci luăm $U_x^3 = U_x^2$. În cazul contrar, fie (cu o renumotare convenabilă a indicilor) $U_x^2 \cap V_{j_h} \neq \emptyset$ pentru $h = r_2 + 1, \dots, r_3$. Deoarece $x \notin U_{j_h}$, rezultă $x \notin \bar{V}_{j_h}$. Există deci o vecinătate u_x^h a lui x , astfel încît $u_x^h \cap V_{j_h} = \emptyset$ și vom lua pentru U_x^3 o vecinătate a lui x inclusă în $U_x^2 \cap u_x^{r_2+1} \cap \dots \cap u_x^{r_3}$.

Observația 1. În propoziția 2 de mai jos vom avea nevoie ca U_x^* să satisfacă condiția

2° $U_x^* \subset U_i$, dacă $x \in \bar{V}_i$ și $U_x^* \cap \bar{V}_i = \emptyset$ pentru toți ceilalți indici i . Cu notațiile introduse, 2° echivalează cu proprietatea $U_x^* \subset U$ dacă $i = j_1, \dots, j_{r_1}$ și $U_x^* \cap \bar{V}_i = \emptyset$ dacă $i \neq j_1, \dots, j_{r_1}$. Să remarcăm că pentru a realiza această condiție este suficient să aplicăm procedeul de mai sus cu o ușoară modificare: Dacă $U_x^2 \cap \bar{V}_i = \emptyset$ pentru $i \neq j_1, \dots, j_{r_1}$, luăm $U_x^3 = U_x^2$. În cazul contrar, avem $i = j_h$, unde h descrie o anumită submulțime a mulțimii $r_1 + 1, \dots, r$. Pentru fiecare dintre acești indici h , formăm u_x^h și luăm U_x^3 o vecinătate a lui x inclusă în $U_x^2 \cap (\bigcap_h u_x^h)$. De altfel metoda a fost utilizată și în § 1, nr. 4, propoziția 7.

Pentru a realiza și condiția 3° să remarcăm că, p fiind dat, deoarece $x \in U_i$ numai pentru $i = j_1, \dots, j_{r_1}$ putem forma un număr finit de sisteme $(i_0, \dots, i_p) \in I^{p+1}$, astfel încît $x \in U_{i_0, \dots, i_p}$. Fie $\mathfrak{J}$ mulțimea acestor sisteme și $(i_0, \dots, i_p) \in \mathfrak{J}$. Cum v este surjectiv, există după consecința 3 din § 1, nr. 4, o vecinătate $U_x(i_0, \dots, i_p)$ a lui x și o secțiune $s \in \Gamma[U_x(i_0, \dots, i_p), \underline{Q}]$, astfel încît $v \circ s = c_{i_0, \dots, i_p}$ pe $U_x(i_0, \dots, i_p)$. Să alegem o vecinătate U_x^* a lui x inclusă în $U_x^3 \cap [\bigcap_{(i_0, \dots, i_p) \in \mathfrak{J}} U_x(i_0, \dots, i_p)]$. Ea va satisface condițiile 1° — 3°.

Acoperirea $\mathcal{U}^*$ constituie o rafinare a lui $\mathcal{U}$ relativ la o aplicație $\Phi: X \rightarrow I$, aleasă astfel încît $x \in X$ să implice $U_x \subset \subset V_{\Phi(x)}$. Să verificăm că $\rho_\Phi c \in C_a^p(\mathcal{U}^*, \mathcal{H})$, i.e. că există un cointegral $g \in C^p(\mathcal{U}^*, \mathcal{Q})$, astfel încît $\hat{v}g = \rho_\Phi c$.

Vom numi echivalente două sisteme $(x_0, \dots, x_p)$ și $(\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_p)$ din X^{p+1} , care diferă printr-o permutare, vom nota cu $[(x_0, \dots, x_p)]$ clasa lui $(x_0, \dots, x_p)$ și cu $\mathcal{X}$ mulțimea acestor clase și vom alege în fiecare clasă un reprezentant fixat $(\xi_0, \dots, \xi_p)$. Dacă pentru $(x_0, \dots, x_p) \in X^{p+1}$, $U_{x_0 \dots x_p}^* = \emptyset$, atunci $g_{x_0 \dots x_p} = 0$. Fie $U_{x_0 \dots x_p}^* \neq \emptyset$ și $(\xi_0, \dots, \xi_p)$ reprezentantul fixat al clasei $[(x_0, \dots, x_p)]$. Cum $U_{x_0 \dots x_p}^* = U_{\xi_0 \dots \xi_p}^* \subset U_{\xi_0}^*$ și cum $U_{\xi_0 \dots \xi_p}^* \neq \emptyset$, rezultă că $U_{\xi_0}^* \cap V_{\Phi(\xi_0) \dots \Phi(\xi_p)} \neq \emptyset$ și după condiția 2°, $U_{\xi_0}^* \subset U_{\Phi(\xi_0) \dots \Phi(\xi_p)}$. Conform condiției 3°, definim $g_{\xi_0 \dots \xi_p} = s|_{U_{\xi_0 \dots \xi_p}^*}$, unde $s \in \Gamma(U_{\xi_0}^*, \mathcal{Q})$

și $v \circ s = c_{\Phi(\xi_0) \dots \Phi(\xi_p)}$ pe $U_{\xi_0}^*$. Apoi definim $g_{x_0 \dots x_p} = \varepsilon g_{\xi_0 \dots \xi_p}$, ε fiind paritatea permutării $(x_0, \dots, x_p) \rightarrow (\xi_0, \dots, \xi_p)$.

Cu ajutorul acestei propoziții, se obține imediat

Teorema 10. *Dacă spațiul X este paracompact, iar șirul $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ de fascicule de grupuri abeliene și morfisme pe X este exact, atunci omorfismul canonic*

$$\chi: H_a^p(X, \mathcal{H}) \rightarrow H^p(X, \mathcal{H}),$$

(22), § 7, nr. 3, este un izomorfism.

1) χ este injectiv: Fie $p \geq 1$ și $\{(\dot{c})_a\} \in H_a^p(X, \mathcal{H})$ cu $\{\dot{c}\} = \{\dot{0}\} \in H^p(X, \mathcal{H})$. Dacă $(\dot{c})_a \in H_a^p(\mathcal{U}, \mathcal{H})$, fie $\tilde{\mathcal{U}}$ o rafinare a lui $\mathcal{U}$ definită de aplicația $\tilde{\Phi}$, astfel încît $\sigma(\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}}) \dot{c} = \dot{0} \in H^p(\tilde{\mathcal{U}}, \mathcal{H})$. Prin urmare $\rho_{\tilde{\Phi}} c = \delta b$ cu $b \in C^{p-1}(\tilde{\mathcal{U}}, \mathcal{H})$. Din propoziția 1 deducem că există o rafinare $\mathcal{U}^*$ a lui $\tilde{\mathcal{U}}$ dată de o aplicație Φ^* , cu proprietatea că $\rho_{\Phi^*} b \in C_a^{p-1}(\mathcal{U}^*, \mathcal{H})$. Dar atunci $\rho_{\Phi^* \circ \tilde{\Phi}} c \in B_a^p(\mathcal{U}^*, \mathcal{H})$ și $\sigma_a(\mathcal{U}, \mathcal{U}^*) (\dot{c})_a = (\dot{0})_a$.

Dacă $p = 0$, χ este aplicația de incluziune, injectivă întotdeauna (independent de ipoteza X paracompact).

2) χ este surjectiv. Fie $\{\dot{c}\} \in H^p(X, \underline{\mathcal{H}})$ cu $\dot{c} \in H^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{H}})$, deci $c \in Z^p(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{H}})$. Conform propoziției 1, există o rafinare $\mathcal{U}^*$ a lui $\mathcal{U}$ de aplicație Φ , astfel încît $\rho_\Phi c \in C_a^p(\mathcal{U}^*, \underline{\mathcal{H}})$, deci $\rho_\Phi c \in Z_a^p(\mathcal{U}^*, \underline{\mathcal{H}})$. În concluzie, $\chi \{(\rho_\Phi c)_a\} = \{\dot{c}\}$.

Ținînd seama de teorema 10, obținem din teorema 2, § 7, nr. 3

Teorema 11. *Dacă X este un spațiu paracompact și $0 \rightarrow \underline{\mathcal{F}} \rightarrow \underline{\mathcal{Q}} \rightarrow \underline{\mathcal{H}} \rightarrow 0$ un șir exact de fascicule de grupuri abeliene și de morfisme pe X , avem șirul exact de coomologie*

$$0 \rightarrow H^0(X, \underline{\mathcal{F}}) \rightarrow H^0(X, \underline{\mathcal{Q}}) \rightarrow H^0(X, \underline{\mathcal{H}}) \rightarrow H^1(X, \underline{\mathcal{F}}) \rightarrow \dots \quad (1)$$

$$\dots \rightarrow H^p(X, \underline{\mathcal{F}}) \rightarrow H^p(X, \underline{\mathcal{Q}}) \rightarrow H^p(X, \underline{\mathcal{H}}) \rightarrow H^{p+1}(X, \underline{\mathcal{F}}) \rightarrow \dots$$

3. Vom stabili acum un procedeu important de a calcula grupurile de coomologie cu ajutorul unei rezoluții coomologice.

Definiția 2. Dacă $\underline{\mathcal{F}}$ este un fascicol de grupuri abeliene pe un spațiu topologic X , se numește *rezoluție coomologică* un șir exact de fascicule de grupuri abeliene și de morfisme pe X de forma

$$0 \rightarrow \underline{\mathcal{F}} \xrightarrow{\varepsilon} \underline{\mathcal{Q}}_0 \xrightarrow{d_0} \underline{\mathcal{Q}}_1 \xrightarrow{d_1} \underline{\mathcal{Q}}_2 \rightarrow \dots \rightarrow \underline{\mathcal{Q}}_k \xrightarrow{d_k} \underline{\mathcal{Q}}_{k+1} \rightarrow \dots$$

Teorema 12. (Teorema abstractă a lui de Rham.) Fie X un spațiu paracompact, $\underline{\mathcal{F}}$ un fascicol de grupuri abeliene pe X și

$$0 \rightarrow \underline{\mathcal{F}} \xrightarrow{\varepsilon} \underline{\mathcal{Q}}_0 \xrightarrow{d_0} \underline{\mathcal{Q}}_1 \xrightarrow{d_1} \dots \rightarrow \underline{\mathcal{Q}}_k \xrightarrow{d_k} \underline{\mathcal{Q}}_{k+1} \rightarrow \dots \quad (2)$$

un șir exact de fascicule de grupuri abeliene pe X și de morfisme. Dacă $H^p(X, \underline{\mathcal{Q}}_k) = 0$, oricare ar fi $p \geq 1$ și $k \geq 0$, atunci

$$H^p(X, \underline{\mathcal{F}}) \simeq \ker \tilde{d}_p / \operatorname{im} \tilde{d}_{p-1}, \quad p \geq 1, \quad (3)$$

unde am notat cu $\tilde{d}_k: \Gamma(X, \underline{Q}_k) \rightarrow \Gamma(X, \underline{Q}_{k+1})$, omomorfismul indus de d_k între grupurile de secțiuni *).

Fie $\mathcal{H}_k = \ker d_k = \text{im } d_{k-1}$, $k \geq 1$ și $\mathcal{H}_0 = \ker d_0 = \underline{\mathcal{F}}$. Vom păstra notația d_k și pentru corestricția lui d_k la $\mathcal{H}_{k+1}$. Avem astfel, pentru fiecare $k \geq 0$, șirul exact

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_k \rightarrow \underline{Q}_k \xrightarrow{d_k} \mathcal{H}_{k+1} \rightarrow 0. \quad (4)$$

Aplicînd teorema 11 și ținînd seama de ipoteza $H^p(X, \underline{Q}_k) = 0$, $p \geq 1$ și $k \geq 0$, vom scrie șirul exact

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{H}_k) \rightarrow \Gamma(X, \underline{Q}_k) \xrightarrow{\tilde{d}_k} \Gamma(X, \mathcal{H}_{k+1}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{H}_k) \rightarrow 0 \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow 0 \rightarrow H^q(X, \mathcal{H}_{k+1}) \rightarrow H^{q+1}(X, \mathcal{H}_k) \rightarrow 0 \rightarrow \dots, \end{aligned} \quad (5)$$

unde $q \geq 1$. Prin urmare, grupurile $H^q(X, \mathcal{H}_{k+1})$ și $H^{q+1}(X, \mathcal{H}_k)$ sînt izomorfe.

Fie $k = 0$ și $q + 1 = p \geq 2$. Conform (5) avem șirul de grupuri izomorfe

$$H^p(X, \underline{\mathcal{F}}) \simeq H^{p-1}(X, \mathcal{H}_1) \simeq \dots \simeq H^1(X, \mathcal{H}_{p-1}).$$

După primul șir scris în (5) pentru $k = p-1$, obținem

$$H^1(X, \mathcal{H}_{p-1}) \simeq \Gamma(X, \mathcal{H}_p) / \text{im } \tilde{d}_{p-1},$$

iar pentru $k = p$, $\Gamma(X, \mathcal{H}_p) = \ker \tilde{d}_p$, ceea ce demonstrează teorema în ipoteza $p \geq 2$.

*) Șirul $0 \rightarrow \Gamma(X, \underline{\mathcal{F}}) \xrightarrow{\tilde{d}_0} \Gamma(X, \underline{Q}_0) \xrightarrow{\tilde{d}_1} \Gamma(X, \underline{Q}_1) \xrightarrow{\tilde{d}_2} \dots$ nu este întotdeauna exact, dar este un complex.

Fără ipoteza $H^p(X, \underline{Q}_k) = 0$, $p \geq 1$ și $k \geq 0$, se obține numai un omomorfism $\ker \tilde{d}_p / \text{im } \tilde{d}_{p-1} \rightarrow H^p(X, \underline{\mathcal{F}})$, ([24], p. 29)

Cazul $p = 1$ rezultă folosind numai primul șir din (5). Pentru $k = 0$ avem

$$H^1(X, \underline{\mathcal{F}}) \simeq \Gamma(X, \underline{\mathcal{H}}_1) / \text{im } \tilde{d}_0,$$

iar $k = 1$ ne dă din nou $\Gamma(X, \underline{\mathcal{H}}_1) = \ker \tilde{d}_1$.

4. Teorema abstractă a lui de Rham pune în evidență importanța fasciculelor $\underline{\mathcal{F}}$ pentru care $H^p(X, \underline{\mathcal{F}}) = 0$, $p \geq 1$. În § 7, nr. 4 am studiat o clasă de fascicule cu această proprietate — fasciculele flasce. Vom introduce acum o altă clasă de fascicule, care în cazul spațiilor paracompacte include clasa fasciculelor flasce și are proprietăți analoge.

Definiția 3. Un fascicol $\underline{\mathcal{F}}$ pe spațiul topologic X se numește *moale*, dacă orice secțiune a lui $\underline{\mathcal{F}}$ peste un închis $Y \subset X$ se poate prelungi la o secțiune a lui $\underline{\mathcal{F}}$ peste X .

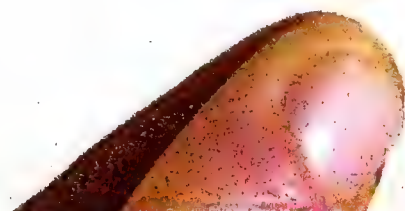
Fascicolul din exemplul dat în § 7, nr. 4 este evident moale.

Propoziția 2. Fie $\underline{\mathcal{F}}$ un fascicol peste spațiul topologic X și Y o submulțime a lui X , înzestrată cu un sistem fundamental de vecinătăți paracompacte, (în particular, fie X paracompact și Y o submulțime închisă a lui X sau X metrizabil și Y o submulțime oarecare a lui X). Orice secțiune $s \in \Gamma(Y, \underline{\mathcal{F}})$ se prelungește la o vecinătate a lui Y .

Oricare ar fi $x \in Y$, există o vecinătate U_x^1 a lui x și o secțiune $s^1 \in \Gamma(U_x^1, \underline{\mathcal{F}})$, astfel încît $s^1 = s$ pe $U_x^1 \cap Y^*$). Deoarece $Y \subset \bigcup_{x \in Y} U_x^1$, există X_1 paracompact, astfel încît $Y \subset \overset{\circ}{X}_1$ și $X_1 \subset \bigcup_{x \in Y} U_x^1$.

Continuăm raționamentul pe spațiul topologic X_1 . Mulțimile $U_x^1 \cap X_1$ formează pentru $x \in Y$ o acoperire a lui X_1 . Prin urmare există o rafinare local finită $\{U_i\}_{i \in I}$ a acoperirii $\{U_x^1 \cap X_1\}_{x \in Y}$, unde U_i sînt mulțimi deschise relativ la X_1 . Notăm cu $\Phi: I \rightarrow Y$ aplicația, care definește această rafinare. Există de asemenea o

*) Secțiunea s^1 depinde de x , dar pentru simplificare nu am notat explicit această dependență.



rafinare $\{V_i\}_{i \in I}$ a acoperirii $\{U_i\}_{i \in I}$ cu proprietatea că $\bar{V}_i \subset U_i$, pentru orice $i \in I$. (Mulțimile V_i sînt deschise relativ la X_1 și am notat cu $\bar{V}_i$ închiderea lui V_i relativ la X_1). Pentru fiecare indice $i \in I$, vom însemna cu s_i secțiunea din $\Gamma(U_i, \mathcal{F})$, obținută prin restricția la U_i a secțiunii $s^1 \in \Gamma(U_x^1, \mathcal{F})$, unde $x = \Phi(i)$. Evident $s_i = s$ pe $U_i \cap Y$, deci $s_i = s_j$ pe $U_{ij} \cap Y$, oricare ar fi $i, j \in I$.

Vom nota cu M mulțimea punctelor $x \in X_1$, care se bucură de următoarea proprietate: Oricare ar fi indicii i și j din I , astfel încît $x \in \bar{V}_i \cap \bar{V}_j$, avem $s_i(x) = s_j(x)$. Evident $Y \subset M$. Mulțimile $M_i = \bar{V}_i \cap M$, $i \in I$, formează o acoperire închisă și local finită a spațiului topologic M , iar secțiunile s_i și s_j coincid pe M_{ij} , oricare ar fi indicii $i, j \in I$ cu $M_{ij} \neq \emptyset$. Prin urmare, propoziția 7, § 1, nr. 4, arată că există o secțiune $\sigma \in \Gamma(M, \mathcal{F})$, definită prin relația $\sigma = s_i$ pe M_i , $i \in I$. Această secțiune prelungește pe s la M . Propoziția enunțată va rezulta verificînd incluziunea $Y \subset \overset{\circ}{M}$, unde $\overset{\circ}{M}$ este interiorul mulțimii M relativ la spațiul topologic X .

În spațiul topologic X_1 avem acoperirile $\{U_x^1 \cap X_1\}_{x \in Y}$, $\{U_i\}_{i \in I}$ și $\{V_i\}_{i \in I}$. Pentru fiecare $x \in Y$ să notăm cu j_h , $h = 1, \dots, s$, indicii i astfel încît $x \in \bigcap_{h=1}^s \bar{V}_{j_h}$ și $x \notin \bar{V}_i$, dacă $i \in I$ este diferit de $j_1, \dots, j_s$. După observația 1, putem lua o vecinătate U_x^* a lui x în X_1 , astfel încît $U_x^* \subset U_{j_1 \dots j_s}$ și $U_x^* \cap \bar{V}_i = \emptyset$ pentru $i \in I, i \neq j_1, \dots, j_s$. De asemenea putem alege U_x^* astfel încît secțiunile s_{j_h} , $h = 1, \dots, s$ (care sînt definite pe $U_{j_1 \dots j_s}$ și coincid în x) să coincidă pe U_x^* . Evident $U_x^* \subset M$.

Deoarece U_x^* este un deschis în X_1 , notînd cu $\overset{\circ}{X}_1$ interiorul lui X_1 relativ la X , deducem că mulțimea $U_x = U_x^* \cap \overset{\circ}{X}_1$ este un deschis în X . Pe de altă parte, $x \in U_x \subset M$.

Din propoziția 2 rezultă

Propoziția 3. *Orice fascicol $\mathcal{F}$ flasc pe spațiul X paracompact este moale.*

În cele ce urmează vom considera din nou fascicule de grupuri abeliene pe spațiul paracompact X . Printr-o simplă adaptare a demonstrațiilor din § 7, nr. 4, în care se folosește și teorema 8, se arată că observația 4, propoziția 7 și consecințele 1 și 2 din acel paragraf rămân valabile înlocuind cuvântul *flasc* prin *moale*. De asemenea, teorema 3, § 7, nr. 4 se păstrează cu următorul enunț

Teorema 13. *Dacă $\mathcal{F}$ este un fascicol moale pe spațiul X paracompact, atunci $H^p(X, \mathcal{F}) = 0$, $p \geq 1$.*

Nu ne vom opri însă asupra acestor rezultate [37], pe care nu le vom aplica, deoarece vom folosi doar o subclasă de fascicule moi, fasciculele fine.

Definiția 4. Fie $\mathcal{F}$ un fascicol de grupuri abeliene pe spațiul paracompact X și $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ o acoperire local finită a lui X . Spunem că fascicolul $\mathcal{F}$ admite o *partiție a unității subordonată acoperirii $\mathcal{U}$* , dacă există o familie de morfisme $\varphi_i: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, $i \in I$, astfel încât

1° Pentru fiecare i , avem o vecinătate W_i a lui $X - U_i$, pe care φ_i se reduce la aplicația nulă.

2° $\sum_{i \in I} \varphi_i = 1_{\mathcal{F}}$, (unde pe fiecare fibră $\sum_{i \in I} \varphi_i$ este morfismul sumă a unui număr finit de morfisme nenule).

Definiția 5. Un fascicol $\mathcal{F}$ de grupuri abeliene pe spațiul paracompact X se numește *fin*, dacă pentru orice acoperire local finită a lui X , admite o partiție a unității subordonată acestei acoperiri.

Exemplu. Fascicolul $\mathcal{O}(X)$ al germenilor de funcții continue pe X este fin. Într-adevăr, dată o acoperire local finită $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ a lui X , să considerăm o partiție a unității corespunzătoare $\{f_i\}_{i \in I}$ (teorema 9) și să definim familia de morfisme $\{\varphi_i\}_{i \in I}$. Pentru fiecare $i \in I$ și germene $f_x \in \mathcal{O}_x(X)$ de reprezentant (f, U) , (§ 3, nr. 2, 1)) vom lua $\varphi_i(f_x) = (f_i f)_x = f_{ix} f_x$. Analog se arată că fascicolul $\mathcal{O}(X)^m$, m număr natural, este fin *).

*) Alte fascicule fine vor fi considerate în cap. V, § 1.

Observația 2. Fie $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ o partiție a unității subordonată acoperirii $\mathcal{U}$ relativ la fascicolul $\underline{\mathcal{F}}$. Morfismul φ_i induce, oricare ar fi submulțimea $M \subset X$, un omomorfism $\Gamma(M, \underline{\mathcal{F}}) \rightarrow \Gamma(M, \underline{\mathcal{F}})$, care va fi notat prescurtat $\tilde{\varphi}_i$ și care este omomorfismul asociat restricției lui φ_i la $\underline{\mathcal{F}}_M$. Pentru orice secțiune $t \in \Gamma(M, \underline{\mathcal{F}})$ și $x \in M$, avem $[\tilde{\varphi}_i(t)](x) = \varphi_i[t(x)]$. Evident $\sum_{i \in I} \tilde{\varphi}_i(t) = t$.

În cazul $M = U_i$, secțiunea $\tilde{\varphi}_i(t)$ se prelungește cu 0 la o secțiune pe X , pe care o vom nota $\tilde{t}_i$.

Propoziția 4. Orice fascicol $\underline{\mathcal{F}}$ fin pe spațiul X paracompact este moale.

Să considerăm o secțiune arbitrară $s \in \Gamma(Y, \underline{\mathcal{F}})$, unde Y este un închis din X .

Pentru fiecare $x \in Y$ există o vecinătate $\hat{U}_x$ și o secțiune $\sigma \in \Gamma(\hat{U}_x, \underline{\mathcal{F}})$, astfel încît $\sigma = s$ pe $\hat{U}_x \cap Y$. Mulțimile $\{\hat{U}_x\}_{x \in Y}$ și $X - Y$ formează o acoperire a lui X , care admite o rafinare local finită $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de aplicație Φ . Definim $g_i \in \Gamma(U_i, \underline{\mathcal{F}})$, luînd g_i — secțiunea nulă, dacă $U_i \subset X - Y$ și g_i — restricția lui σ la U_i , dacă $\Phi(i) = x$. Evident, $g_i = s$ pe $U_i \cap Y$.

Fie $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ partiția unității subordonată acoperirii $\mathcal{U}$ relativ la fascicolul $\underline{\mathcal{F}}$ și conform observației 2, secțiunea $\tilde{g}_i \in \Gamma(X, \underline{\mathcal{F}})$ obținută prelungind cu 0 secțiunea $\tilde{\varphi}_i(g_i)$ în $X - U_i$. Putem forma secțiunea $\tilde{g} = \sum_{i \in I} \tilde{g}_i \in \Gamma(X, \underline{\mathcal{F}})$, deoarece în suma $\sum_{i \in I} \tilde{g}_i$ cel mult un număr finit de secțiuni sînt nenule în vecinătatea fiecărui punct din X . Secțiunea $\tilde{g}$ prelungește la X secțiunea dată s : Într-adevăr dacă $x \in Y$ și $j_1, \dots, j_m$ sînt indicii i pentru care $x \in U_i$, atunci

$$\tilde{g}(x) = \sum_{k=1}^m \tilde{g}_{j_k}(x) = \sum_{k=1}^m [\tilde{\varphi}_{j_k}(s)](x) = [\sum_{i \in I} \tilde{\varphi}_i(s)](x) = s(x).$$

Teorema 14. Dacă $\underline{\mathcal{F}}$ este un fascicol fin de grupuri abeliene pe spațiul topologic paracompact X , atunci $H^p(X, \underline{\mathcal{F}}) = 0$, oricare ar fi $p \geq 1$.

Conform observației 5 din §7, nr.5 va fi suficient să arătăm că oricare ar fi acoperirea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ a lui X și cocicluul $c \in Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ există o rafinare $\mathcal{U}^*$ a lui $\mathcal{U}$, dată de o aplicație Φ , și un colanț $b \in C^{p-1}(\mathcal{U}^*, \mathcal{F})$, astfel încît $\rho_\Phi c = \delta b$.

Spațiul X fiind paracompact ne putem limita să analizăm cazul în care $\mathcal{U}$ este o acoperire local finită și vom demonstra atunci că putem construi b chiar din $C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Fie $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ o partiție a unității subordonată lui $\mathcal{U}$ relativ la $\mathcal{F}$. Pentru fiecare sistem $(i_0, \dots, i_{p-1}) \in I^p$, familia de mulțimi $\{U_{i_0 \dots i_{p-1} i}\}_{i \in I}$ formează o acoperire local finită a lui $U_{i_0 \dots i_{p-1}}$. Ținând seama de proprietatea 1° din definiția 4, se verifică imediat că secțiunea $\tilde{\varphi}_i(c_{i_0 \dots i_{p-1} i}) \in \Gamma(U_{i_0 \dots i_{p-1} i}, \mathcal{F})$ se prelungește cu secțiunea nulă pe $U_{i_0 \dots i_{p-1}} - U_{i_0 \dots i_{p-1} i}$ la o secțiune pe $U_{i_0 \dots i_{p-1}}$, pe care o vom nota tot cu $\tilde{\varphi}_i(c_{i_0 \dots i_{p-1} i})$. Definim pe $U_{i_0 \dots i_{p-1}}$

$$b_{i_0 \dots i_{p-1}} = (-1)^p \sum_{i \in I} \tilde{\varphi}_i(c_{i_0 \dots i_{p-1} i}). \quad (6)$$

Folosind ipoteza $\delta c = 0$, se arată prin calcul direct că $\delta b = c$. Într-adevăr

$$\begin{aligned} (\delta b)_{i_0 \dots i_p} &= \sum_{j=0}^p (-1)^{j+p} \sum_{i \in I, i \neq i_0, \dots, i_p} \tilde{\varphi}_i(c_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_p i}) \Big|_{U_{i_0 \dots i_p}} + \\ &+ \sum_{j=0}^p (-1)^{j+p} \tilde{\varphi}_{i_j}(c_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_p i_j}). \end{aligned} \quad (7)$$

În prima sumă din (7)

$$\tilde{\varphi}_i(c_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_p i}) \Big|_{U_{i_0 \dots i_p}} = \begin{cases} \varphi_i \circ c_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_p i} & \text{pe } U_{i_0 \dots i_p i} \\ 0 & \text{pe } U_{i_0 \dots i_p} - U_{i_0 \dots i_p i} \end{cases}.$$

Sumînd termenii care corespund aceluiași indice i , $i \neq i_0, \dots, i_p$, avem $\varphi_i \circ \left(\sum_{j=0}^p (-1)^{j+p} c_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_p i} \Big|_{U_{i_0 \dots i_p i}} \right) = \varphi_i \circ c_{i_0 \dots i_p} \Big|_{U_{i_0 \dots i_p i}}$ pe

$U_{i_0 \dots i_p}$ și 0 pe $U_{i_0 \dots i_p} - U_{i_0 \dots i_p}$ sau $\varphi_i \circ c_{i_0 \dots i_p}$ pe $U_{i_0 \dots i_p}$. În concluzie prima sumă din (7) ne dă $\left(\sum_{i \in I, i \neq i_0, \dots, i_p} \varphi_i \right) \circ c_{i_0 \dots i_p}$ pe $U_{i_0 \dots i_p}$.

Deoarece $\tilde{\varphi}_{i_j}(c_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_p i_j}) = (-1)^{p-j} \varphi_{i_j} \circ c_{i_0 \dots i_p}$ pe $U_{i_0 \dots i_p}$, se vede că $(\delta b)_{i_0 \dots i_p} = c_{i_0 \dots i_p}$.

5. În cap. V, § 4, nr. 2 vom folosi

Propoziția 5*). Fie $\underline{\mathcal{F}}$ un fascicol de grupuri abeliene pe spațiul topologic paracompact X , Y o submulțime închisă a lui X și $\mathcal{L} = \{L\}$ un sistem fundamental de vecinătăți închise a lui Y , care ordonat prin relația de incluziune formează un sistem inductiv filtrant.

Atunci oricare ar fi $p \geq 0$,

$$H^p(Y, \underline{\mathcal{F}}) \simeq \varinjlim H^p(L, \underline{\mathcal{F}}), \quad (8)$$

limita inductivă fiind luată relativ la sistemul inductiv filtrant peste $\mathcal{L}$ format de grupurile $H^p(L, \underline{\mathcal{F}})$ și de omomorfismele induse de operația de restricție $\underline{\mathcal{F}}_L \rightarrow \underline{\mathcal{F}}_{L^*}$, dacă $L \supset L^*$.

1) Cazul $p = 0$ se obține imediat din propoziția 2. Un element $\{\sigma\} \in \varinjlim \Gamma(L, \underline{\mathcal{F}})$, $\sigma \in \Gamma(L, \underline{\mathcal{F}})$ este clasa formată de secțiunile $\tilde{\sigma} \in \Gamma(\tilde{L}, \underline{\mathcal{F}})$, pentru care există $L^* \subset L \cap \tilde{L}$, astfel încît $\sigma|_{L^*} = \tilde{\sigma}|_{L^*}$, ($L, L^*, \tilde{L} \in \mathcal{L}$). Definim aplicația $\varphi: \varinjlim \Gamma(L, \underline{\mathcal{F}}) \rightarrow \Gamma(Y, \underline{\mathcal{F}})$ care duce $\{\sigma\}$ în $\sigma|_Y$ și verificăm că φ este un izomorfism.

2) În cazul $p > 0$, folosim teorema abstractă a lui de Rham (teorema 12) și următoarele leme

Lema 1. Dat fascicolul de grupuri abeliene $\underline{\mathcal{F}}$ pe spațiul topologic arbitrar X , putem construi șirul exact

$$0 \rightarrow \underline{\mathcal{F}} \xrightarrow{\varepsilon} \underline{\mathcal{Q}}, \quad (9)$$

*) Convenim să notăm prescurtat $H^p(E, \underline{\mathcal{F}})$ în loc de $H^p(E, \underline{\mathcal{F}}_E)$, oricare ar fi submulțimea $E \subset X$ și fascicolul $\underline{\mathcal{F}}$ de grupuri abeliene pe X .

unde $\underline{Q}$ satisface relația $H^p(E, \underline{Q}) = 0$, oricare ar fi $p \geq 1$ și submulțimea $E \subset X$.

Fie $\underline{Q}$ fascicolul germenilor de secțiuni discontinue în $\underline{\mathcal{F}}$ (exemplul din § 7, nr. 4) și ε morfismul care asociază fiecărui element $f \in \mathcal{F}_x$, x punct arbitrar din X , germenele s_x al unei secțiuni $s \in \Gamma(U, \underline{\mathcal{F}})$ cu proprietatea $s(x) = f$, U fiind o vecinătate oarecare a lui x^* . Deoarece $\underline{Q}_E$ este un fascicol flasc, după teorema 3 din § 7, nr. 4, $H^p(E, \underline{Q}) = 0$.

Lema 2. În condițiile lemei 1, putem construi un șir exact

$$0 \rightarrow \underline{\mathcal{F}} \xrightarrow{\varepsilon} \underline{Q}_0 \xrightarrow{d_0} \underline{Q}_1 \xrightarrow{d_1} \dots \quad (10)$$

unde, pentru orice submulțime $E \subset X$, orice $p \geq 1$ și orice $k \geq 0$, avem $H^p(E, \underline{Q}_k) = 0$.

Notînd cu $\underline{Q}_0 = \underline{Q}$ fascicolul construit în lema 1, avem șirul exact

$$0 \rightarrow \underline{\mathcal{F}} \xrightarrow{\varepsilon} \underline{Q}_0 \xrightarrow{\varphi_0} \underline{\mathcal{F}}_0 \rightarrow 0, \quad (11)$$

unde $\underline{\mathcal{F}}_0 = \underline{Q}_0 / \underline{\mathcal{F}}$. Repetînd procedeul pentru $\underline{\mathcal{F}}_0$ obținem

$$0 \rightarrow \underline{\mathcal{F}}_0 \xrightarrow{\varepsilon_0} \underline{Q}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \underline{\mathcal{F}}_1 \rightarrow 0 \quad (12)$$

și în general

$$0 \rightarrow \underline{\mathcal{F}}_{k-1} \xrightarrow{\varepsilon_{k-1}} \underline{Q}_k \xrightarrow{\varphi_k} \underline{\mathcal{F}}_k \rightarrow 0, \quad (13)$$

cu $\underline{Q}_k$ fascicolul flasc al secțiunilor discontinue în $\underline{\mathcal{F}}_{k-1}$ și $\underline{\mathcal{F}}_k = \underline{Q}_k / \underline{\mathcal{F}}_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$. Fie $d_k = \varepsilon_k \circ \varphi_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Se verifică imediat că șirul (10), în care ε , d_k , $\underline{Q}_k$ au semnificația de mai sus, este exact: $\text{im } d_k = \text{im } \varepsilon_k = \ker \varphi_{k+1} = \ker d_{k+1}$.

*) Aplicația ε este izomorfismul lui $\underline{\mathcal{F}}$ pe fascicolul germenilor de secțiuni în $\underline{\mathcal{F}}$ (§ 3, nr. 2, 4), propoziția 4), care este un subfascicol al lui $\underline{\mathcal{G}}$.

După teorema abstractă a lui de Rham aplicată rezoluției (10) pe E pentru $E = L \in \mathcal{L}$ resp. pentru $E = Y$, notînd

$$0 \rightarrow \Gamma(E, \underline{\mathcal{F}}) \xrightarrow{\tilde{e}_E} \Gamma(E, \underline{Q}_0) \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma(E, \underline{Q}_p) \xrightarrow{\tilde{d}_{pE}} \Gamma(E, \underline{Q}_{p+1}) \rightarrow \dots, \quad (14)$$

putem scrie

$$H^p(E, \underline{\mathcal{F}}) \simeq \ker \tilde{d}_{pE} / \operatorname{im} \tilde{d}_{p-1,E}. \quad (15)$$

Aplicînd functorul $\varinjlim$ șirului (14) pentru $E = L$ rezultă șirul (14) pentru $E = Y$ și deci $\tilde{d}_{pY} = \varinjlim \tilde{d}_{pL}$. Ținînd seama că acest functor este exact, din șirul exact

$$0 \rightarrow \ker \tilde{d}_{pL} \rightarrow \Gamma(L, \underline{Q}_p) \xrightarrow{\tilde{d}_{pL}} \operatorname{im} \tilde{d}_{pL} \rightarrow 0$$

obținem prin trecere la $\varinjlim$

$$\ker \tilde{d}_{pY} = \varinjlim \ker \tilde{d}_{pL} \text{ și } \operatorname{im} \tilde{d}_{pY} = \varinjlim \operatorname{im} \tilde{d}_{pL}.$$

De asemenea din șirul exact

$$0 \rightarrow \operatorname{im} \tilde{d}_{p-1,L} \rightarrow \ker \tilde{d}_{pL} \rightarrow H^p(L, \underline{\mathcal{F}}) \rightarrow 0,$$

obținem

$$\varinjlim H^p(L, \underline{\mathcal{F}}) \simeq \ker \tilde{d}_{pY} / \operatorname{im} \tilde{d}_{p-1,Y},$$

de unde, ținînd seama de (15) pentru $E = Y$, găsim (8).

6. În legătură cu fasciculele coerente pe spații topologice paracompacte menționăm următoarea teoremă de prelungire, analogă cu teorema 3 din § 6, nr. 4. (A se vedea demonstrația în memoriul [22].)

Teorema 15. *Fie X un spațiu paracompact, Y un închis în X , $\underline{\mathcal{A}}$ un fascicol de inele coerent pe X și $\underline{\mathcal{F}}$ un fascicol de $\underline{\mathcal{A}}$ -module coerent pe Y . Există o vecinătate U a lui Y în X și un fascicol de $\underline{\mathcal{A}}$ -module coerent $\underline{Q}$ pe U , astfel încît $\underline{Q}_Y$ să fie izomorf cu $\underline{\mathcal{F}}$.*

§ 9. Fibrat

1. Fibratetele formează o altă clasă de acoperiri cu importante aplicații în teoria funcțiilor de mai multe variabile complexe. Ele au fost folosite inițial de Seifert în studiul varietăților topologice reale 3-dimensionale compacte [74] și apoi de Stiefel și Hopf în cazul varietăților diferențiabile. În 1950, H. Cartan a deschis calea utilizării lor în analiza complexă, formulând și rezolvând cu ajutorul fibratelor analitice probleme clasice ale acestei teorii (a se vedea, cap. IV). Astăzi, fibratetele constituie un instrument de cercetare atât în geometria analitică — teoria funcțiilor analitice de mai multe variabile complexe — cât și în geometria algebrică. În cele ce urmează nu vom introduce noțiunea de fibrat în sensul lui Serre (a se vedea [84] cap. IV, B), ci vom folosi numai fibratetele local triviale. Începem expunerea cu câteva definiții.

Definiția 1. Spunem că un grup G operează asupra mulțimii F , dacă

1° Oricărui element $(c, y) \in G \times F$ îi corespunde un element din F , pe care îl vom nota cy .

2° $(c_1 c_2)y = c_1(c_2 y)$, oricare ar fi c_1 și $c_2 \in G$ și $y \in F$.

3° e fiind elementul neutru din G și y un element arbitrar din F , avem $ey = y$.

Definiția 2. G operează efectiv asupra lui F , dacă din relația $cy = y$, pentru orice $y \in F$, rezultă $c = e$.

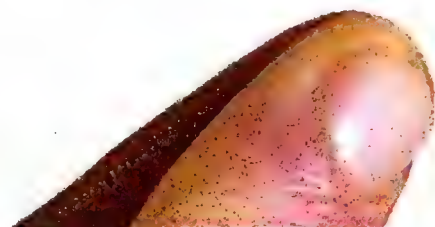
Definiția 3. G operează transitiv asupra lui F , dacă oricare ar fi elementele y_1 și y_2 din F , există $c \in G$ cu proprietatea $cy_1 = y_2$.

Definiția 4. Fie F un spațiu topologic, iar G un grup topologic. G operează continuu asupra lui F , dacă aplicația 1° din definiția 1, $G \times F \rightarrow F$ este continuă.

Definiția 5. Fie X și F spații topologice, $\{U_i\}_{i \in I}$ o acoperire a lui X și G un grup topologic, care operează continuu și efectiv asupra lui F .

Pentru fiecare pereche de indici $(i, j) \in I \times I$, astfel încât $U_{ij} \neq \emptyset$, se dă o aplicație continuă $c_{ij}: U_{ij} \rightarrow G$ cu următoarele proprietăți:

(i) $c_{ij}c_{ji} = e$.



(ii) Oricare ar fi indicii $i, j, k \in I$, dacă $U_{ijk} \neq \emptyset$, atunci $c_{ij} c_{jk} c_{ki} = e$. *)

Formăm suma topologică S a spațiilor topologice produs $U_i \times F$, $i \in I$ și pentru prescurtarea notației identificăm spațiile $U_i \times F$ cu imaginile lor S_i din S prin omeomorfismele canonice $\alpha_i: U_i \times F \rightarrow S_i$ (§ 1, nr. 6). Introducem pe S următoarea relație de echivalență $R: (x, y) \in U_i \times F$ este echivalent cu $(x', y') \in U_j \times F$ atunci și numai atunci cînd:

$$x = x' \quad \text{și} \quad y' = c_{ji}(x)y.$$

Spațiul cît $E = S/R$ se numește *fibrat peste spațiul de bază X cu fibra F și grupul de structură G* .

Se vede imediat că E este obținut prin racordarea spațiilor $U_i \times F$, după mulțimile $U_{ij} \times F$ prin aplicațiile h_{ji} , unde presupunem $U_{ij} \neq \emptyset$, iar aplicația $h_{ji}: U_{ij} \times F \rightarrow U_{ji} \times F$ duce un element $(x, y) \in U_i \times F$ în elementul echivalent cu el $(x, c_{ji}(x)y) \in U_j \times F$. Cum $U_{ij} \times F$ este deschis în $U_i \times F$, iar h_{ji} sînt omeomorfisme,

aplicația canonică $\varphi: S \rightarrow E$, pe care o vom nota $(x, y) \rightarrow \overline{(x, y)}$, este deschisă și $\varphi_i = \varphi|_{U_i \times F}$ este un omeomorfism (§ 1, nr. 6, afirmația 2°) **).

Propoziția 1. *Fibratul E are următoarele proprietăți:*
(a) *Există o aplicație canonică, numită proiecție $p: E \rightarrow X$, care asociază fiecărui element $\overline{(x, y)} \in E$ punctul $x \in X$. Ea este continuă și surjectivă.*

*) În relațiile (i) și (ii), e este aplicația $U \rightarrow G$, care asociază fiecărui punct $x \in U$ elementul neutru $e(x) = e$ din G , iar pentru c și d aplicații continue $U \rightarrow G$, am notat că aplicația produs: $(cd)(x) = c(x)d(x)$, pentru fiecare $x \in U$.

Condiția (i) implică faptul că pentru orice $x \in U_{ij}$, aplicația $c_{ij}(x): F \rightarrow F$ este un omeomorfism cu $c_{ji}(x)$ —omeomorfismul invers, $e(x)$ fiind 1_F . Evident, $c_{ii} = e$.

Din (i) și (ii) rezultă că oricare ar fi indicii $(i_0, \dots, i_p) \in I^{p+1}$, dacă $U_{i_0 \dots i_p} \neq \emptyset$, atunci $c_{i_0 i_1} c_{i_1 i_2} \dots c_{i_{p-1} i_p} = e$.

**) Conform identificării lui $U_i \times F$ cu S_i prin α_i , spațiile S_{ij} din § 1, nr. 6 se identifică cu $U_{ij} \times F$.

(b) Oricare ar fi $x \in X$, $p^{-1}(x)$ este omeomorf cu F .

(c) Oricare ar fi $x \in X$, există o vecinătate U a lui x în X , astfel încât $p^{-1}(U)$ să fie omeomorf cu $U \times F$ printr-un omeomorfism $h_U : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ compatibil cu (a) și (b).

Diagrama

$$\begin{array}{ccc} U_i \times F & \xrightarrow{\varphi_i} & E_i = \varphi_i(U_i \times F) \\ \text{pr}_1 \downarrow & \swarrow p|_{E_i} & \\ U_i & & \end{array} \quad (1)$$

este comutativă pentru fiecare $i \in I$ și arată că p este continuă.

Se verifică imediat că $E_i = p^{-1}(U_i)$, deci $p^{-1}(U_i)$ este omeomorf cu $U_i \times F$, prin omeomorfismul $h_i = \varphi_i^{-1}$. Pentru fiecare $x \in U_i$, omeomorfismul h_i restrîns la fibra $p^{-1}(x)$ induce omeomorfismul $h_{ix} : p^{-1}(x) \rightarrow \{x\} \times F$.

Oricare ar fi $x \in X$, există $i \in I$ astfel încît $x \in U_i$ și deci $\text{pr}_2 \circ h_{ix}$ ne dă un omeomorfism între $p^{-1}(x)$ și F . Luînd $U = U_i$ și $h_U = h_i$ avem satisfăcută și condiția (c). Compatibilitatea lui h_i cu (a) este dată de comutativitatea diagramei (1), iar cu (b) de omeomorfismul h_{ix} . Dacă $x \in U_{ij}$, atunci $h_{ji} = h_j \circ h_i^{-1}$.

O reciprocă a propoziției de mai sus conduce la o definiție a fibratului E echivalentă cu cea dată anterior:

Propoziția 2. Fie E, F, X spații topologice, G un grup topologic, care operează continuu și efectiv asupra lui F , iar $p : E \rightarrow X$ o aplicație cu proprietățile (a)–(c). Pentru fiecare $x \in X$, avem conform punctului (c) o vecinătate U a lui x și un omeomorfism h_U . Să notăm $\{U_i\}_{i \in I}$ o acoperire a lui X extrasă din familia acestor vecinătăți și indexată după o mulțime de indici I , h_i omeomorfismul h_{U_i} și $h_{ji} = h_j \circ h_i^{-1}$, pentru fiecare pereche de indici $(i, j) \in I \times I$ pentru care $U_{ij} \neq \emptyset$. Vom presupune că există o aplicație continuă $c_{ji} : U_{ij} \rightarrow G$, astfel încît pentru orice $(x, y) \in U_{ij} \times F \subset U_i \times F$ să avem $h_{ji}(x, y) = (x, c_{ji}(x)y) \in U_{ji} \times F \subset U_j \times F$. Atunci E , im-

preună cu acoperirea $\{U_i\}_{i \in I}$ și sistemul de aplicații c_{ij} , i și j din I , formează un fibrat peste X cu fibra F și grupul de structură G .

Într-adevăr, c_{ij} satisfac condițiile (i) și (ii).

Vom nota acest fibrat $E, \{U_i, c_{ij}\}_I$.

Definiția 6. Fie E un fibrat peste X cu fibra F și grupul G , dat de $\{U_i, c_{ij}\}_I$. Dacă $Y \subset X$, $p^{-1}(Y) \subset E$ cu proiecția $p|_{p^{-1}(Y)}$, acoperirea $\{U_i^*\}_{i \in J}$, unde $U_i^* = U_i \cap Y$, iar $J = \{i \in I \mid U_i \cap Y \neq \emptyset\}$, și omeomorfismele $h_i^* = h_i|_{U_i^*}$, deci aplicațiile $c_{ij}^* = c_{ij}|_{U_{ij}^*}$, formează un fibrat peste Y cu fibra F și grupul de structură G , pe care îl vom numi *restricția* lui E la Y și îl vom nota E_Y .

2. Fibrat cu structură algebrică

Dacă F are o structură algebrică și G este un grup de omeomorfisme, care sînt și automorfisme $F \rightarrow F$ în raport cu această structură, atunci fibrele lui $E, \{U_i, c_{ij}\}_I$ se înzestrează în mod natural cu aceeași structură algebrică. Să presupunem, de exemplu, că F este grup în transcriere aditivă; atunci

$$(\overline{x, y_1}) + (\overline{x, y_2}) = (\overline{x, y_1 + y_2})$$

unde reprezentanții claselor, (x, y_1) și (x, y_2) sînt aleși în același $U_i \times F$. Se verifică direct că schimbarea reprezentanților nu modifică rezultatul.

Propoziția 1'. Fibratelor E cu structură algebrică au proprietățile: (a) din propoziția 1,

(b) Oricare ar fi $x \in X$, există un omeomorfism $p^{-1}(x) \rightarrow F$, care este totodată și izomorfism față de structura algebrică.

(c) Oricare ar fi $x \in X$, există o vecinătate U a lui x în X și un omeomorfism $h_U: p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$, compatibil cu (a) și (b), în sensul că $\text{pr}_1 \circ h_U = p|_U$ și că $\text{pr}_2 \circ h_U = h_{U,x}$ (unde am notat $h_{U,x} = h_U|_{p^{-1}(x)}$) este un omeomorfism și un izomorfism $p^{-1}(x) \rightarrow F$.

Nu vom defini noțiunea de morfism între două fibrat (*), pe care nu o vom aplica în cele ce urmează, și nici nu ne vom opri asupra

*) Relativ la această noțiune a se vedea [79], p. 14. Relația de echivalență pe care o vom defini este un izomorfism.

categoriei fibratelor, ei vom introduce numai o relație de echivalență.

3. *Fibrate echivalente peste același spațiu de bază X , cu aceeași fibră F și același grup G .*

Definiția 7. Fie $E, \{U_i, c_{ij}\}_I$ și $E^*, \{U_\alpha, c_{\alpha\beta}\}_A$ două fibrate peste X de aceeași fibră F și grup G , cu proiecția p resp. p^* .

Fibratele E și E^* se numesc *echivalente*, dacă există un omeomorfism $f: E \rightarrow E^*$, astfel încît:

1° Diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E^* \\ p \searrow & & \swarrow p^* \\ & X & \end{array} \quad (2)$$

să fie comutativă.

2° Oricare ar fi $x \in X$, există o vecinătate U a lui x în X , astfel încît aplicația $\gamma_U: U \times F \rightarrow U \times F$ definită de comutativitatea diagramei

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{f|_{p^{-1}(U)}} & p^{*-1}(U) \\ h_U \downarrow & & \downarrow h_U^* \\ U \times F & \xrightarrow{\gamma_U} & U \times F \end{array} \quad (3)$$

unde h_U și h_U^* sînt omeomorfisme corespunzătoare celor două fibrate în sensul condiției (c) din propoziția 1, se exprimă cu ajutorul unei aplicații continue $c_U: U \rightarrow G$ în modul următor: $\gamma_U(x, y) = (x, c_U(x)y)$.

Evident, oricare ar fi x , aplicația f induce omeomorfismul $f_x: p^{-1}(x) \rightarrow p^{*-1}(x)$, iar (3) luată pentru fibra din punctul x , arată că $(\text{pr}_2 \circ h_{U,x}^*) \circ f_x \circ (\text{pr}_2 \circ h_{U,x})^{-1}$ este omeomorfismul $y \rightarrow c_U(x)y$ al lui F pe F (izomorfism, dacă F are structură algebrică). Prin urmare, se poate spune că două fibrate E și E^*

sînt echivalente dacă există un omeomorfism $f: E \rightarrow E^*$, compatibil cu (a), (b) și (c) din propoziția 1 (resp. 1').

Propoziția 3. *Fibratele se grupează în clase față de relația de echivalență.*

Vom stabili acum un criteriu pentru echivalența fibratelor, pe care îl vom aplica în cap. IV.

Propoziția 4. *Condiția necesară și suficientă ca fibratele $E, \{U_i, c_{ij}\}_I$ și $E^*, \{U_\alpha^*, c_{\alpha\beta}^*\}_A$, de proiecții p resp. p^* peste același spațiu de bază X , cu aceeași fibră F și grup de structură G , să fie echivalente este ca sistemele $\{U_i, c_{ij}\}_I$ și $\{U_\alpha^*, c_{\alpha\beta}^*\}_A$ să fie legate prin aplicarea de un număr finit de ori a următoarelor două operații:*

1° Rafinarea sau inversa ei: Se spune că sistemul $\{U_\alpha^*, c_{\alpha\beta}^*\}_A$ constituie o rafinare a sistemului $\{U_i, c_{ij}\}_I$, dacă există o aplicație $\Phi: A \rightarrow I$, astfel încît $U_\alpha^* \subset U_{\Phi(\alpha)}$ și $c_{\alpha\beta}^* = c_{\Phi(\alpha)\Phi(\beta)}|_{U_{\alpha\beta}^*}$, oricare ar fi indicii $\alpha, \beta \in A$, cu $U_{\alpha\beta}^* \neq \emptyset$.

2° Acoperirea se păstrează aceeași: $A = I$, $U_i^* = U_i$, dar $c_{ij}^* = c_i c_{ij} c_j^{-1}$, unde pentru fiecare $i \in I$, c_i este o aplicație continuă: $U_i \rightarrow G$.

1) Vom demonstra mai întîi suficiența condiției:

1.1) *Dacă E^* se obține din E printr-o rafinare, atunci E și E^* sînt echivalente.* Construim aplicația $f: E^* \rightarrow E$, care asociază fiecărei clase $\overline{(x, y)}$ din E^* , de reprezentant $(x, y) \in U_\alpha^* \times F$, clasa $\overline{(x, y)}$ din E , de reprezentant $(x, y) \in U_{\Phi(\alpha)} \times F$. Se verifică imediat că definiția este independentă de reprezentantul folosit și că f este o bijecție; f este un omeomorfism, deoarece oricare ar fi U_α^* , $f|_{p^{*-1}(U_\alpha^*)} = (h_{\Phi(\alpha)}^{-1}|_{U_\alpha^*}) \circ h_\alpha^*$ și $\gamma_{U_\alpha^*}$ asociat conform (3) este $1_{U_\alpha^*}$.

1.2) *Dacă E^* este legat de E prin operația 2°, atunci este echivalent cu E .* Aplicația $f: E \rightarrow E^*$, care asociază clasei $\overline{(x, y)} \in E$,

de reprezentant $(x, y) \in U_i \times F$, clasa $(x, \overbrace{c_i(x) y}^*) \in E^*$ de reprezentant $(x, c_i(x) y) \in U_i \times F$, stabilește echivalența lui E cu E^* .

2) Pentru a demonstra necesitatea criteriului enunțat, vom trata mai întâi următorul caz particular:

2.1) Dacă fibratele echivalente E și E^* sînt definite de aceeași acoperire, atunci ele se deduc unul din celălalt prin operația 2°:

Fie $f: E \rightarrow E^*$ un omeomorfism ce stabilește echivalența lui E cu E^* . Oricare ar fi $i \in I$, omeomorfismul $\gamma_i = h_i^* f h_i^{-1}$ corespunde unei aplicații continue $c_i: U_i \rightarrow G$, conform (3). Să luăm $(i, j) \in I^2$, astfel încît $U_{ij} \neq \emptyset$. Cum $h_{ji}^* \gamma_i = \gamma_j h_{ji}$, deducem pentru orice $(x, y) \in U_i \times F$, $c_j(x) c_{ji}(x) y = c_{ji}^*(x) c_i(x) y$, de unde relația de la punctul 2°.

2.2) Cazul general se obține construind prin rafinarea lui E fibratul E_1 de acoperire $\{\Omega_{(i, \alpha)} = U_i \cap U_\alpha^*\}_{(i, \alpha) \in I \times A}$ și aplicații $c_{(i, \alpha)(j, \beta)} = c_{ij}|_{U_{ij} \cap U_{\alpha\beta}^*}$ în ipoteza $U_{ij} \cap U_{\alpha\beta}^* \neq \emptyset$, ($\Phi = \text{pr}_1: I \times A \rightarrow I$), și analog, plecînd de la E^* , fibratul E_1^* , $\{\Omega_{(i, \alpha)}^*, c_{(i, \alpha)(j, \beta)}^* = c_{\alpha\beta}^*|_{U_{ij} \cap U_{\alpha\beta}^*}\}_{I \times A}$. Fibratele E_1 și E_1^* sînt echivalente și definite prin aceeași acoperire. Deci E^* se obține din E aplicînd o rafinare, operația 2° și operația inversă unei rafinări.

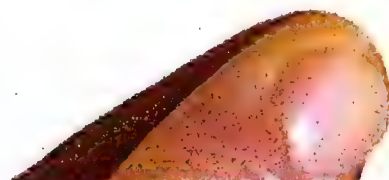
Iată cîteva consecințe imediate ale acestei propoziții:

Consecința 1. Dacă $E, \{U_i, c_{ij}\}_I$ este un fibrat peste X și dacă pentru $J \subset I, \bigcup_{i \in J} U_i = X$, atunci fibratul $E^*, \{U_i, c_{ij}\}_J$ este echivalent cu E .

Un exemplu deosebit de simplu de fibrat peste X de fibră F este dat de produsul direct $X \times F$ împreună cu pr_1 , acoperirea lui X formată dintr-o singură mulțime X și aplicația $e: X \rightarrow G$.

Definiția 8. Orice fibrat echivalent cu fibratul $X \times F, \{X, \overline{e}\}$ se numește *trivial*.

Consecința 2. Un fibrat $E, \{U_i, c_{ij}\}_I$ este *trivial*, atunci și numai atunci cînd există aplicațiile continue $c_i: U_i \rightarrow G, i \in I$, astfel încît $c_{ij} = c_i c_j^{-1}$, oricare ar fi $(i, j) \in I^2$ cu $U_{ij} \neq \emptyset$.



Observația 1. După definiția adoptată aici, orice fibrat este local trivial. Într-adevăr dat fibratul E , oricare ar fi $x \in X$ există o vecinătate U a lui x și un omeomorfism (izomorfism algebric, dacă fibratul are structură algebrică) $h_U: p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$, astfel încît restricția lui E la U , $E_U = p^{-1}(U)$ este un fibrat trivial.

În cele ce urmează va fi important să demonstrăm că anumite fibrate sînt triviale. Pentru a obține acest rezultat, vom folosi faptul că în anumite condiții putem înlocui două mulțimi din acoperire prin reuniunea lor și — repetînd procedeul — prin X , păstrînd la fiecare etapă clasa de echivalență a fibratului.

Definiția 9. Vom spune că un fibrat E , $\{U_i, c_{ij}\}_I$ este *trivial peste mulțimile* U_{i_1} și U_{i_2} ale acoperirii, dacă $c_{i_1 i_2} = c_{i_1} c_{i_2}^{-1}$, unde $c_{i_k}: U_{i_k} \rightarrow G$, $k = 1, 2$, sînt aplicații continue.

Conform consecințelor 1 și 2, fibratul $E_{U_{i_1} \cup U_{i_2}}$ este trivial.

Observația 2. Dacă E , $\{U_i, c_{ij}\}_I$ este un fibrat trivial peste U_{i_1} și U_{i_2} , atunci E este echivalent cu un fibrat E^* a cărei acoperire se obține din $\{U_i\}_{i \in I}$ înlocuind mulțimile U_{i_1} și U_{i_2} prin $U_{i_1} \cup U_{i_2}$.

Pentru prescurtare să notăm indicii i_1 și i_2 cu 1 resp. 2.

Prin ipoteză, restricția $E_{U_1 \cup U_2}$ este echivalentă cu fibratul definit de $\{U_1, U_2, c_{12}\}$ care este trivial. Vom demonstra că fibratul E este echivalent cu următorul fibrat E^* : Notăm $J = I - \{1, 2\}$ și $A = J \cup \{1\}$. Fie $U_1^* = U_1 \cup U_2$ și $U_j^* = U_j$ pentru $j \in J$. Luăm $c_{\alpha\beta}^*: U_{\alpha\beta}^* \rightarrow G$, $(\alpha, \beta) \in A^2$, unde pentru j și h din J ,

$$c_{j1}^* = \begin{cases} c_{j1} c_1 & \text{pe } U_{1j} \\ c_{j2} c_2 & \text{pe } U_{2j} \end{cases} \quad \text{și } c_{jh}^* = c_{jh}.$$

E^* este fibratul definit de $\{U_\alpha^*, c_{\alpha\beta}^*\}_A$.

Pentru a stabili echivalența dintre fibratele E și E^* , construim fibratul auxiliar $\tilde{E}$, dat de acoperirea $\{U_i\}_I$ și obținut din E^* prin rafinarea corespunzătoare aplicației $\Phi: I \rightarrow A$, $\Phi(1) = \Phi(2) = 1$, $\Phi(j) = j$ pentru $j \in J$; prin urmare $\tilde{c}_{12} = e$, $\tilde{c}_{j1} =$

$= c_{j1} c_1, \tilde{c}_{j2} = c_{j2} c_2$ și $\tilde{c}_{jh} = c_{jh}$ pentru $j, h \in J$. Fibratul E se obține din $\tilde{E}$ prin operația 2°, luând aplicațiile de legătură c_1, c_2 și $c_j = e$ pentru $j \in J$. Într-adevăr, $c_{ij} = c_i \tilde{c}_{ij} c_j^{-1}$, oricare ar fi i și j din I .

Observația 3. Dacă E și E^* sînt două fibrate echivalente, iar Y este o submulțime din X , restricțiile E_Y și E_Y^* sînt echivalente.

În cazul cînd Y este o submulțime a spațiului topologic X , vor interveni în cele ce urmează fibrate E definite pe o vecinătate a lui Y , i.e. date printr-un sistem $\{U_i, c_{ij}\}_{i \in I}$ cu U_i deschise din X formînd o acoperire a lui Y .

Definiția 10. Vom spune că două fibrate E și E^* definite pe o vecinătate a lui Y sînt echivalente, dacă există o vecinătate U a lui Y în X , astfel încît restricțiile E_U și E_U^* să fie echivalente.

4. Secțiuni într-un fibrat. Fie $E, \{U_i, c_{ij}\}_I$ un fibrat peste spațiul topologic X , de fibră F și grup G . Proiecția $p : E \rightarrow X$ organizează E ca o acoperire, astfel încît putem aplica definiția 5 din § 1.

Definiția 11. Fie U un deschis din X și E un fibrat peste X . O secțiune (secțiune transversală) în E peste U este o aplicație continuă $s : U \rightarrow E$, cu proprietatea $p \circ s = 1_U$.

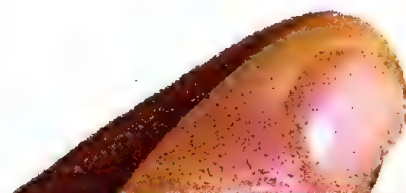
Vom nota din nou cu $\Gamma(U, E)$ mulțimea secțiunilor lui E peste U și cu $\Gamma(X, E)$ mulțimea secțiunilor globale ale lui E .

Aplicînd metoda generală din § 3, nr. 2, 3), putem forma fascicolul germenilor de secțiuni în fibratul E , pe care îl vom nota $\mathcal{F}(X, E)$.

§ 10. Fibrat vectoriale

1. Vom nota $\mathbb{C}$ -algebra matricilor pătrate de ordinul m cu componente din $\mathbb{C}$: $A = (a_{hk})$, h și $k = 1, \dots, m$, $a_{hk} \in \mathbb{C}$, cu $M(m, \mathbb{C})$. Orice matrice A determină o transformare liniară, pe care o vom nota cu aceeași literă $A : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ și care asociază fiecărui punct

$$y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{C}^m \text{ punctul } Ay = \left(\sum_{k=1}^m a_{1k} y_k, \dots, \sum_{k=1}^m a_{mk} y_k \right) \in \mathbb{C}^m.$$



Introducînd în spațiul vectorial $\mathbb{C}^m$ norma $\|y\| = \sqrt{\sum_{j=1}^m |y_j|^2}$, (cap. I, § 1, nr. 2, (5)), vom defini

$$\|A\| = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\|. \quad (1)$$

1° Se verifică imediat inegalitățile

$$|a_{hk}| \leq \|A\| \leq m \sup_{h,k} |a_{hk}|. \quad (2)$$

Într-adevăr, dacă $y^k = (\delta_{hk})$, $h = 1, \dots, m$, atunci $Ay^k = (a_{1k}, \dots, a_{mk})$ și $|a_{hk}| \leq \|Ay^k\| \leq \|A\|$. Pe de altă parte, oricare ar fi y cu $\|y\| = 1$, putem scrie $\|Ay\| = \sqrt{\sum_h \left| \sum_k a_{hk} y_k \right|^2} \leq m \sup_{h,k} |a_{hk}|$.

2° Oricare ar fi A și B din $M(m, \mathbb{C})$ avem

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \text{ și } \|AB\| \leq \|A\| \|B\|. \quad (3)$$

Prima dintre aceste inegalități rezultă din proprietățile operatorilor liniari peste un spațiu vectorial normat în mod obișnuit. Cea de-a doua este datorită faptului că înmulțirea matricilor corespunde compunerii operatorilor

$$\|AB\| = \sup_{y \neq 0} \frac{\|AB y\|}{\|y\|} \leq \sup_{By \neq 0} \frac{\|A(By)\|}{\|By\|} \sup_{y \neq 0} \frac{\|By\|}{\|y\|} = \|A\| \|B\|.$$

Cazul $B = 0$ este banal.

Prin urmare $M(m, \mathbb{C})$ este o algebră normată cu norma (1), pe care o vom considera topologizată cu ajutorul acestei norme.

Din inegalitățile (2) rezultă că un șir de matrici $A_n = (a_{nk}^n)$ este un șir Cauchy atunci și numai atunci cînd cele m^2 șiruri $\{a_{nk}^n\}_n$ sînt șiruri Cauchy în $\mathbb{C}$, astfel încît $M(m, \mathbb{C})$ este o *algebră Banach*.

Observația 1. Topologia lui $M(m, \mathbb{C})$ dată de norma (1) coincide cu topologia introdusă pe $M(m, \mathbb{C})$ cu ajutorul bijecției $\Theta: M(m, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^{m^2}$, prin care $A = (a_{nk})$ corespunde punctului $\xi = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}, a_{21}, \dots, a_{mm})$.

Un rol important va avea în cele ce urmează grupul liniar al matricilor nesingulare din $M(m, \mathbb{C})$, pe care îl vom nota cu $GL(m, \mathbb{C})$ și care corespunde transformărilor liniare nedegenerate. Înzestrat cu topologia indusă de topologia lui $M(m, \mathbb{C})$, $GL(m, \mathbb{C})$ formează un grup topologic. Se demonstrează ([28], p. 16):

Teorema 1. $GL(m, \mathbb{C})$ este un grup topologic conex.

2. Putem defini acum fibratoarele vectoriale complexe.

Definiția 1. Numim *fibrat vectorial complex* (de ordinul m sau fibrat m -vectorial) peste X un fibrat E peste X cu fibra $F = \mathbb{C}^m$, înzestrat cu structura de spațiu vectorial peste $\mathbb{C}$, și cu grupul $G = GL(m, \mathbb{C})$, grupul general liniar al matricilor nesingulare de ordinul m cu elemente din $\mathbb{C}^*$.

În cazul fibratelor vectoriale complexe, fiecare fibră $p^{-1}(x)$, $x \in X$, se înzestrează cu structură de $\mathbb{C}$ -spațiu vectorial și este nu numai omeomorfă, ci și izomorfă cu $\mathbb{C}^m$. Fiecărui $x \in X$ îi corespunde o vecinătate U și un omeomorfism $h_U: p^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^m$, $\text{pr}_1 \circ h_U = p$, care induce pe fibre un izomorfism de $\mathbb{C}$ -spații vectoriale (propoziția 1 și 1', § 9, nr. 1 și 2).

Din definiția 7, § 9, nr. 3, deducem că două fibratoarele vectoriale E și E^* peste X cu aceeași fibră $\mathbb{C}^m$ sînt echivalente, dacă există un omeomorfism $f: E \rightarrow E^*$, astfel încît

$$1^\circ p = p^* \circ f.$$

2° Pe fiecare fibră f_x este un izomorfism de $\mathbb{C}$ -spații vectoriale topologice.

3° Pentru fiecare $x \in X$ există o vecinătate U , în care (cu notațiile din diagrama (3), § 9), $\gamma_U = h_U^* \circ f|_{p^{-1}(U)} \circ h_U^{-1}$ asociază punctului $(x, y) \in U \times \mathbb{C}^m$ punctul $(x, c(x)y) \in U \times \mathbb{C}^m$, unde $c = c_U$ este o aplicație continuă: $U \rightarrow GL(m, \mathbb{C})$.

Să remarcăm că în cazul fibratelor vectoriale complexe forma omeomorfismului γ_U și continuitatea aplicației c rezultă din comutativitatea diagramei (3), § 9 și din proprietatea 2°. Într-adevăr

*) Uneori un astfel de fibrat este numit și fibrat liniar, alteori se folosește denumirea de fibrat liniar pentru cazul $m = 1$.

pe fiecare fibră aplicația $c(x) = (\text{pr}_2 \circ h_x^*) \circ f_x \circ (\text{pr}_2 \circ h_x)^{-1}$ este un automorfism $\mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$, deci o transformare liniară nesingulară, care duce $y \in \mathbb{C}^m$ în $y' = c(x)y \in \mathbb{C}^m$; prin urmare $c(x) \in GL(m, \mathbb{C})$. Fie $x_0 \in U$, $c(x_0) = (c_{hk}^0)$ și $c(x) = (c_{hk})$. Deoarece aplicația $(x, y) \rightarrow y'$ este continuă pe $U \times \mathbb{C}^m$, oricare ar fi $\varepsilon > 0$ și $y' = (\delta_{11}, \dots, \delta_{1m})$, $t = 1, 2, \dots, m$, există o vecinătate v_t a lui x_0 , astfel încît dacă $x \in v_t$, $\|c(x)y' - c(x_0)y'\| < \varepsilon$, deci $|c_{ht} - c_{ht}^0| < \varepsilon$; dacă $x \in \bigcap_{t=1}^m v_t$, avem $\|c(x) - c(x_0)\| < m\varepsilon$. În concluzie $c(x)$ este continuă pe U . Aceeași remarcă este valabilă pentru omeomorfismele h_{ij} și pentru c_{ij} , ținînd seama de comutativitatea diagramei (1), § 9.

3. Ne propunem să studiem acum secțiunile într-un fibrat vectorial complex E peste X . Vom nota cu $\mathcal{F} = \mathcal{F}(X, E)$ fascicolul germenilor de secțiuni în fibratul E (§ 9, nr. 4) și cu $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(X)$ fascicolul germenilor de funcții complexe continue pe X . Fascicolul germenilor de aplicații continue definite pe deschise din X cu valori în $\mathbb{C}^m$ este izomorf cu $\mathcal{Q}^m$ (§ 3, nr. 2, 1)).

Propoziția 1. *Fascicolul $\mathcal{F}$ al germenilor de secțiuni în fibratul vectorial complex E de ordinul m este un fascicol de $\mathcal{Q}$ -module, local izomorf cu $\mathcal{Q}^m$.*

Într-adevăr, x_0 fiind un punct din X , există o vecinătate U a lui x_0 , astfel încît $E_U = p^{-1}(U)$ să fie omeomorf cu $U \times \mathbb{C}^m$ printr-un omeomorfism h_U , care pe fibre este un izomorfism de spații vectoriale.

Orice secțiune $s : u \rightarrow E$, definită pe un deschis $u \subset U$, determină o aplicație continuă $\sigma : u \rightarrow \mathbb{C}^m$, prin relația $\sigma = \text{pr}_2 \circ h_U \circ s$. Dacă notăm cu x un punct din U , orice germene $s_x \in \mathcal{F}_x$ definit de (s, u) , $x \in u \subset U$, determină univoc un germene $\sigma_x \in \mathcal{Q}_x^m$, și anume germenele aplicației σ în punctul x . Fie ψ aplicația: $\mathcal{F}_U \rightarrow \mathcal{Q}_U^m$, care asociază lui s_x germenele σ_x . Se verifică imediat că ψ este un omeomorfism și, pe fibre, un izomorfism de $\mathcal{Q}$ -module, organizînd fiecare fibră $\mathcal{F}_x$ ca $\mathcal{Q}_x$ -modul: $(f_x, s_x) \in \mathcal{Q}_x \times \mathcal{F}_x \rightarrow f_x s_x = \psi^{-1}(f_x \sigma_x)$.

Observația 2. Dacă fibratele E și E^* sînt echivalente, fasciculele $\underline{\mathcal{F}} = \underline{\mathcal{F}}(X, E)$ și $\underline{\mathcal{F}}^* = \underline{\mathcal{F}}(X, E^*)$ sînt izomorfe, conform observației 5, § 3, nr. 2.

Propoziția 1 se obține și cu ajutorul acestei observații. Fibratele E_U și $U \times \mathbb{C}^m$ sînt echivalente, deci fasciculele germenilor de secțiuni în aceste fibrate $\underline{\mathcal{F}}_U$ resp. $\underline{\mathcal{Q}}_U^m$ sînt izomorfe.

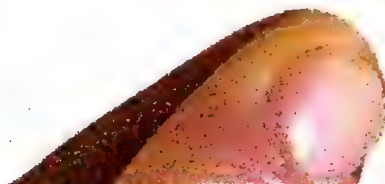
În particular, dacă fibratul E este trivial, fascicolul $\underline{\mathcal{F}}$ este izomorf cu $\underline{\mathcal{Q}}^m$.

Propoziția 2. (Reciproca propoziției 1.) $\underline{\mathcal{Q}}$ fiind un fascicol pe X local izomorf cu $\underline{\mathcal{Q}}^m$, există un fibrat vectorial complex E peste X , de fibră $\mathbb{C}^m$, astfel încît $\underline{\mathcal{Q}}$ să fie izomorf cu fascicolul $\underline{\mathcal{F}}$ al germenilor secțiunilor lui E .

Oricare ar fi $x \in X$, există un deschis U , $x \in U \subset X$, și un izomorfism $\varphi_U: \underline{\mathcal{Q}}_U \rightarrow \underline{\mathcal{Q}}_U^m$. Fie $\{U_i\}_{i \in I}$ o acoperire a lui X formată din deschise U și $\varphi_i: \underline{\mathcal{Q}}_{U_i} \rightarrow \underline{\mathcal{Q}}_{U_i}^m$ izomorfismele corespunzătoare. Dacă $U_{ij} \neq \emptyset$, avem izomorfismul $\varphi_{ji} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ de fascicule de $\underline{\mathcal{Q}}$ -module: $\underline{\mathcal{Q}}_{U_{ij}}^m \rightarrow \underline{\mathcal{Q}}_{U_{ij}}^m$. Cum $\underline{\mathcal{Q}}^m$ este $\underline{\mathcal{Q}}$ -generat de secțiunile $e_p = (0, \dots, \underset{p}{1}, \dots, 0)$, $p = 1, \dots, m$, φ_{ji} este determinat de $\tilde{\varphi}_{ji}(e_p) =$

$$= \sum_{q=1}^m c_{pq}^{ji} e_q, \quad c_{pq}^{ji} \in \Gamma(U_{ij}, \underline{\mathcal{Q}}), \quad p = 1, \dots, m. \quad \text{Notăm cu } c_{ji} = (c_{pq}^{ji})$$

funcția matricială definită în acest mod pe U_{ij} . Deoarece φ_{ji} este un izomorfism, $c_{ji}: U_{ij} \rightarrow GL(m, \mathbb{C})$ și c_{ji} este o aplicație continuă. Se verifică imediat condițiile (i) și (ii), astfel încît sistemul $\{U_i, c_{ij}\}_I$ definește un fibrat vectorial E pe X . Conform propoziției precedente, fascicolul $\underline{\mathcal{F}}$ al germenilor de secțiuni în E este de asemenea izomorf local cu $\underline{\mathcal{Q}}^m$. Fie $\psi_i: \underline{\mathcal{F}}_{U_i} \rightarrow \underline{\mathcal{Q}}_{U_i}^m$ izomorfismul corespunzător, descris mai sus. Se verifică ușor că aplicațiile $\chi_i = \varphi_i^{-1} \circ \psi_i$ determină un izomorfism $\chi: \underline{\mathcal{F}} \rightarrow \underline{\mathcal{Q}}$, deoarece χ_i și χ_j , i și $j \in I$ cu $U_{ij} \neq \emptyset$, coincid pe $\underline{\mathcal{F}}_{U_{ij}}$.



Fibratul E asociat unui fascicol $\underline{Q}$ este determinat numai pînă la o echivalență. Să presupunem, de exemplu, că alegem aceeași acoperire $\{U_i\}_{i \in I}$, dar în loc de omeomorfismele φ_i avem omeomorfismele $\tau_i: \underline{Q}_{U_i} \rightarrow \underline{Q}_{U_i}^m$. Atunci $\tau_i \circ \varphi_i^{-1}$ determină o aplicație continuă $c_i: U_i \rightarrow GL(m, \mathbb{C})$ în timp ce τ_{ji} determină aplicația continuă $c_{ji}^*: U_{ij} \rightarrow GL(m, \mathbb{C})$, iar $c_{ji}^* = c_j c_{ji} c_i^{-1}$, astfel încît fibratul E^* definit de $\{U_i, c_{ij}^*\}_I$ este echivalent cu E . Tot astfel de simplu se verifică și cazul cînd se folosește o rafinare a acoperirii $\{U_i\}_{i \in I}$. De asemenea, dacă fasciculele $\underline{Q}$ și $\underline{Q}^*$ sînt izomorfe, fibratele asociate E și E^* sînt echivalente, deoarece putem construi E^* cu aceeași acoperire ca E și cu omeomorfisme $\varphi_i^* = \varphi_i \circ f^{-1}$, unde f este izomorfismul $\underline{Q} \rightarrow \underline{Q}^*$.

Conform definiției 1, § 5, nr. 1, dacă $\underline{A}$ este un fascicol de inele pe spațiul topologic X , un fascicol $\underline{F}$ de $\underline{A}$ -module local izomorf cu un fascicol $\underline{A}^m$ se va numi *local liber*. În general, m poate varia pe X , dar dacă este același, $\underline{F}$ se numește fascicol *local liber de rang m* . Din rezultatele de mai sus obținem

Teorema 2. *Există o corespondență biunivocă între clasele de fibrate vectoriale complexe echivalente și clasele de fascicule de $\underline{Q}$ -module local libere de un rang oarecare izomorfe.*

III TEORIA FUNCȚIILOR ANALITICE PE VARIETĂȚI ANALITICE COMPLEXE

§ 1. Varietăți analitice complexe

După cum în teoria funcțiilor analitice de o variabilă complexă nu ne putem limita să considerăm numai funcții olomorfe pe deschise din $\mathbb{C}$, ci în mod natural sîntem conduși la teoria funcțiilor analitice pe suprafețe riemanniene, în cazul n -dimensional teoria funcțiilor analitice pe deschise din $\mathbb{C}^n$ este prea restrictivă *) și a fost necesar să se studieze funcțiile analitice de mai multe variabile pe spații mai generale. În acest proces de dezvoltare a teoriei funcțiilor, prima etapă corespunde varietăților analitice, care în cazul 1-dimensional coincid cu suprafețele riemanniene.

1. Varietăți topologice

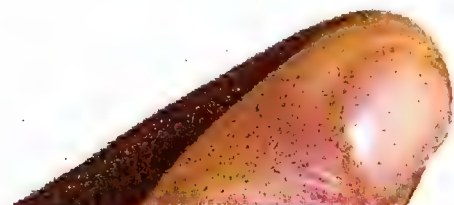
Definiția 1. Se numește *varietate topologică* un spațiu topologic Hausdorff, local euclidian.

Amintim că un spațiu topologic V se numește *local euclidian*, dacă oricare ar fi punctul $p \in V$ există o vecinătate deschisă U a lui p în V și un omeomorfism $\varphi : U \rightarrow G$ a lui U pe un deschis G dintr-un spațiu euclidian $\mathbb{R}^n$.**)

Definiția 2. Fie V un spațiu topologic. Vom numi *hartă* (reală) pe V un cuplu (U, φ) , unde U este un deschis din V și φ

*) De exemplu, după cum vom vedea în §§4—6, chiar problema prelungerii analitice a funcțiilor olomorfe într-un deschis din $\mathbb{C}^n$, necesită folosirea varietăților analitice.

**) Un spațiu topologic local euclidian nu este totdeauna separat. A se vedea [84], p. 256.



este un omeomorfism al lui U pe un deschis G dintr-un spațiu euclidian $\mathbb{R}^n$. Deschisul U se numește *suportul hărții*, $G = \varphi(U)$ *imaginea*, iar n *dimensiunea ei*.

Dacă (U, φ) este o hartă pe V , se poate introduce prin intermediul lui φ pe U un sistem de coordonate, atribuind fiecărui punct $p \in U$ coordonatele imaginii sale $\varphi(p) \in \mathbb{R}^n$.

Definiția 3. O familie de hărți $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$, astfel încît $\bigcup_{i \in I} U_i = V$, formează un *atlas* pe V . Un atlas se numește *complet*, dacă conține orice hartă de pe V .

Evident spațiile topologice local euclidiene sînt spațiile pe care există atlase.

Propoziția 1. Fie (U, φ) și (U^*, φ^*) două hărți pe spațiul topologic V , de dimensiuni n resp. n^* și pentru care $U \cap U^* \neq \emptyset$. Atunci $n = n^*$.

Într-adevăr, $\varphi^* \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U^*) \rightarrow \varphi^*(U \cap U^*)$ este un omeomorfism al deschisului $\varphi(U \cap U^*)$ din $\mathbb{R}^n$ pe deschisul $\varphi^*(U \cap U^*)$ din $\mathbb{R}^{n^*}$ și se aplică teorema lui Brouwer. (A se vedea nota de la p. 16.)

Consecința 1. Oricărui punct p dintr-un spațiu local euclidian V i se asociază univoc un număr natural $n(p)$, dimensiunea oricărei hărți (U, φ) din V pentru care $p \in U$; $n(p)$ se numește *dimensiunea (reală) a lui V în punctul p* . Mulțimea $V_n = \{p \in V \mid n(p) = n\}$ este deschisă în V . Evident, $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ și $V_n \cap V_m = \emptyset$, dacă $n \neq m$.

Definiția 4. Dacă $V = V_n$, atunci V se numește *spațiu local euclidian n -dimensional*, iar n se numește *dimensiunea (reală) a lui V* .

Consecința 2. Un spațiu local euclidian V conex are o dimensiune bine determinată. (**)

*) Pentru prescurtare, notăm restricția și corestricția ca și aplicația inițială.

**) În general, fiecare componentă conexă a lui V este un spațiu local euclidian de o anumită dimensiune.

Consecințele 1 și 2 și definiția 4 se aplică evident varietăților topologice. *)

Definiția 5. O submulțime S a unei varietăți V , care înzestrată cu topologia indusă formează o varietate, se numește *subvarietate topologică a lui V* .

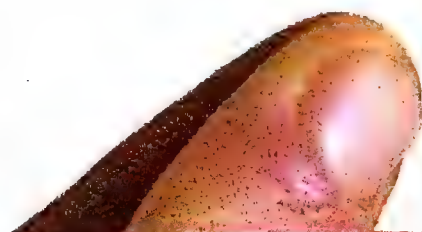
Evident submulțimile deschise ale unei varietăți V sînt subvarietăți.

2. Varietăți diferențiabile

Datorită faptului că o varietate topologică V este un spațiu local euclidian, orice funcție definită pe o mulțime din V poate fi studiată local ca o funcție definită pe o mulțime din $\mathbb{R}^n$. Astfel dacă $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ și dacă (U, φ) este o hartă pe V , iar $G = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$, vom asocia restricției $f|_U$, pe care o vom nota tot cu f , funcția $F = f \circ \varphi^{-1}: G \rightarrow \mathbb{R}$. Vom putea însă atribui lui f diferite proprietăți ale lui F , numai dacă aceste proprietăți nu depind de harta (U, φ) . De exemplu, vom spune că f este diferențiabilă în $p \in U$, cînd F este diferențiabilă în $\varphi(p) \in G$, numai dacă oricare ar fi harta (U^*, φ^*) pe V , cu $p \in U^*$ și $G^* = \varphi^*(U^*)$, funcția $F^* = f \circ \varphi^{*-1}$ definită pe $\varphi^*(U \cap U^*)$ este diferențiabilă în $\varphi^*(p)$. Evident, dacă $\varphi^* \circ \varphi^{-1}$ este un difeomorfism, (cap. I, § 2, nr. 3), atunci această proprietate este verificată și putem vorbi despre funcții diferențiabile pe V . Aceste considerații se aplică și funcțiilor f definite pe submulțimi din V . Condiția ca $\varphi^* \circ \varphi^{-1}$ (atunci cînd există, i.e. cînd $U \cap U^* \neq \emptyset$) să fie un difeomorfism este însă și necesară pentru ca proprietatea de diferențiabilitate să nu depindă de o anumită hartă. Fie $x = (x_1, \dots, x_n)$ un punct arbitrar din G și $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ un punct arbitrar din G^* . Să notăm cu φ_k resp. φ_k^* componentele aplicațiilor φ și φ^* , $k = 1, \dots, n$. Funcției $\varphi_k^*: U^* \rightarrow \mathbb{R}$ îi corespunde în G^* funcția diferențiabilă x_k^* , iar în $\varphi(U \cap U^*)$ funcția $\varphi_k^* \circ \varphi^{-1}$, care va trebui să fie diferențiabilă; prin urmare, aplicația $\varphi^* \circ \varphi^{-1}$ de componente $\varphi_k^* \circ \varphi^{-1}$ va fi diferențiabilă.

Definiția 6. Două hărți (U, φ) și (U^*, φ^*) pe varietatea topologică V sînt *compatibile diferențiabil de clasă C^r resp. C^∞* dacă,

*) Nu vom presupune conexe varietățile, pe care le vom considera, decît atunci cînd va fi necesar. O varietate n -dimensională (decî pentru care toate componentele conexe au dimensiunea n) se numește *omogenă* sau *pură*.



atunci cînd $U \cap U^* \neq \emptyset$, omeomorfismul $\varphi^* \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U^*) \rightarrow \varphi^*(U \cap U^*)$ este un difeomorfism de clasă C^r resp. C^∞ .

Definiția 7. Un atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ pe V se numește *diferențiabil de clasă C^r resp. C^∞* , dacă două hărți arbitrare ale sale sînt compatibile diferențiabil de clasă C^r resp. C^∞ .

Definiția 8. Spunem că un atlas diferențiabil de clasă C^r resp. C^∞ definește pe V o *structură diferențiabilă de clasă C^r resp. C^∞* .

Definiția 9. Două atlase definesc pe V *aceeași structură*, dacă reuniunea lor formează un atlas diferențiabil de clasă respectivă pe V i.e. dacă orice hartă dintr-un atlas este compatibilă diferențiabil de clasă respectivă cu orice hartă din celălalt.

Definiția 10. Un atlas diferențiabil de clasă C^r resp. C^∞ se numește *complet*, dacă conține orice hartă compatibilă cu toate hărțile sale (i.e. dacă este reuniunea tuturor atlaselor ce definesc pe V acea structură diferențiabilă).

Definiția 11. O varietate topologică V împreună cu un atlas diferențiabil de clasă C^r resp. C^∞ complet se numește *varietate diferențiabilă de clasă C^r resp. C^∞* .

Cum noțiunile din definițiile 6, 7, 10 pot fi introduse pe un spațiu topologic, iar existența unui atlas implică faptul că spațiul este local euclidian putem da

Definiția 11'. Un spațiu topologic Hausdorff împreună cu un atlas diferențiabil de clasă C^r resp. C^∞ complet (sau înzestrat cu o structură diferențiabilă de acea clasă) se numește *varietate diferențiabilă de clasă C^r resp. C^∞ **.

Definiția 12. Fie S o submulțime deschisă a unei varietăți diferențiabile de o anumită clasă V , varietate definită cu ajutorul unui atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$. Pentru orice $i \in I$ cu proprietatea $U \cap S \neq \emptyset$, cuplul $(U_i \cap S, \varphi_i|_{U_i \cap S})$ este o hartă. Mulțimea acestor

*) Milnor a arătat că există varietăți topologice, pe care nu se poate defini nici o structură diferențiabilă; dimpotrivă există varietăți topologice pe care se pot defini mai multe structuri diferențiabile. Pentru exemple de varietăți diferențiabile și diferite proprietăți, a se vedea [84], cap. V, [29] și [72].

hărți formează un atlas diferențiabil pe S . Organizat astfel ca varietate diferențiabilă (de aceeași clasă ca și V), S se numește *subvarietate diferențiabilă deschisă* a lui V .

Spunem că structura diferențiabilă introdusă în acest mod pe S este indusă de structura de pe V^* .

Definiția 13. Fie V și W două varietăți diferențiabile de clasă C^∞ **) definite prin atlasele $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ resp. $\{(\Omega_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$. O aplicație continuă $f: V \rightarrow W$ se numește *diferențiabilă* (de clasă C^q resp. C^∞) dacă oricare ar fi $p \in V$, $i \in I$ și $\alpha \in A$, astfel încît $p \in U_i$ și $f(p) \in \Omega_\alpha$, aplicația $\psi_\alpha \circ f \circ \varphi_i^{-1}: \varphi_i[U_i \cap f^{-1}(\Omega_\alpha)] \rightarrow \psi_\alpha[f(U_i) \cap \Omega_\alpha]$ este diferențiabilă (de acea clasă).

Se verifică imediat că definiția 13 are sens, fiind independentă de hărțile folosite. În particular, dacă $W = \mathbb{R}$ se obține definiția *funcțiilor reale diferențiabile* (de anumită clasă) pe V . O aplicație $f: S \rightarrow W$, unde S este un deschis al lui V este diferențiabilă (de anumită clasă), dacă satisface definiția 13 pe varietatea S .

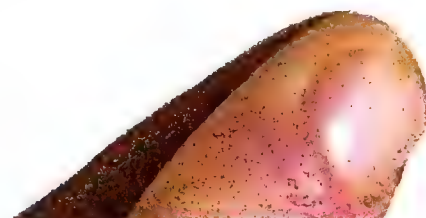
Definiția 14. O aplicație $f: V \rightarrow W$ se numește *difeomorfism* (de anumită clasă) dacă f este un omeomorfism și dacă atât f cît și f^{-1} sînt aplicații diferențiabile (de clasa respectivă), (i.e. $\psi_\alpha \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ sînt difeomorfisme, îndată ce $f(U_i) \cap \Omega_\alpha \neq \emptyset$).

Evident, dacă f este un difeomorfism, V și W au aceeași dimensiune în puncte corespondente.

Definiția 15. Un sistem de n funcții reale $X_1, \dots, X_n$ definite pe o vecinătate a unui punct $a \in V$ se spune că formează un *sistem de coordonate locale* în punctul a , dacă există un deschis D conținînd punctul a , astfel încît aplicația $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, care asociază fiecărui

*) Remarcăm că noțiunea de subvarietate diferențiabilă definită aici numai pentru a organiza ca varietăți submulțimile deschise ale unei varietăți diferă de noțiunea de subvarietate folosită de obicei în geometria diferențială, [84], cap. V, p. 258.

**) După o teoremă a lui Whitney, orice varietate diferențiabilă este omeomorfă cu o varietate diferențiabilă de clasă C^∞ , astfel încît studiul se reduce la această clasă. Definițiile următoare vor fi formulate numai pentru acest caz, singurul care va interveni de altfel în teoria varietăților analitice complexe.



punct $p \in D$, punctul $X = \Phi(p) = (X_1(p), \dots, X_n(p)) \in \mathbb{R}^n$, să fie un difeomorfism de clasă C^∞ a lui D pe $\Phi(D)$.

Folosind teorema funcțiilor implicite și propoziția 2 din cap. I, § 2, nr. 3, obținem

Propoziția 2. *Un sistem de n funcții $Y_1, \dots, Y_n$ diferențiabile de clasă C^∞ într-o vecinătate a unui punct $a \in V$ formează un sistem de coordonate locale în a , atunci și numai atunci când iacobianul $\left(\frac{D(Y_1, \dots, Y_n)}{D(X_1, \dots, X_n)} \right)_a \neq 0$.*

Se vede că pentru orice hartă (U, φ) din atlasul ce definește structura lui V , φ definește un sistem de coordonate locale pe U .

Definiția 16. O varietate diferențiabilă se numește *orientabilă*, dacă există un atlas diferențiabil pe V , $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$, astfel încît pentru orice $(i, j) \in I \times I$, cu $U_{ij} \neq \emptyset$, iacobianul difeomorfismului $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ să fie pozitiv.

3. Varietăți analitice complexe

În cazul unei varietăți topologice de dimensiune reală pară în fiecare punct, ținînd seama de omeomorfismul $\tau^n: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, (cap. I, § 1, nr. 1) orice funcție definită pe V poate fi local studiată pe un deschis din $\mathbb{C}^n$. În locul hărților reale vom introduce hărți complexe și atlase complexe, iar pentru ca noțiunea de olomorfie să aibă sens independent de o anumită hartă se va cere ca omeomorfismele $\varphi^* \circ \varphi^{-1}$ de legătură de la o hartă (U, φ) la alta (U^*, φ^*) să fie izomorfisme analitice*).

Definiția 17. Fie V un spațiu topologic. Vom numi *hartă complexă* pe V un cuplu (U, φ) , unde U este un deschis din V , iar φ un omeomorfism al lui U pe un deschis G dintr-un spațiu $\mathbb{C}^n$. Numărul n este *dimensiunea complexă* a hărții. Evident, atunci $(U, \tau^n \circ \varphi)$ este o hartă reală de dimensiune reală $2n$.

Definiția 18. Două hărți complexe (U, φ) și (U^*, φ^*) pe V se numesc *compatibile olomorf (analitic)* dacă, în cazul cînd $U \cap U^* \neq \emptyset$, omeomorfismul $\varphi^* \circ \varphi^{-1}$ este un izomorfism analitic (cap. I, § 5).

*) Condiția este necesară și suficientă după cum se vede printr-un raționament analog cu cel dezvoltat mai sus în cazul diferențiabil.

Definiția 19. O familie de hărți complexe $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ pe V , pentru care $\bigcup_{i \in I} U_i = V$, formează un *atlas olomorf (analitic)* pe V , dacă două hărți arbitrare ale familiei sînt întotdeauna compatibile olomorf.

Evident un spațiu topologic pe care există un atlas olomorf este local euclidian de dimensiune reală pară în fiecare punct.

Definiția 20. Un atlas olomorf pe V definește o *structură analitică complexă* pe V .

Definiția 21. Două atlase olomorfe definesc aceeași structură analitică complexă pe V , atunci cînd reuniunea lor formează un atlas olomorf.

Definiția 22. Un atlas olomorf este *complet*, dacă conține orice hartă complexă compatibilă olomorf cu toate hărțile sale.

Definiția 23. Un spațiu topologic Hausdorff V împreună cu un atlas olomorf complet (i.e. un spațiu topologic Hausdorff, înzestrat cu o structură analitică complexă) se numește *varietate analitică complexă*. *)

Dacă V este o varietate analitică complexă, atunci este varietate topologică de dimensiune reală pară în fiecare punct. Putem defini și dimensiunea complexă a lui V în fiecare punct $p \in V$ ca dimensiunea unei hărți complexe (U, φ) de pe V cu $p \in U$. Dimensiunea reală va fi dublul celei complexe. O varietate analitică complexă se va numi *n-dimensională*, dacă are dimensiunea complexă n în fiecare punct al ei. **)

Propoziția 3. Oricărei varietăți analitice complexe V îi corespunde în mod natural o structură de varietate diferențiabilă reală de clasă C^∞ , orientabilă.

Dacă structura analitică pe V este definită de atlasul olomorf $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ și dacă pentru fiecare $i \in I$, $\varphi_i(U_i)$ este un deschis din $\mathbb{C}^n$, atunci $\tilde{\varphi}_i = \tau^n \circ \varphi_i$ este un omeomorfism al lui U_i pe

*) Noțiunea de varietate analitică a fost introdusă de O. Teichmüller, [83]. Mai târziu, cercetările lui H. Hopf și Ch. Ehresmann au atras atenția specialiștilor asupra acestei noțiuni [5].

**) Ori de cîte ori vom vorbi despre o varietate analitică complexă, prin dimensiunea ei (resp. dimensiunea într-un punct) vom înțelege dimensiunea complexă, afară de cazul în care vom adăuga adjectivul „reală”.

deschisul $\tilde{\varphi}_i(U_i) \subset \mathbb{R}^{2n}$ și se verifică ușor că $\{(U_i, \tilde{\varphi}_i)\}_{i \in I}$ formează un atlas diferențiabil de clasă C^∞ pe V , iar $\det J_{\tilde{\varphi}_j \circ \tilde{\varphi}_i^{-1}} > 0$, ori de câte ori $\tilde{\varphi}_j \circ \tilde{\varphi}_i^{-1}$ există.

Definiția 24. Fie W un deschis al unei varietăți analitice complexe V , definite cu ajutorul atlasului olomorf $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$. Pentru orice $i \in I$, pentru care $U_i \cap W \neq \emptyset$, cuplul $(U_i \cap W, \varphi_i|_{U_i \cap W})$ este o hartă complexă pe W , iar mulțimea acestor hărți formează un atlas olomorf pe W . Organizat ca varietate analitică complexă cu acest atlas, W se numește *subvarietate analitică deschisă* a lui V și se spune că structura corespunzătoare a lui W este indusă de structura lui V^* .

Fie V și W două varietăți analitice complexe definite de atlasele $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ și $\{(\Omega_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$.

Definiția 25. O aplicație continuă $f: V \rightarrow W$ se numește *aplicație analitică (olomorfă)* pe V , dacă oricare ar fi punctul $a \in V$ și indicii $i \in I$, $\alpha \in A$, astfel încît $a \in U_i$ și $f(a) \in \Omega_\alpha$, aplicația $\psi_\alpha \circ f \circ \varphi_i^{-1}: \varphi_i[U_i \cap f^{-1}(\Omega_\alpha)] \rightarrow \psi_\alpha[f(U_i) \cap \Omega_\alpha]$ este analitică (cap. I, § 5).

Evident, definiția este independentă de hărțile folosite.

Dacă $W = \mathbb{C}$ se obține definiția *funcției olomorfe sau analitice* pe V . Ținînd seama de observația de mai sus după care orice deschis din V se organizează ca varietate analitică cu structura indusă de aceea a lui V , se obține noțiunea de aplicație, resp. funcție olomorfă, definită pe un deschis din V .

Relativ la funcții olomorfe pe un închis din V se extinde definiția 2 din cap. I, § 3, nr. 1.

Definiția 26. Vom numi *izomorfism analitic* (olomorfism sau aplicație biolomorfă) un omeomorfism $f: V \rightarrow W$, astfel încît atât f cît și f^{-1} să fie aplicații analitice (i.e. $\psi_\alpha \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ să fie izomorfisme analitice, ori de câte ori există).

În puncte corespunzătoare prin f cele două varietăți V și W au aceeași dimensiune.

Fie V o varietate analitică complexă.

*) Remarcăm că denumirea de subvarietate analitică complexă se folosește adesea într-un sens diferit. (A se vedea § 8, nr. 2, definiția 2.)

Definiția 27. Un sistem de n funcții complexe $z_1, z_2, \dots, z_n$, definite pe o vecinătate a unui punct $a \in V$, formează un *sistem de coordonate locale* în punctul a , dacă există un deschis D , $a \in D$, astfel încît aplicația $\Phi: D \rightarrow \mathbb{C}^n$, $p \in D \rightarrow \Phi(p) = (z_1(p), \dots, z_n(p)) \in \mathbb{C}^n$, să fie un izomorfism analitic al lui D pe $\Phi(D)$.

Folosind propozițiile din cap. I, § 5, obținem

Propoziția 4. Un sistem de n funcții analitice $w_1, \dots, w_n$, definite într-o vecinătate a lui a , formează un sistem de coordonate locale în a , dacă și numai dacă iacobianul $\left(\frac{D(w_1, \dots, w_n)}{D(z_1, \dots, z_n)} \right)_a \neq 0$.

În particular, orice hartă complexă (U, φ) din atlasul complet al lui V definește prin intermediul lui φ un sistem de coordonate locale pe U .

Exemple de varietăți analitice.

1° $\mathbb{C}^n$, a cărei structură poate fi definită cu o singură hartă $(\mathbb{C}^n, 1_{\mathbb{C}^n})$.

2° Spațiul proiectiv complex n -dimensional $\mathbb{P}C^n$ ([73], ed. rusă, p. 17, [12], cartea III, cap VIII, § 4, nr 3, ed. rusă p. 229).

Fie $\mathbb{C}_*^{n+1} = \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$. Definim în $\mathbb{C}_*^{n+1}$ următoarea relație de echivalență R : dacă $z, \tilde{z} \in \mathbb{C}_*^{n+1}$, $z \sim_R \tilde{z} \Leftrightarrow \tilde{z} = \lambda z$, pentru un anumit $\lambda \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$. Notăm cu $\dot{z}$ clasa lui z , cu $\mathbb{P}C^n$ spațiul topologic cît $\mathbb{C}_*^{n+1}/R$ și cu τ aplicația canonică $z \rightarrow \dot{z}$.

Numim $\mathbb{P}C^n$ *spațiul proiectiv complex n -dimensional*.

$\mathbb{P}C^n$ este *spațiu separat*:

1) Relația de echivalență R este *deschisă*: Dacă U este un deschis din $\mathbb{C}_*^{n+1}$, atunci $\tau^{-1}[\tau(U)] = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}^*} \lambda U$ este de asemenea deschis în $\mathbb{C}_*^{n+1}$ ca reuniune de deschise λU .

2) Mulțimea $M = \{(z, \tilde{z}) \in \mathbb{C}_*^{n+1} \times \mathbb{C}_*^{n+1} \mid z \sim_R \tilde{z}\}$ este *închisă* în $\mathbb{C}_*^{n+1} \times \mathbb{C}_*^{n+1}$: Dacă $(\zeta, \tilde{\zeta}) \in M'$, există un șir $(z^v, \tilde{z}^v) \in M$, care tinde la $(\zeta, \tilde{\zeta})$. Cum $\zeta \in \mathbb{C}_*^{n+1}$, $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_{n+1})$, putem alege un indice k , astfel încît $\zeta_k \neq 0$ și deoarece $z^v \rightarrow \zeta$, putem presupune $z_k^v \neq 0$. Din $\tilde{z}^v = \tilde{z}_k^v (z_k^v)^{-1} z^v$ trecînd la limită deducem $\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}_k (\zeta_k)^{-1} \zeta$ sau $(\zeta, \tilde{\zeta}) \in M$.

3) Fie $\dot{z} \neq \dot{z}^*$ două puncte arbitrare din $\mathbf{PC}^n$. Deoarece $(z, z^*) \notin M$, există în $\mathbf{C}_*^{n+1}$ deschisele $U \ni z$ și $V \ni z^*$, astfel încît $(U \times V) \cap M = \emptyset$. Atunci $\tau(U)$ și $\tau(V)$ sînt deschise disjuncte în $\mathbf{PC}^n$, care conțin $\dot{z}$ resp. $\dot{z}^*$. *)

$\mathbf{PC}^n$ formează *varietate analitică complexă n -dimensională* cu structura definită de atlasul $(U_k, \varphi_k)_{k \in \{1, \dots, n+1\}}$ definit în modul următor:

1) Luăm $U_k = \{\dot{z} \mid z = (z_1, \dots, z_{n+1}), z_k \neq 0\}$. Deoarece $\Omega_k = \tau^{-1}(U_k) = \{z \in \mathbf{C}_*^{n+1} \mid z_k \neq 0\}$ este un deschis în $\mathbf{C}_*^{n+1}$, U_k este deschis în $\mathbf{PC}^n$.

2) Alegem $\varphi_k: \dot{z} \in U_k \rightarrow t = \left(\frac{z_1}{z_k}, \dots, \frac{z_{k-1}}{z_k}, \frac{z_{k+1}}{z_k}, \dots, \frac{z_{n+1}}{z_k} \right) \in \mathbf{C}^n$.

Aplicația φ_k are sens (t nu depinde de reprezentantul ales în clasa $\dot{z}$). Ea este injectivă: $\varphi_k^{-1}(t_1, \dots, t_n) = \overline{(t_1, \dots, t_{k-1}, 1, t_k, \dots, t_n)}$ și definește un omeomorfism al lui U_k pe $\mathbf{C}^n$: Într-adevăr aplicația $\psi_k = \varphi_k \circ \tau: \Omega_k \rightarrow \mathbf{C}^n$ este continuă, τ este deschisă, deci φ_k este continuă. Avem relația $\varphi_k^{-1} = \tau \circ \chi_k$ unde χ_k este omeomorfismul lui $\mathbf{C}^n$ în $\mathbf{C}^{n+1}$, care asociază punctului t punctul $(t_1, \dots, t_{k-1}, 1, t_k, \dots, t_n)$.

3) Se verifică prin calcul că $\varphi_j \circ \varphi_k^{-1}$ sînt izomorfisme analitice: Fie $z \in \Omega_j \cap \Omega_k$, $t = \varphi_k(\dot{z})$ și $s = \varphi_j(\dot{z})$, iar $k < j$ deci $t_{j-1} \neq 0$ și $s_k \neq 0$. Aplicația $\varphi_j \circ \varphi_k^{-1}$ se scrie $s_h = t_h / t_{j-1}$ pentru $h=1, \dots, k-1$; $j, \dots, n$; $s_k = 1/t_{j-1}$ și $s_h = t_{h-1}/t_{j-1}$ pentru $h=k+1, \dots, j-1$, deci este olomorfă. Analog $\varphi_k \circ \varphi_j^{-1}: t_h = s_h / s_k$ pentru $h=1, \dots, k-1, j, \dots, n$, $t_h = s_{h+1}/s_k$ pentru $h=k, \dots, j-2$ și $t_{j-1} = 1/s_k$ este olomorfă.

Evident, varietățile analitice complexe formează o categorie, în care morfismele sînt date de aplicații olomorfe.

* Punctul 3) demonstrează în cazul nostru particular suficiența următorului criteriu: Fie E un spațiu topologic separat și R o relație de echivalență deschisă. Necesar și suficient ca spațiul cît E/R să fie separat este ca mulțimea $M = \{(p, q) \in E \times E \mid p \sim_R q\}$ să fie închisă în $E \times E$ ([12], cartea III, cap. I, § 9, nr. 9, ed. rusă p. 104).

În cap. IV, § 8 și în cap. VI, § 1 vom folosi *produsul direct a două varietăți analitice* V și W . Dacă $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ și $\{(\Omega_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ sînt două atlase olomorfe, ce definesc respectiv structura analitică pe V și W , organizăm $V \times W$ ca varietate analitică complexă luînd atlasul $\{[U_i \times \Omega_\alpha, (\varphi_i, \psi_\alpha)]\}_{(i, \alpha) \in I \times A}$.

4. Spre deosebire de cazul $n = 1$ al suprafețelor riemanniene, care după teorema lui Radó sînt spații topologice cu bază numerabilă ([82] sau [81], vol II, cap VII, III), există varietăți analitice complexe de dimensiuni $n > 1$, care nu admit o bază numerabilă [15] sau [35], p. 280.

Varietățile analitice complexe cu bază numerabilă rămîn însă un cadru important de dezvoltare a teoriei funcțiilor analitice. Menționăm

Teorema 1. *Dacă V este o varietate (topologică) conexă, următoarele proprietăți sînt echivalente:*

- 1° V are bază numerabilă.
- 2° V este paracompactă.
- 3° V este numerabilă la infinit.

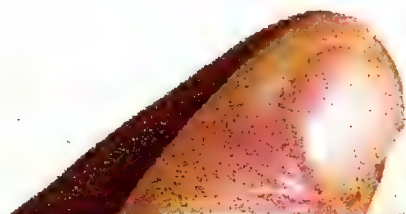
Pe o varietate analitică complexă paracompactă putem preciza teorema 9 din cap. II, § 8, nr. 1:

Teorema 2. *Pentru orice acoperire local finită $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ a unei varietăți paracompacte diferențiabile de clasă C^∞ există o partiție a unității de clasă C^∞ subordonată acoperirii, i.e. o familie de funcții $\{f_i\}_{i \in I}$ diferențiabile de clasă C^∞ pe V cu proprietățile:*

- 1° $f_i: V \rightarrow [0, +\infty)$.
- 2° $\text{supp } f_i \subset U_i$.
- 3° Oricare ar fi $a \in V$, $\sum_{i \in I} f_i(a) = 1$, ([29], p.156).

5. În cap. I am stabilit proprietăți ale funcțiilor olomorfe pe deschise din $\mathbb{C}^n$. Este natural să ne punem problema în ce măsură aceste rezultate se păstrează pe o varietate analitică complexă.

Fiindcă orice punct $a_0 \in V$ este cuprins în suportul unei hărți (U, φ) și φ este un izomorfism analitic al lui U pe un deschis dintr-un spațiu $\mathbb{C}^n$, proprietățile locale ale funcțiilor olomorfe pot fi folosite.



De exemplu, dacă f este o funcție olomoră pe V , putem dezvoltă $f \circ \varphi^{-1}$ în serie Taylor în jurul punctului $z^0 = \varphi(a_0)$:

$$(f \circ \varphi^{-1})(z) = \sum_{j \in \mathbb{N}} a_{j_1 \dots j_n} (z_1 - z_1^0)^{j_1} \dots (z_n - z_n^0)^{j_n}. \quad (1)$$

Coeficienții seriei Taylor din membrul al doilea, pe care să o notăm cu $A(z - z^0)$, depind desigur de harta utilizată, dar ordinul ei $\omega(A)$ (cap. I, § 11, definiția 2) este invariant de o schimbare de hartă i.e. de coordonate locale. Are sens prin urmare

Definiția 28. Se numește *ordin* al funcției f în punctul a_0 (sau ordin de multiplicitate al lui a_0 ca zero al lui f) ordinul $\omega(A)$ al unei serii Taylor (1), obținute alegând o hartă oarecare (U, φ) cu proprietatea că $a_0 \in U$ și dezvoltând $f \circ \varphi^{-1}$ în jurul punctului $\varphi(a_0)$.

Tot astfel se pot introduce, independent de sistemul de coordonate local, unele noțiuni în legătură cu aplicațiile olomorfe:

Să considerăm două varietăți analitice complexe V și W definite de atlasele $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ și $\{(\Omega_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$.

Definiția 29. Fie $f: V \rightarrow W$ o aplicație analitică și a_0 un punct din V . Să alegem hărțile (U_i, φ_i) și $(\Omega_\alpha, \psi_\alpha)$, astfel încît $a_0 \in U_i$ și $f(a_0) \in \Omega_\alpha$. Se numește *rang* al aplicației f în punctul a_0 rangul aplicației $\psi_\alpha \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ în punctul $\varphi_i(a_0)$. Aplicația f se numește *nesingulară în punctul a_0* , dacă $\psi_\alpha \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ este nesingulară în punctul $\varphi_i(a_0)^*$ (cap. I, § 5).

Pentru a extinde principiul prelungirii analitice dăm mai întii

Definiția 30. Două aplicații olomorfe f și $g: V \rightarrow W$ coincid împreună cu derivatele lor de orice ordin în punctul $a_0 \in V$, dacă $f(a_0) = g(a_0)$ și dacă luînd indicii i și α astfel încît $a_0 \in U_i$ și $f(a_0) \in \Omega_\alpha$, funcțiile componente ale aplicațiilor analitice $\psi_\alpha \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ și $\psi_\alpha \circ g \circ \varphi_i^{-1}$ au aceleași derivate în punctul $\varphi_i(a_0)$.

Definiția are sens, proprietatea fiind independentă de hărțile (U_i, φ_i) și $(\Omega_\alpha, \psi_\alpha)$ considerate.

*) Definiția are sens pentru aplicații diferențiabile pe o varietate diferențiabilă.

Teorema 3. (Principiul prelungirii analitice pentru aplicații olomorfe pe varietăți analitice complexe.) *) Dacă V este conexă, două aplicații f și $g: V \rightarrow W$, care (forma tare): coincid împreună cu derivatele lor de orice ordin într-un punct $a_0 \in V$,
resp. (forma slabă): coincid pe un deschis din V ,
coincid pe V .

Demonstrația reia procedeul folosit în cap. I, § 9, nr. 4, la stabilirea teoremei 3 (de identitate). Mulțimea E a punctelor $p \in V$, în care f și g coincid împreună cu derivatele lor de orice ordin, este deschisă: Fie b un punct arbitrar din E , iar (U_j, φ_j) și $(\Omega_\beta, \psi_\beta)$ două hărți pe V resp. W , astfel încît $b \in U_j$ și $f(b) \in \Omega_\beta$. Dacă v este o vecinătate deschisă și conexă a lui b , inclusă în $U_j \cap f^{-1}(\Omega_\beta) \cap g^{-1}(\Omega_\beta)$, atunci teorema 3 citată mai sus arată că $\psi_\beta \circ f \circ \varphi_j^{-1} = \psi_\beta \circ g \circ \varphi_j^{-1}$ coincid pe $\varphi_j(v)$, deci $f = g$ pe v și $v \subset E$. Mulțimea E este închisă: Oricare ar fi $b \in E'$ există un șir $\{b_n\} \subset E$, $b_n \rightarrow b$ și cum $f(b_n) = g(b_n)$, din continuitate rezultă $f(b) = g(b)$. Reluînd vecinătatea v de mai sus și aplicînd din nou teorema 3 în $\varphi_j(v)$ pentru funcțiile $\psi_\beta \circ f \circ \varphi_j^{-1}$ și $\psi_\beta \circ g \circ \varphi_j^{-1}$ deducem că $v \subset E$, deci $b \in E$. Deoarece $E \neq \emptyset$ și V este conexă, rezultă că $E = V$.

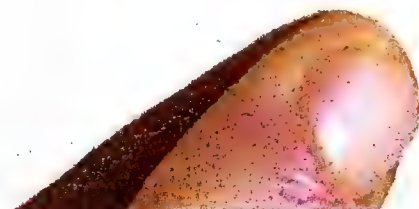
6. Vom nota cu $\mathcal{O}(V, W)$, $\mathcal{O}^\infty(V, W)$, resp. $\mathcal{O}(V, W)$, mulțimea aplicațiilor $f: V \rightarrow W$ continue, diferențiabile de clasă C^∞ , resp. olomorfe. Dacă W este înzestrat cu o structură algebrică, aceste mulțimi obțin în mod natural structură algebrică. Vom considera în mod deosebit cazul $W = \mathbb{C}$, în care vom nota prescurtat mulțimile de mai sus cu $\mathcal{O}(V)$, $\mathcal{O}^\infty(V)$ resp. $\mathcal{O}(V)$. Ele formează $\mathbb{C}$ -algebre.

Reluînd procedeul din cap. I, § 7, putem înzestra $\mathcal{O}(V)$ cu topologia convergenței uniforme pe compacte.***) Folosim în acest scop familia de seminorme $\| \cdot \|_K$, unde K este un compact din V , iar pentru $f \in \mathcal{O}(V)$,

$$\| f \|_K = \sup_{a \in K} |f(a)|. \quad (2)$$

*) Dacă $W = \mathbb{C}$ obținem principiul prelungirii analitice pentru funcții olomorfe.

**) Evident, spațiul $\mathcal{O}(V)$ poate fi organizat în acest mod pe orice varietate V topologică.



$\mathcal{O}(V)$ devine astfel o algebră topologică separată, local convexă. Ea induce topologia convergenței uniforme pe $\mathcal{O}^\infty(V)$ și $\mathcal{O}(V)$.

Definim pentru K , un compact din V , și pentru $f \in \mathcal{O}(V, \mathbb{C}^m)$ de componente $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{O}(V)$, seminorma

$$\|f\|_K = \sup_{j=1, \dots, m} \|f_j\|_K \quad (3)$$

și introducem pe $\mathcal{O}(V, \mathbb{C}^m)$ topologia convergenței uniforme pe compacte. Astfel $\mathcal{O}(V, \mathbb{C}^m)$ devine izomorf (algebric și topologic) cu spațiul produs $\mathcal{O}(V)^m$. Considerații analoge au loc pentru $\mathcal{O}^\infty(V, \mathbb{C}^m)$ și $\mathcal{O}(V, \mathbb{C}^m)$.

Remarcăm că în ipoteza $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$, seminormele (2) și (3) sînt norme pe $\mathcal{O}(V)$ resp. $\mathcal{O}(V)^m$, după cum rezultă imediat din teorema 3.

În cazul varietăților analitice complexe V numerabile la infinit, putem lua un șir de compacte $K_p \subset V$ cu $\bigcup_{p=1}^{\infty} K_p = V$ și genera topologia lui $\mathcal{O}(V)$ cu familia numerabilă de seminorme $\|\cdot\|_{K_p}$, pe care le vom nota prescurtat $\|\cdot\|_p$. În acest caz, $\mathcal{O}(V)$ și $\mathcal{O}(V)$ (ca și $\mathcal{O}(V)^m$ și $\mathcal{O}(V)^m$) sînt spații Fréchet.

Pe aceste varietăți se extind ușor teorema lui Weierstrass (teorema 1, cap. I, § 6, nr. 2), teorema lui Montel (teorema 2, cap. I, § 6, nr. 3) și teorema lui Vitali (teorema 4, cap. I, § 9, nr. 4). Rezultă că $\mathcal{O}(V)$ este un închis în $\mathcal{O}(V)$ și că mulțimile compacte din $\mathcal{O}(V)$ coincid cu mulțimile închise și mărginite.*)

Cum o varietate este un spațiu separat și local compact, teorema lui Baire (teorema 2 din cap. I, § 3, nr. 4) se aplică și ne permite să extindem la spațiul $\mathcal{O}(V)$ teorema 3 din cap. I, § 6, nr. 3.

*) Pe o varietate analitică complexă oarecare aceste rezultate rămîn valabile. Pentru demonstrația teoremei lui Montel se folosesc în loc de procedeul diagonal ultrafiltre.

§ 2. Varietăți analitice complexe etalate în $\mathbb{C}^n$

În unele probleme, de exemplu în teoria prelungirii analitice, au un rol deosebit varietățile, care formează fascicol peste un deschis din $\mathbb{C}^n$, proiecția fiind un izomorfism analitic local.

1. Fie V și W două varietăți analitice complexe.

Definiția 1. Se numește *izomorfism analitic local* sau *etalare analitică* a lui V în W o aplicație analitică $\Phi: V \rightarrow W$, cu următoarea proprietate: Oricare ar fi punctul $a \in V$, există o vecinătate deschisă U a lui a în V , astfel încît $\Phi(U)$ este un deschis din W , iar $\Phi|_U: U \rightarrow \Phi(U)$ este un izomorfism analitic.

Denumirea de etalare analitică subliniază faptul că (V, Φ, W) formează o etalare topologică, (iar $(V, \Phi, \Phi(V))$ un fascicol). În cele ce urmează, vom scrie pentru prescurtare în cazul varietăților analitice *etalare* în loc de *etalare analitică* și vom spune că V este etalată în W prin Φ .

Dacă V este un deschis din W , organizat ca subvarietate, aplicația corespunzătoare incluziunii este un exemplu de etalare.

În cazul $n = 1$, prelungind analitic în sensul lui Weierstrass un element de funcție analitică pe o suprafață riemanniană V obținem domeniul de existență weierstrassian al funcției analitice considerate $\tilde{V}$, ([81], vol. I, cap. IV, I), care este o varietate analitică complexă 1-dimensională etalată peste V . Acest caz stă la baza teoriei prelungirii analitice, pe care o vom dezvolta în § 4.

Dintre proprietățile varietăților topologice în legătură cu etalarea menționăm generalizarea teoremei *Poincaré-Volterra* ([81], vol. I, cap. IV, I, nr. 7):

Teorema 1. Fie V și W varietăți topologice, V conexă, iar W numerabilă la infinit. Dacă există o etalare $\Phi: V \rightarrow W$, atunci V este numerabilă la infinit.

2. Ne vom opri asupra cazului $W = \mathbb{C}^n$ și vom nota (V, Φ) un cuplu format dintr-o varietate analitică complexă V și o etalare $\Phi: V \rightarrow \mathbb{C}^n$.*)

*) O varietate analitică complexă etalată în $\mathbb{C}^n$ se numește uneori domeniu riemannian [44].

După teorema 1, o varietate analitică complexă V conexă, etalată în $\mathbb{C}^n$ este numerabilă la infinit, iar după teorema 1 din § 1, nr. 4, are bază numerabilă și este paracompactă. Notînd cu Φ etalarea, $\Phi^{-1}(z)$ este o mulțime cel mult numerabilă, oricare ar fi $z \in \mathbb{C}^n$. Conform teoremelor 3 și 6 din cap. II, § 8, nr. 1, V este spațiu separabil și metrizabil. $O(V)$ are proprietățile indicate în § 1, nr. 6.

Evident, condiția necesară și suficientă pentru ca o varietate analitică complexă V să admită o etalare Φ în $\mathbb{C}^n$ este ca în $O(V)$ să existe n funcții, care să formeze în fiecare punct $p \in V$ un sistem de coordonate locale (§ 1, nr. 3, definiția 27).

Existența etalării Φ permite alegerea unui sistem privilegiat de hărți pe V și definirea unor noțiuni care în genere nu au sens pe o varietate analitică decît relativ la o hartă, de exemplu: noțiunile de polidisc, derivată, dezvoltare Taylor.

Definiția 2. Fie $a \in V$ și $r > 0$. Se numește *polidisc pe V de centru a și rază r* o mulțime deschisă din V , pe care o vom nota $U_r(a)$, care conține punctul a și astfel încît $\Phi|_{U_r(a)}$ este un izomorfism analitic al acestei mulțimi pe polidiscul $U_{r,\dots,r}(z) = \{\zeta \in \mathbb{C}^n \mid |\zeta_k - z_k| < r, k = 1, \dots, n\}$, unde $z = \Phi(a)$.

Pentru simplificare convenim să notăm $U_{r,\dots,r}(z)$ cu $U_r(z)$.

Pentru r suficient de mic, $U_r(a)$ există.

Definiția 3. Numim *distanța lui a la frontiera lui V* și o notăm cu $d(a)$, marginea superioară a numerelor r pentru care $U_r(a)$ există pe V .

Această margine superioară este atinsă, deoarece se verifică ușor că $\bigcup_{r < d(a)} U_r(a) = U_{d(a)}(a)$.

Definiția 4. Pentru orice mulțime $M \subset V$ numim *distanța lui M la frontiera lui V* : $d(M) = \inf_{a \in M} d(a)$.

Dacă $M = K$ este un compact din V , atunci $d(K) = d(a^*)$ pentru un anumit punct $a^* \in K$, deci $d(K) > 0$.

Se verifică ușor următoarele leme:

L e m a 1. Fie (V, Φ) , $a \in V$ și $0 < r < d(a)$.

Dacă $b \in \bar{U}_r(a)$, atunci

1) $d(b) \geq d(a) - r$.

2) $U_{d(a)-r}(b) \subset U_{d(a)}(a)$ și

3) $a \in \bar{U}_r(b)$, dacă $r < d(a)/2$.

3') Dacă $b \in U_r(a)$ și $r \leq d(a)/2$, atunci $a \in U_r(b)$.

L e m a 2. Fie (V, Φ) , $a \in V$ și $\bar{U}_{d(a)}(a)$ închiderea polidiscului $U_{d(a)}(a)$ relativ la V . Restricția lui Φ la $\bar{U}_{d(a)}(a)$ este injectivă.

În cazul contrar ar exista două puncte b_1 și b_2 diferite în $\bar{U}_{d(a)}(a)$, astfel încît $\Phi(b_1) = \Phi(b_2) = z^*$. Să luăm un număr r , $0 < r < \min[d(b_1), d(b_2)]$, suficient de mic pentru ca $U_r(b_1) \cap U_r(b_2) = \emptyset$. Avem bijecțiile determinate de $\Phi: U_r(b_k) \cap U_{d(a)}(a) \xrightarrow{\cong} U_r(z^*) \cap U_{d(a)}(z)$, $k = 1, 2$, care contrazic faptul că restricția lui Φ la $U_{d(a)}(a)$ este injectivă.

L e m a 3. Fie K un compact din varietatea analitică complexă V etalată prin Φ în $\mathbb{C}^n$ și r un număr $0 < r < d(K)$. Atunci

$$L = \bigcup_{a \in K} \bar{U}_r(a)$$

este un compact din V .

Mulțimea $K \times \bar{U}_r(0)$ este un compact din spațiul topologic produs $V \times \mathbb{C}^n$. Definim aplicația $\tau: (a, t) \in K \times \bar{U}_r(0) \rightarrow b \in V$ în modul următor: $b \in \bar{U}_r(a)$ și $\Phi(b) - \Phi(a) = t$. Se verifică direct că τ este continuă și că $\tau(K \times \bar{U}_r(0)) = L$. Prin urmare, L este compact în V .

L e m a 4. Fie (V, Φ) o varietate analitică etalată în $\mathbb{C}^n$ și $a \in V$. Atunci $d[U_{d(a)}(a)] = 0$.

Procedînd prin reducere la absurd să presupunem că există un număr m : $0 < m < d(\tilde{a})$, oricare ar fi $\tilde{a} \in U_{d(a)}(a)$. Atunci există $\bar{U}_m(\tilde{a})$ pe V .

Fie r un număr, astfel încît $0 < r < d(a) < r + m$. Mulțimile $L = \bigcup_{\tilde{a} \in \bar{U}_r(a)} \bar{U}_m(\tilde{a})$ și $\Lambda = \Phi(L) = \bigcup_{\tilde{z} \in \bar{U}_r(z)} \bar{U}_m(\tilde{z})$, unde $z = \Phi(a)$ și $\tilde{z} = \Phi(\tilde{a})$, sînt compacte după lema 3. Se verifică ușor că

$\Lambda = \bar{U}_{m+r}(z)$, $\dot{\Lambda} = U_{m+r}(z) = \bigcup_{\tilde{z} \in U_r(z)} U_m(\tilde{z})$ și $\dot{\Lambda} = \Phi(\dot{L})$. Aplicația

$\Phi|_{\dot{L}}$ nu este o bijectie, pentru că în acest caz ar exista $U_{m+r}(a)$ și $m+r > d(a)$. În concluzie, putem găsi două puncte b' și $b'' \in \dot{L}$, $b' \neq b''$, cu $\Phi(b') = \Phi(b'') = z^* \in \dot{\Lambda}$.

Luind un șir de numere $r_k \searrow d(a) - m$, $0 < r_k < d(a)$ și repetind procedeul pentru $r = r_k$, determinăm șirurile $b'_k, b''_k \in \dot{L}_k$, $b'_k \neq b''_k$, cu $z_k^* \in \dot{\Lambda}_k$, din care putem extrage subșiruri convergente, pe care le vom nota tot b'_k resp. b''_k . Fie $b' = \lim_{k \rightarrow \infty} b'_k$, $b'' = \lim_{k \rightarrow \infty} b''_k$ și $z^* = \lim_{k \rightarrow \infty} z_k^*$; $z^* = \Phi(b') = \Phi(b'')$. Deoarece b' și $b'' \in \bar{U}_{d(a)}(a)$, aplicând lema 2 deducem că $b' = b''$. Punctul b' admite o vecinătate v , astfel încît $\Phi|_v$ să fie injectivă; dar în v se află pentru k suficient de mare punctele b'_k și b''_k , astfel încît ajungem la o contradicție.

Pe o varietate analitică (V, Φ) etalată în $\mathbb{C}^n$ putem vorbi despre dezvoltarea unei funcții olomorfe în serie Taylor:

Fie $f \in O(V)$, $a \in V$ și U o vecinătate deschisă a lui a , astfel încît $\Phi|_U$ să fie un izomorfism analitic: $U \rightarrow \Phi(U)$. (Putem lua de exemplu $U = U_{d(a)}(a)$.) Vom nota ${}_a\Phi^{-1} = (\Phi|_U)^{-1}$.

Prin definiția, dacă $z = \Phi(a)$ și $j \in \mathbb{N}^n$, vom lua

$$D^j f(a) = [D^j(f \circ {}_a\Phi^{-1})](z), \quad (1)$$

$D^j = \partial^{j_1} / \partial z_1^{j_1} \dots \partial z_n^{j_n}$ și vom numi dezvoltarea Taylor a funcției f în jurul lui a , dezvoltarea Taylor a funcției $f \circ {}_a\Phi^{-1}$ în jurul lui z :

$$f(a') = \sum_{j \in \mathbb{N}^n} \frac{D^j f(a)}{j_1! \dots j_n!} (z'_1 - z_1)^{j_1} \dots (z'_n - z_n)^{j_n}, \quad (2)$$

unde $z' = \Phi(a')$, a' — punct arbitrar într-o vecinătate a lui a , de exemplu în $U_{d(a)}(a)$.

Dacă $0 < r < d(a)$, în $U_r(z)$ putem aplica inegalitățile Cauchy (cap. I, § 4, nr. 3, (21)) și obținem

$$\left| \frac{D^j f(a)}{j_1! \dots j_n!} \right| \leq \frac{\|f\|_{\overline{U}_r(a)}}{r^{|j|}}. \quad (3)$$

§ 3. Fascicolul germenilor de aplicații olomorfe, definite pe deschisele unei varietăți analitice complexe V cu valori în varietatea analitică complexă W

1. Fie V și W două varietăți analitice complexe cu structura analitică dată de atlasele olomorfe $\{(\Omega_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ resp. $\{(\tilde{\Omega}_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ și pentru fiecare $i \in I$ resp. $\alpha \in A$, $G_i = \varphi_i(\Omega_i)$ resp. $\tilde{G}_\alpha = \tilde{\varphi}_\alpha(\tilde{\Omega}_\alpha)$, G_i și $\tilde{G}_\alpha$ — deschise din $\mathbb{C}^{n_i}$ resp. $\mathbb{C}^{n_\alpha}$ (definiția 23, § 1, nr. 3). Reluînd procedeul din cap. II, § 3, nr. 1, vom considera clasa $\mathfrak{U}$ formată de cuple (F, U) , unde F este o aplicație olomorfă $U \rightarrow W$, iar $U \in \mathcal{U}$ — mulțimea deschiselor din V . *) Introducem pentru fiecare punct $a \in V$, pe mulțimea $\mathfrak{U}(a) = \{(F, U) \in \mathfrak{U} \mid U \in \mathcal{U}(a)\}$ relația de echivalență: Dacă $(F_k, U_k) \in \mathfrak{U}(a)$, $k=1, 2$, prin definiție $(F_1, U_1) \sim (F_2, U_2)$ atunci și numai atunci cînd există $U \in \mathcal{U}(a)$, $U \subset U_1 \cap U_2$, astfel încît $F_1|_U = F_2|_U$. Numim clasa de echivalență a lui (F, U) *germenele aplicației olomorfe F în punctul a* și o notăm F_a . Notăm $O(V, W)_a$ — mulțimea germenilor de aplicații olomorfe în punctul a cu valori în W , $O(V, W) = \bigcup_{a \in V} O(V, W)_a$, $\pi : O(V, W) \rightarrow V$ — *proiecția*, care asociază fiecărui germene F_a punctul a în care este luat, și $\tau : O(V, W) \rightarrow W$ — *valoarea* germenului $\tau(F_a) = F(a)$. Conform propoziției 1, cap. II, § 3, nr. 1, $(O(V, W), \pi, V)$ formează un fascicol pe V , pe care îl vom numi *fascicolul germenilor de aplicații olomorfe pe V cu valori în W* . Reamintim: o vecinătate a

*) Spațiul X este acum V , iar Y este W .

germenului F_a de reprezentant (F, U) este dată de $\underline{U}^F = \{F_b | b \in U\}$. Diagrama (1) din cap. II, § 3 devine pentru $\underline{U} = \underline{U}^F$

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\tau} & F(U) \\ \pi|_U \swarrow \varphi & & \nearrow F \\ & U & \end{array} \quad (1)$$

cu $\varphi = (\pi|_U)^{-1}$: $\pi|_U$ este un omeomorfism: $\underline{U}^F \rightarrow U$, iar τ este o aplicație continuă, surjectivă. (Se aplică observația 2, cap. II, § 3, nr. 1 ținând seama oricare ar fi punctul $\tilde{a} \in W$, aplicația constantă $F: V \rightarrow \{\tilde{a}\}$ este olomorfă pe V).

Propoziția 1. $O(V, W)$ este spațiu Hausdorff.

Fie F_a și $G_{a^*} \in O(\bar{V}, W)$, $F_a \neq G_{a^*}$. Se pot prezenta două cazuri:

1) $a \neq a^*$. Există pe V vecinătățile disjuncte Ω și Ω^* ale punctelor a și a^* . Fie (F, U) resp. (G, U^*) un reprezentant al lui F_a resp. G_{a^*} , $u = U \cap \Omega$ și $u^* = U^* \cap \Omega^*$. Atunci vecinătățile $\underline{u}^F$ a lui F_a și $\underline{u}^{*G}$ a lui G_{a^*} sînt evident disjuncte.

2) $a = a^*$. Fie u o vecinătate conexă a lui a , $u \subset U \cap U^*$. Atunci $\underline{u}^F \cap \underline{u}^G = \emptyset$, deoarece în cazul contrar ar exista $F_c = G_c$, $c \in u$ și F ar coincide cu G pe un deschis din u , care conține c . Prin urmare, după principiul prelungirii analitice (teorema 3, § 1, nr. 5), F și G ar coincide pe u și am avea $F_a = G_a$, ceea ce este absurd.

Propoziția 2. Pe $O(V, W)$ se introduce în mod natural o structură de varietate analitică complexă (determinată de structura analitică a lui V), astfel încît π să devină un izomorfism analitic local (o etalare analitică), iar τ o aplicație analitică.

Prima parte a acestei propoziții este un caz particular al următoarei afirmații:

Propoziția 3. Fie V o varietate analitică complexă, Y un spațiu Hausdorff și $f: Y \rightarrow V$ o etalare. Atunci putem organiza Y

ca varietate analitică complexă, astfel încît f să devină un izomorfism analitic local.

Dacă structura analitică pe V este dată de atlasul olomorf $\{(\Omega_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$, definim pe Y următorul atlas de hărți:

Oricare ar fi $y \in Y$ există prin ipoteză un deschis ω în Y , care conține punctul y și astfel încît $f|_{\omega}$ este un omeomorfism, iar $f(\omega)$ un deschis din V . Fie i un indice din I , astfel încît $f(y) \in \Omega_i$. Cuplul $(u = \omega \cap f^{-1}(\Omega_i), \chi = \varphi_i \circ (f|_u))$ formează o hartă pe Y .

Mulțimea acestor hărți, cînd y și i variază, formează un atlas olomorf. Într-adevăr, $\bigcup u = Y$ și două hărți (u, χ) , și $(\tilde{u} = \tilde{\omega} \cap f^{-1}(\Omega_j), \tilde{\chi} = \varphi_j \circ (f|_{\tilde{u}}))$ sint compatibile olomorf, fiindcă în ipoteza $u \cap \tilde{u} \neq \emptyset$, $\chi \circ \tilde{\chi}^{-1} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ pe $\tilde{\chi}(u \cap \tilde{u})$.

Aplicația f este izomorfism analitic local, deoarece oricare ar fi $y \in Y$, păstrînd notațiile de mai sus, f se exprimă cu ajutorul hărților (u, χ) și (Ω_i, φ_i) ca aplicația identică.

În cazul particular $Y = \mathcal{O}(V, W)$, avem $y = F_a$ de reprezentant (F, U) , $\omega = U^F$, $u = (\bar{U} \cap \Omega_i)^F$ și $\chi = \varphi_i \circ \pi|_u$.

Aplicația τ este analitică, deoarece oricare ar fi $F_a \in \mathcal{O}(V, W)$, τ se exprimă cu ajutorul hărților (u, χ) și $(\tilde{\Omega}_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha)$, $F(a) \in \tilde{\Omega}_\alpha$, sub forma $\tilde{\varphi}_\alpha \circ F \circ \varphi_i^{-1}$ în $U \cap \Omega_i \cap F^{-1}(\tilde{\Omega}_\alpha)$.

Observația 1. Orice secțiune $\varphi \in \Gamma[U, \mathcal{O}(V, W)]$, U — deschis pe V , este o aplicație analitică $U \rightarrow \mathcal{O}(V, W)$ și determină aplicația analitică $F = \tau \circ \varphi: U \rightarrow W$. Reciproc, dacă F este o aplicație analitică $U \rightarrow W$, atunci F determină secțiunea $\varphi: U \rightarrow \underline{U}^F \subset \mathcal{O}(V, W)$, (1). În particular secțiunile globale $\varphi: V \rightarrow \mathcal{O}(V, W)$ corespund biunivoc cu aplicațiile olomorfe $F: V \rightarrow W$.

Pe baza acestei corespondențe aplicațiile olomorfe se identifică cu secțiunile în fascicolul $\mathcal{O}(V, W)$, astfel încît se poate da

Definiția 1. Se numește *aplicație olomorfă* a varietății analitice complexe V în varietatea analitică complexă W o secțiune globală în fascicolul $\mathcal{O}(V, W)$.

Observația 2. Dacă W este înzestrat cu o structură algebrică (de exemplu în cazurile $W = \mathbb{C}$ sau $W = \mathbb{C}^m$), fascicolul $\mathcal{O}(V, W)$ are o structură corespunzătoare (cap. II, § 3, nr. 1, propoziția 2).

În cap. II, § 3, am indicat două propoziții auxiliare: observația 4 de la nr. 1 și observația 5 de la nr. 2, care se transpun imediat și în cazul fasciculelor de germeni de aplicații olomorfe. Enunțăm mai jos numai rezultatul pe care îl vom aplica ulterior:

Observația 3. Fie V, V_1 și W varietăți analitice complexe și $\Phi: V \rightarrow V_1$ un izomorfism analitic. Aplicația $\Phi^{-1*}: \mathcal{O}(V, W) \rightarrow \mathcal{O}(V_1, W)$, care asociază fiecărui germene $F_a \in \mathcal{O}(V, W)$, de reprezentant (F, U) , germenele $(F \circ \Phi^{-1})_{\Phi(a)=a_1} \in \mathcal{O}(V_1, W)$, este un izomorfism analitic. Dacă W este înzestrat cu o structură algebrică, Φ^{-1*} este și izomorfism algebric.

2. Fascicolul germenilor de funcții olomorfe pe V .

În teoria funcțiilor analitice pe varietatea analitică complexă V un rol deosebit de important îl va juca fascicolul $\mathcal{O}(V, \mathbb{C})$, numit *fascicolul germenilor de funcții olomorfe pe V* , pe care îl vom nota $\mathcal{O}(V)$.

Propoziția 4. $\mathcal{O}(V)$ este un fascicol de inele comutative locale cu unitate, mai mult un fascicol de $\mathbb{C}$ -algebre comutative locale cu unitate.

Datorită proprietăților algebrice ale lui $\mathbb{C}$ și ale familiei de funcții olomorfe pe deschise din V , definind în mod obișnuit adunarea și înmulțirea germenilor de funcții analitice, se verifică imediat că $\mathcal{O}(V)$ este un fascicol de inele comutative locale, cu unitate. Pentru $a \in V$ și $F_a, G_a \in \mathcal{O}(V)_a$ de reprezentant (F, U) resp. (G, U^*) , definim

$$F_a + G_a = (F + G)_a \text{ și } F_a G_a = (FG)_a.$$

Unitatea din $\mathcal{O}(V)_a$ este dată de 1_a , germenele în a al funcției constante $V \rightarrow \{1\} \subset \mathbb{C}$, care definește secțiunea 1.

Considerînd fascicolul constant $\mathbb{C}$ pe V (cap. II, § 2, nr. 2 și § 3, nr. 2, 2)) se vede că $\mathcal{O}(V)$ formează un fascicol de $\mathbb{C}$ -algebre comutative locale, cu unitate.

Propoziția 5. *Fibra fascicolului $\underline{O}(V)$ este izomorfă cu $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$.*

1) Fie $V = D$ un deschis din $\mathbb{C}^n$, eventual $\mathbb{C}^n$. Regăsim în acest caz noțiunea de germene de funcție olomorfe, pe care am definit-o în cap. I, § 11. Fibra $\underline{O}_{z_0}$ a fascicolului $\underline{O}(\mathbb{C}^n)$ sau a fascicolului $\underline{O}(D) = \underline{O}(\mathbb{C}^n)_D$ într-un punct z_0 (din $\mathbb{C}^n$ sau D) este după teorema 1 din cap. I, § 11 izomorfă cu $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$, inelul seriilor de puteri convergente, în virtutea izomorfismului, care asociază fiecărui germene în punctul z_0 al unei funcții $F(z)$, olomorfe în vecinătatea lui z_0 , seria de puteri $S(z)$, unde $S(z_1 - z_1^0, \dots, z_n - z_n^0)$ este dezvoltarea tayloriană a lui $F(z)$ în jurul lui z_0 .

2) În cazul unei varietăți V oarecare vom aplica observația 3. Orice punct $a \in V$ aparține unui deschis Ω_i , unde (Ω_i, φ_i) este o hartă din atlasul care definește structura analitică pe V , iar φ_i este un izomorfism analitic: $\Omega_i \rightarrow \varphi_i(\Omega_i) = G_i$ — deschis din $\mathbb{C}^n$, prin urmare φ_i^{-1*} stabilește un izomorfism analitic și algebric între $\underline{O}(\Omega_i)$ și $\underline{O}(G_i)$.

Observația 1 ne dă în cazul $W = \mathbb{C}$ pentru orice deschis U din V izomorfismul dintre $\mathbb{C}$ -algebra $\underline{O}(U)$ a funcțiilor olomorfe pe U și $\mathbb{C}$ -algebra $\Gamma[U, \underline{O}(V)]$ a secțiunilor în $\underline{O}(V)$ peste U . În particular, pentru $U = V$ avem izomorfismul dintre $\underline{O}(V)$ și $\Gamma[V, \underline{O}(V)]$, care permite definirea funcțiilor olomorfe pe V ca secțiuni globale în $\underline{O}(V)$.

3. *Fascicolul germenilor de aplicații olomorfe definite pe deschise din V cu valori în $\mathbb{C}^m$.*

Dacă $W = \mathbb{C}^m$, obținem fascicolul $\underline{O}(V, \mathbb{C}^m)$.

Propoziția 6. *$\underline{O}(V, \mathbb{C}^m)$ este un fascicol de $\underline{O}(V)$ -module, izomorf cu suma directă $\underline{O}(V)^m = \underbrace{\underline{O}(V) \oplus \underline{O}(V) \oplus \dots \oplus \underline{O}(V)}_{\text{de } m \text{ ori}}$.*

Într-adevăr, un element $F_a \in \underline{O}(V, \mathbb{C}^m)$ este germenele unei aplicații olomorfe $F: U \rightarrow \mathbb{C}^m$, unde $U \in \mathcal{U}(a)$. Fie $(F_1, \dots, F_m)$ componentele lui F . Vom asocia lui F_a sistemul de m germeni de funcții



olomorfe $(F_{1a}, \dots, F_{ma}) \in \mathcal{O}(V)^m$. Corespondența nu depinde de reprezentantul (F, U) ales pentru F_a și se verifică imediat că stabilește izomorfismul dorit. În cele ce urmează, vom identifica pe baza acestui izomorfism cele două fascicule și vom nota $F_a = (F_{1a}, \dots, F_{ma})$. Operațiile din $\mathcal{O}(V)^m$ sînt $F_a + G_a = (F_{1a} + G_{1a}, \dots, F_{ma} + G_{ma})$ și $f_a F_a = (f_a F_{1a}, \dots, f_a F_{ma})$, pentru $F_a, G_a \in \mathcal{O}(V)_a^m$ și $f_a \in \mathcal{O}(V)_a$.

Din nou după observația 1, oricare ar fi deschisul $U \subset V$, avem un izomorfism între $\mathcal{O}(U)$ -modulele: $\mathcal{O}(U)^m = \underbrace{\mathcal{O}(U) \times \dots \times \mathcal{O}(U)}_{\text{de } m \text{ ori}}$

format de aplicațiile olomorfe $U \rightarrow \mathbb{C}^m$ și $\Gamma[U, \mathcal{O}(V)^m]$. Aplicațiile olomorfe $V \rightarrow \mathbb{C}^m$ se identifică cu secțiunile din $\Gamma[V, \mathcal{O}(V)]^m$.

4. Pe o varietate analitică complexă V fascicolul germenilor de funcții olomorfe $\mathcal{O}(V)$ asociază fiecărui punct $a \in V$ inelul $\mathcal{O}_a \subset \mathcal{C}_a$, inelul germenilor de funcții continue, luați în punctul a . Cu ajutorul fiecărei hărți (U, φ) de pe V se stabilește un izomorfism analitic între fasciculele $\mathcal{O}(V)_U = \mathcal{O}(U)$ și $\mathcal{O}(G)$, unde am notat cu $G = \varphi(U) \subset \mathbb{C}^n$.

Aceste observații conduc la o nouă definiție a varietăților analitice datorită lui Serre și Cartan, analogă cu aceea dată de Chevalley pentru varietăți diferentiale:

Definiția 2. Se numește *spațiu inelat* (în sens restrîns) peste corpul $\mathbb{C}$ un cuplu $(X, \mathcal{O}(X))$ format dintr-un spațiu topologic X și un fascicol de inele $\mathcal{O}(X)$, astfel încît notînd cu $\mathbb{C}$ fascicolul constant de fibră $\mathbb{C}$ peste X și cu $\mathcal{C}(X)$ fascicolul germenilor de funcții continue pe X cu valori complexe, să avem în categoria fasciculelor de inele peste X incluziunea: $\mathbb{C} \subset \mathcal{O}(X) \subset \mathcal{C}(X)$.

Vom numi $\mathcal{O}(X)$ fascicolul structural al spațiului inelat $(X, \mathcal{O}(X))$ și vom nota $\mathcal{O}(U) = \Gamma(U, \mathcal{O}(X))$, pentru orice deschis $U \subset X$.

Definiția 3. Se numește *morfism de spații inelate*: $(X, \mathcal{O}(X)) \rightarrow (Y, \mathcal{O}(Y))$ o aplicație continuă $\varphi: X \rightarrow Y$, cu proprietatea că pentru orice deschis $W \subset Y$ și $f \in \mathcal{O}(W)$, avem $f \circ \varphi \in \mathcal{O}[\varphi^{-1}(W)]$.

Aplicația φ determină un $\mathbb{C}$ -omomorfism (omomorfism de $\mathbb{C}$ -algebre) : $f \in \mathcal{O}(Y) \rightarrow f \circ \varphi \in \mathcal{O}(X)$.

Conform observației 3, nr. 1, pentru fiecare $x \in X$, φ induce $\mathbb{C}$ -omomorfismul $\varphi_x^* : \mathcal{O}(Y)_{\varphi(x)} \rightarrow \mathcal{O}(X)_x$, definit prin egalitatea $\varphi_x^*(f_{\varphi(x)}) = (f \circ \varphi)_x$, oricare ar fi $f_{\varphi(x)} \in \mathcal{O}(Y)_{\varphi(x)}$.

Spațiile inelate peste $\mathbb{C}$ formează o categorie.

Dacă $\varphi : X \rightarrow Y$ este un omeomorfism și dacă φ satisface condițiile:

- 1) oricare ar fi deschisul $W \subset Y$ și $f \in \mathcal{O}(W)$, $f \circ \varphi \in \mathcal{O}[\varphi^{-1}(W)]$,
 - 2) oricare ar fi deschisul $U \subset X$ și $f \in \mathcal{O}(U)$, $f \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{O}[\varphi(U)]$,
- atunci aplicația $\varphi^* : \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$, de fibră φ_x^* , $x \in X$, este un izomorfism și φ definește un *izomorfism al spațiilor inelate* $(X, \mathcal{O}(X)) \rightarrow (Y, \mathcal{O}(Y))$.

Definiția 4. Se numește *varietate analitică complexă* un spațiu inelat $(V, \mathcal{O}(V))$ cu următoarele proprietăți:

- 1) V este spațiu Hausdorff.
- 2) Orice punct $a \in V$ are o vecinătate U , astfel încît $(U, \mathcal{O}(U))$ este izomorf cu un spațiu inelat $(G, \mathcal{O}(G))$, unde G este un deschis dintr-un $\mathbb{C}^n$, iar $\mathcal{O}(G)$ este fascicolul germenilor de funcții olomorfe pe G .

Orice secțiune pe V în $\mathcal{O}(V)$ se numește *funcție olomorfă (analitică)* și orice morfism de spații inelate, care sînt varietăți analitice complexe, se numește *aplicație olomorfă (analitică)*.

Spațiile inelate $(G, \mathcal{O}(G))$, unde G este un deschis din $\mathbb{C}^n$ și $\mathcal{O}(G) = \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)_G$, se numesc modele locale de varietate analitică complexă.

Se stabilește ușor echivalența între definiția 4 de mai sus și definiția 23, nr. 3, § 1.

Cu ajutorul spațiilor inelate se definesc spațiile analitice ([50], p. 68 și p. 135, [44], p. 150) și, folosind o extindere a noțiunii de spațiu inelat dată mai sus, se obține noțiunea generală de spațiu analitic ([42], expunerea II).

§ 4. Prelungirea analitică

În §§ 4—6 vom aprofunda problema prelungerii analitice a funcțiilor olomorfe pe varietăți analitice complexe. Pentru a putea aplica principiul prelungerii analitice vom presupune că *varietățile* pe care le considerăm *sînt conexe*.

1. Definiția 1. *Prelungirea analitică a unei funcții olomorfe pe V la o varietate V' în care V este etalată prin aplicația Ψ : Fie $f \in O(V)$. Spunem că funcția $f' \in O(V')$ este prelungirea analitică a lui f la V' , dacă $f = f' \circ \Psi$ pe V , i. e. dacă următoarea diagramă*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ \Psi \downarrow & \nearrow f' & \\ V' & & \end{array} \quad (1)$$

este comutativă.

Propoziția 1. *Dacă există o prelungire analitică f' a lui f la V' atunci ea este unică.*

Să presupunem că $g' \in O(V')$ ar fi o altă prelungire analitică a lui f la V' . Atunci $f' \circ \Psi = g' \circ \Psi$ pe V . De aci rezultă $f' = g'$ după următorul raționament, pe care îl vom aplica repetat și de aceea îl formulăm ca o leamnă:

Lema 1. *Dacă Ψ este o etalare: $V \rightarrow V'$ și funcțiile f' și g' din $O(V')$ satisfac relația $f' \circ \Psi = g' \circ \Psi$ pe un deschis $\Delta \subset V$, atunci $f' = g'$ pe V' . Analog, dacă F' și G' sînt două aplicații olomorfe: $V' \rightarrow \mathbb{C}^m$ și $F' \circ \Psi = G' \circ \Psi$ pe un deschis $\Delta \subset V$.*

Conform definiției etalării analitice (§ 2, nr. 1) există un deschis $U \subset V$, astfel încît $\Psi|_U$ este un izomorfism analitic al lui U pe deschisul $\Psi(U)$ din V' . Aplicînd relația $f' \circ \Psi = g' \circ \Psi$ lui $(\Psi|_U)^{-1}$ obținem $f' = g'$ pe $\Psi(U)$ și cum V' este conex, principiul prelungerii analitice implică $f' = g'$ pe V' .

Exemple: 1) Fie V un deschis din varietatea analitică complexă V' și Ψ aplicația de incluziune. Prelungirea analitică a unei funcții

$f \in O(V)$ la V' se reduce la definiția clasică. Funcțiile din $O(V)$, care se prelungesc analitic la V' sînt restricțiile la V ale funcțiilor din $O(V')$.

2) Fie Ψ o etalare surjectivă $V \rightarrow V'$ (prin urmare acoperirea (V, Ψ, V') formează un fascicol). Funcțiile olomorfe pe V , care se prelungesc la V' , sînt cele care au aceeași valoare în toate punctele fiecărei fibre, i. e. sînt funcțiile $f' \circ \Psi$ cu $f' \in O(V')$.

2. Pentru a dezvolta teoria prelungirii analitice, vom considera în cele ce urmează numai varietăți analitice complexe etalate în $\mathbb{C}^n$.

Definiția 2. *Prelungirea analitică pentru varietăți analitice complexe etalate în $\mathbb{C}^n$:* Fie (V, Φ) și (V', Φ') două varietăți analitice etalate în $\mathbb{C}^n$. Să presupunem că există etalarea $\Psi: V \rightarrow V'$, astfel încît

$$\Phi = \Phi' \circ \Psi. \quad (2)$$

Spunem că funcția $f' \in O(V')$ este o prelungire analitică a funcției $f \in O(V)$, dacă

$$f = f' \circ \Psi. \quad (3)$$

Prin urmare, presupunînd comutativ triunghiul stîng din diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Phi & V & f \\ & \downarrow \Psi & \searrow \\ \mathbb{C}^n & & \mathbb{C} \\ & \swarrow \Phi' & \nearrow f' \\ & V' & \end{array} \quad (4)$$

f' este o prelungire analitică a lui f , dacă este comutativ și triunghiul drept. Definiția 1 se păstrează, dar acum varietățile considerate V și V' sînt etalate în $\mathbb{C}^n$ și etalările respective sînt legate de Ψ prin relația (2).

Vom nota prescurtat (V', Φ', Ψ, f') o prelungire analitică a lui (V, Φ, f) .

Propoziția 2. Date (V, Φ) , (V', Φ') , Ψ și f , prelungirea analitică f' este unică (dacă există).

Această propoziție este un caz particular al propoziției 1.

Observația 1. Date (V, Φ) și (V', Φ') pot exista mai multe etalări $V \rightarrow V'$, care să satisfacă condiția (2). De exemplu, fie $V: r_1 < |z| < r_2$, $V': r_1 < |z'| < r_2$, $\Phi: \zeta = z^2$ și $\Phi': \zeta = z'^2$ (am notat cu ζ un punct arbitrar din $\mathbb{C}$), $\Psi: V \rightarrow V'$, $z' = z$ și $\Psi_1: V \rightarrow V'$, $z' = -z$. Avem $\Phi = \Phi' \circ \Psi = \Phi' \circ \Psi_1$. Să remarcăm că se poate ca același f' să corespundă unui f atît pentru Ψ , cît pentru Ψ_1 , de exemplu, dacă $f = \Phi$ și $f' = \Phi'$; dar dacă $f(z) = z$ atunci $f'(z') = z'$ pentru Ψ și $f'(z') = -z'$ pentru Ψ_1 .

Definiția 3. Fie V o varietate analitică complexă și $\Phi_k: V \rightarrow \mathbb{C}^n$, $k = 1, 2$, două etalări. Dacă $f \in \mathcal{O}(V)$ și $(V_k, \Phi_k, \Psi_k, f'_k)$ este o prelungire analitică a lui (V, Φ_k, f) , $k = 1, 2$, vom spune că aceste prelungiri sînt *izomorfe* atunci cînd există un izomorfism analitic $\chi: V'_1 \rightarrow V'_2$, astfel încît

$$\chi \circ \Psi_1 = \Psi_2. \quad (5)$$

În acest caz (conform lemei 1)

$$f'_1 = f'_2 \circ \chi. \quad (6)$$

Dacă $V'_1 = V'_2$ și $\Psi_1 = \Psi_2$, atunci $f'_1 = f'_2$.

Observația 2. Date (V, Φ_k, f) , $k = 1, 2$, dacă (V', Φ'_1, Ψ, f') este o prelungire a lui (V, Φ_1, f) și (V', Φ'_2) o etalare, astfel încît $\Phi'_2 \circ \Psi = \Phi_2$, atunci (V', Φ'_2, Ψ, f') este o prelungire a lui (V, Φ_2, f) .

3. Definiția 4. Prelungirea analitică maximă: Fie (V, Φ) un cuplu format din varietatea analitică complexă V și etalarea $\Phi: V \rightarrow \mathbb{C}^n$, iar $f \in \mathcal{O}(V)$. Se numește *prelungire analitică maximă* corespunzătoare tripletului (V, Φ, f) un sistem $(\tilde{V}, \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \tilde{f})$ format din o varietate analitică complexă $\tilde{V}$, o etalare $\tilde{\Phi}: \tilde{V} \rightarrow \mathbb{C}^n$, o etalare $\tilde{\Psi}: V \rightarrow \tilde{V}$ și o funcție $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\tilde{V})$ cu următoarele proprietăți:

1) $\tilde{f}$ este o prelungire analitică a lui f la $(\tilde{V}, \tilde{\Phi})$ relativ la $\tilde{\Psi}$, i.e.

$$\Phi = \tilde{\Phi} \circ \tilde{\Psi} \text{ și } f = \tilde{f} \circ \tilde{\Psi}. \quad (7)$$

2) Dacă f' este o prelungire analitică a lui f la (V', Φ') relativ la Ψ , i. e.

$$\Phi = \Phi' \circ \Psi \text{ și } f = f' \circ \Psi, \quad (8)$$

există o etalare $\chi : V' \rightarrow \tilde{V}$ cu proprietatea

$$\tilde{\Psi} = \chi \circ \Psi. \quad (9)$$

Consecința 1. În aceste condiții

$$\Phi' = \tilde{\Phi} \circ \chi \text{ și } f' = \tilde{f} \circ \chi. \quad (10)$$

Într-adevăr din (7)—(9) rezultă

$$\Phi = \Phi' \circ \Psi = \tilde{\Phi} \circ \chi \circ \Psi$$

resp.

$$f = f' \circ \Psi = \tilde{f} \circ \chi \circ \Psi,$$

de unde aplicând lema 1 obținem (9).

Condiția 1) arată că $(\tilde{V}, \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \tilde{f})$ este o prelungire analitică a lui (V, Φ, f) , iar condiția 2) exprimă caracterul maximal al acestei prelungiri: oricare ar fi prelungirea analitică (V', Φ', Ψ, f') a lui (V, Φ, f) , există χ , astfel încât $(\tilde{V}, \tilde{\Phi}, \chi, \tilde{f})$ este o prelungire analitică a lui (V', Φ', f') . Mai mult însă, χ satisface (9).

Definiția 4 corespunde diagramei comutative

$$\begin{array}{ccccc} & & V & & \\ & \searrow \Phi & \downarrow \tilde{\Psi} & \searrow f & \\ C^n & \xleftarrow{\tilde{\Phi}} & \tilde{V} & \xrightarrow{\tilde{f}} & C \\ & \swarrow \Phi' & \uparrow \chi & \swarrow f' & \\ & & V' & & \end{array} \quad (11)$$

Două prelungiri analitice maxime ale unui triplet (V, Φ, f) sînt izomorfe, dacă considerate ca prelungiri analitice sînt izomorfe, în sensul definiției 3. Să remarcăm că în cazul nostru $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$.

Noțiunea de prelungire analitică maximă este invariata de un izomorfism: dacă o prelungire analitică este izomorfă cu una maximă, atunci ea este la rîndul ei maximă.

Teorema 1. *Fie V o varietate analitică, Φ o etalare: $V \rightarrow \mathbb{C}^n$ și $f \in \mathcal{O}(V)$. Atunci există o prelungire maximă $(\tilde{V}, \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \tilde{f})$ a lui (V, Φ, f) , unic determinată pînă la un izomorfism.*

1) *Existența unei prelungiri analitice maxime:* Folosind fascicolul $\mathcal{O}(V)$ al germenilor de funcții olomorfe pe V , etalarea Φ și fascicolul $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ al germenilor de funcții analitice pe $\mathbb{C}^n$, vom construi o prelungire analitică maximă.

1.1) În acest scop vom defini mai întîi $\tilde{V}$, $\tilde{\Phi}$, $\tilde{\Psi}$ și $\tilde{f}$:

Fie $a \in V$. Deoarece Φ este un izomorfism analitic local, există o vecinătate deschisă U a lui a în V , astfel încît $\Phi|_U$ este un izomorfism analitic a lui U pe $\Phi(U)$, iar $\Phi(U)$ un deschis din $\mathbb{C}^n$. Notăm cu ${}_a\Phi^{-1}$ izomorfismul invers lui $\Phi|_U$. Definim aplicația $\tilde{\Psi}: V \rightarrow \mathcal{O}$, luînd

$$\tilde{\Psi}(a) = (f \circ {}_a\Phi^{-1})_{\Phi(a)}. \quad (12)$$

Evident $\tilde{\Psi}(a)$ este bine determinat, independent de U .

Aplicația $\tilde{\Psi}$ este un izomorfism analitic local, deoarece pe U avem $\tilde{\Psi} = s \circ \Phi$, unde s este secțiunea din $\Gamma[\Phi(U), \mathcal{O}]$, care asociază fiecărui punct din $\Phi(U)$ germenele funcției $f \circ {}_a\Phi^{-1}$ în acel punct.

Fiindcă V este conex și $\tilde{\Psi}$ este o aplicație continuă, $\tilde{\Psi}(V)$ este inclusă într-o componentă conexă a lui $\mathcal{O}$, pe care o vom nota $\tilde{V}$. Prin urmare, $\tilde{V}$ este o varietate analitică conexă și $\tilde{\Psi}: V \rightarrow \tilde{V}$ o etalare.

Definim etalarea $\tilde{\Phi}: \tilde{V} \rightarrow \mathbb{C}^n$ ca restricția la $\tilde{V}$ a proiecției fascicolului $\mathcal{O}$ și aplicația analitică $\tilde{f}: \tilde{V} \rightarrow \mathbb{C}$ ca restricția la $\tilde{V}$ a apli-

cației care asociază fiecărui germene din $\mathcal{O}$ valoarea lui:

$$\tilde{\Phi}(h_\alpha) = \alpha \text{ și } \tilde{f}(h_\alpha) = h(\alpha),$$

pentru orice germene $h_\alpha \in \tilde{V}$, reprezentat de funcția h într-o vecinătate a lui α .

1.2) Se verifică imediat relațiile (7), deci $(\tilde{V}, \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \tilde{f})$ constituie o prelungire a lui (V, Φ, f) .

Fie (V', Φ', Ψ, f') o altă prelungire a lui (V, Φ, f) . Să arătăm că există χ . În acest scop vom aplica procedeul dezvoltat la punctul 1.1) tripletului (V', Φ', f') și vom construi prelungirea lui analitică $(\tilde{V}', \tilde{\Phi}', \tilde{\Psi}', \tilde{f}')$. Vom demonstra acum că $\tilde{V}' = \tilde{V}$, deci $\tilde{\Phi}' = \tilde{\Phi}$, $\tilde{f}' = \tilde{f}$ și că putem lua $\chi = \tilde{\Psi}'$.

Să fixăm un punct arbitrar $a \in V$ și să alegem U , astfel încât $\Phi|_U$ și $\Psi|_U$ să fie izomorfisme analitice. Conform (8), $\Phi'|_{\Psi(U)}$ va fi de asemenea un izomorfism analitic. Notăm cu ${}_a\Phi^{-1} = (\Phi|_U)^{-1}$, cu $a' = \Psi(a)$ și cu ${}_a\Phi'^{-1} = (\Phi'|_{\Psi(U)})^{-1}$.

Se verifică imediat că

$$\tilde{\Psi}(a) = (\tilde{\Psi}' \circ \Psi)(a). \quad (13)$$

Într-adevăr conform (8), pe $\Phi(U)$ avem $f \circ {}_a\Phi^{-1} = f' \circ {}_a\Phi'^{-1}$ și $\Phi(a) = \Phi'(a')$, deci $(f \circ {}_a\Phi^{-1})_{\Phi(a)} = (f' \circ {}_a\Phi'^{-1})_{\Phi'(a')}$.

Deoarece $\tilde{V}$ și $\tilde{V}'$ sînt componente conexe ale lui $\mathcal{O}$ și au un punct comun $\tilde{\Psi}(a)$, obținem $\tilde{V} = \tilde{V}'$. Din definiție, rezultă $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}'$ și $\tilde{f} = \tilde{f}'$.

Pe de altă parte, punctul a fiind arbitrar în V , relația (13) arată că $\tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}' \circ \Psi$, deci putem lua $\tilde{\Psi}' = \chi$.

2) *Unicitatea prelungirii maxime pînă la un izomorfism*: Fie $(\tilde{V}_1, \tilde{\Phi}_1, \tilde{\Psi}_1, \tilde{f}_1)$ o altă prelungire analitică maximă a lui (V, Φ, f) . Vom demonstra că există un izomorfism analitic $\tilde{\chi}: \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}_1$, astfel încît

$$\tilde{\Psi}_1 = \tilde{\chi} \circ \tilde{\Psi}, \quad (14)$$

deci $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}_1 \circ \tilde{\chi}$ și $\tilde{f} = \tilde{f}_1 \circ \tilde{\chi}$.

Deoarece $(\tilde{V}_1, \tilde{\Phi}_1, \tilde{\Psi}_1, \tilde{f}_1)$ este o prelungire maximă și $(\tilde{V}, \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \tilde{f})$ este o prelungire a lui (V, Φ, f) , rezultă că există izomorfismul analitic local $\tilde{\chi} : \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}_1$, care satisface (14). În mod analog există $\tilde{\chi}_1 : \tilde{V}_1 \rightarrow \tilde{V}$ pentru care $\tilde{\Psi} = \tilde{\chi}_1 \circ \tilde{\Psi}_1$. Prin urmare, $\tilde{\Psi} = \tilde{\chi}_1 \circ \tilde{\chi} \circ \tilde{\Psi}$ și $\tilde{\Psi}_1 = \tilde{\chi} \circ \tilde{\chi}_1 \circ \tilde{\Psi}_1$, deci după lema 1, $\tilde{\chi}_1 \circ \tilde{\chi} = 1_{\tilde{V}}$ și $\tilde{\chi} \circ \tilde{\chi}_1 = 1_{\tilde{V}_1}$, sau $\tilde{\chi}$ este izomorfism analitic.

Observația 3. Construcția lui $\tilde{\Psi}$ și unicitatea prelungirii maxime arată că afirmația: $\Phi|_U$ este un izomorfism analitic implică: $\tilde{\Psi}|_U$ este un izomorfism analitic.

4. *Prelungirea analitică simultană.* Fie din nou V o varietate analitică complexă și $\Phi : V \rightarrow \mathbb{C}^n$ o etalare. Vom considera acum o familie $\mathfrak{F} = \{f_i\}_{i \in I}$ de funcții $f_i \in \mathcal{O}(V)$ și vom cerceta problema prelungirii analitice simultane a tuturor funcțiilor din $\mathfrak{F}$.

Definiția 5. Fiind date tripletul $(V, \Phi, \mathfrak{F})$, varietatea analitică complexă V' și etalările $\Phi' : V' \rightarrow \mathbb{C}^n$ și $\Psi : V \rightarrow V'$, care verifică (2) spunem că familia $\mathfrak{F}' = (f'_i)_{i \in I} \subset \mathcal{O}(V')$ constituie o prelungire analitică simultană a familiei $\mathfrak{F} \subset \mathcal{O}(V)$, dacă oricare ar fi $i \in I$, avem

$$f_i = f'_i \circ \Psi. \quad (15)$$

Prescurtat vom spune că $(V', \Phi', \Psi, \mathfrak{F}')$ constituie o *prelungire analitică simultană a tripletului $(V, \Phi, \mathfrak{F})$* .*)

Definiția 6. Dat tripletul $(V, \Phi, \mathfrak{F})$ ca mai sus, spunem că $(\tilde{V}, \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\mathfrak{F}} = (\tilde{f}_i)_{i \in I})$ formează o *prelungire analitică simultană maximă*, dacă 1) $(\tilde{V}, \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\mathfrak{F}})$ este o prelungire simultană a lui $(V, \Phi, \mathfrak{F})$ și 2) oricare ar fi prelungirea simultană $(V', \Phi', \Psi, \mathfrak{F}' = (f'_i)_{i \in I})$ a lui $(V, \Phi, \mathfrak{F})$, există etalarea $\chi : V' \rightarrow \tilde{V}$, astfel încît

*) Se extinde de asemenea definiția 3 a izomorfismului a două prelungiri la prelungiri simultane.

$\tilde{\Psi} = \chi \circ \Psi$, ceea ce implică $\Phi' = \tilde{\Phi} \circ \chi$ și $f'_i = \tilde{f}_i \circ \chi$, oricare ar fi $i \in I$.

Teorema 2. *Oricare ar fi etalarea (V, Φ) și familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(V)$, există o prelungire analitică maximă $(\tilde{V}, \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\mathcal{F}})$, unic determinată pînă la un izomorfism.*

După cum definițiile prelungirii simultane extind direct definiția din cazul prelungirii unei singure funcții și demonstrația teoremei de mai sus este analogă cu aceea a teoremei 1. Fie $Y = \mathbb{C}^I = \prod_{i \in I} \mathbb{C}_i$, unde toți factorii produsului direct $\mathbb{C}_i$ sînt egali cu $\mathbb{C}$. Vom interpreta familia $\mathcal{F} = (f_i)_{i \in I}$ ca o aplicație $V \rightarrow Y$ de componente olomorfe pe V . Aplicînd procedeul dezvoltat în cap. II, § 3, nr. 1, pentru $X = V$ și clasa $\mathcal{U}$ formată de aplicații $\mathcal{G} = (g_i)_{i \in I} : U \rightarrow Y$, unde $U \in \mathcal{U}$ —familia deschiselor din V —și $g_i \in \mathcal{O}(U)$, vom forma fascicolul germenilor acestor aplicații, pe care îl vom nota $\mathcal{O}(V, Y)$ sau $\mathcal{O}(V)_I$. Un germene $\mathcal{G}_a = (g_{ia})_{i \in I}$ din acest fascicol este o familie indexată după I de germeni de funcții olomorfe pe un deschis $U \ni a$. Procedînd ca în demonstrația propoziției 1, § 3, nr. 1 se arată că $\mathcal{O}(V)_I$ este spațiu Hausdorff. Conform propoziției 3, § 3, nr. 1, $\mathcal{O}(V)_I$ se organizează cu ajutorul proiecției sale pe V ca o varietate analitică complexă. În particular, procedeul poate fi aplicat pentru $V = \mathbb{C}^n$ și obținem fascicolul $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n, Y) = \mathcal{O}_I$, care este varietate analitică complexă n -dimensională.

Păstrînd notația din demonstrația teoremei 1 pentru U și ${}_a\Phi^{-1}$ definim aplicația $\tilde{\Psi} : V \rightarrow \mathcal{O}_I$, care asociază fiecărui punct $a \in V$, germenele $(\mathcal{F} \circ {}_a\Phi^{-1})_{\Phi(a)} = \{(f_i \circ {}_a\Phi^{-1})_{\Phi(a)}\}_{i \in I} \in \mathcal{O}_I$ și luăm $\tilde{V}$ componenta conexă a lui $\mathcal{O}_I$, care conține $\tilde{\Psi}(V)$. Etalarea $\tilde{\Phi}$ va fi de asemenea restricția la $\tilde{V}$ a proiecției fascicolului $\mathcal{O}_I$, iar familia $\tilde{\mathcal{F}}$ va fi dată de restricția la $\tilde{V}$ a aplicației valoare a lui $\mathcal{O}_I$ în Y . Prin urmare, $\tilde{\mathcal{F}} = (\tilde{f}_i)_{i \in I}$, cu $\tilde{f}_i : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{C}$ aplicație analitică.

Se verifică apoi ca și în cazul teoremei 1, că $(\tilde{V}, \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\mathcal{F}})$ este prelungire simultană maximă pentru $(V, \Phi, \mathcal{F})$ și unică pînă la un izomorfism.

Vom menționa acum câteva proprietăți ale prelungirilor simultane, care vor fi aplicate în cele ce urmează:

Observația 4. Fie (V, Φ) și $\mathcal{F} \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{O}(V)$. Dacă $(V', \Phi', \Psi, \mathcal{Q}')$ este o prelungire a lui $(V, \Phi, \mathcal{Q})$ și $\mathcal{F}' = \{f' \in \mathcal{Q}' \mid f = f' \circ \Psi, f \in \mathcal{F}\}$, atunci $(V', \Phi', \Psi, \mathcal{F}')$ este o prelungire a lui $(V, \Phi, \mathcal{F})$.

Definiția 7. Fie (V, Φ) și $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(V)$. Dacă $(\tilde{V}, \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\mathcal{F}})$ este prelungirea maximă simultană a lui $(V, \Phi, \mathcal{F})$ și dacă $\tilde{\Psi}$ este un izomorfism analitic, vom spune că (V, Φ) este *prelungire maximă pentru $\mathcal{F}$* .

Observația 5. Dacă (V, Φ) este prelungire maximă pentru $\mathcal{F}$ și dacă $\mathcal{F} \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{O}(V)$, atunci (V, Φ) este prelungire maximă și pentru $\mathcal{Q}$, (în particular pentru $\mathcal{O}(V)$).

Într-adevăr fie $(\tilde{V}, \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\mathcal{Q}})$ o prelungire maximă a lui $(V, \Phi, \mathcal{Q})$ și $\tilde{\mathcal{F}}$ subfamilia funcțiilor din $\tilde{\mathcal{Q}}$, care prelungesc funcțiile din $\mathcal{F}$. Atunci $(\tilde{V}, \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\mathcal{F}})$ este o prelungire a lui $(V, \Phi, \mathcal{F})$ și cum (V, Φ) este prelungire maximă, există etalarea $\chi: \tilde{V} \rightarrow V$, astfel încît $\chi \circ \tilde{\Psi} = 1_V$. Totodată $\tilde{\Psi} \circ \chi \circ \tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}$ ne dă, după lema 1, $\tilde{\Psi} \circ \chi = 1_{\tilde{V}}$, deci $\tilde{\Psi}$ este un izomorfism analitic.

Observația 6. Fie V și V' — varietăți analitice complexe, $g: V \rightarrow V'$ și $\Phi': V' \rightarrow \mathbb{C}^n$ — etalări, iar $\mathcal{F}' \subset \mathcal{O}(V')$. Dacă $(\tilde{V}', \tilde{\Phi}', \tilde{\Psi}', \tilde{\mathcal{F}}')$ este prelungire maximă pentru $(V', \Phi', \mathcal{F}')$, atunci $(\tilde{V}', \tilde{\Phi}', \tilde{\Psi}' \circ g, \tilde{\mathcal{F}}')$ este prelungire maximă pentru $(V, \Phi' \circ g, \mathcal{F})$, unde $\mathcal{F} = \{f' \circ g \mid f' \in \mathcal{F}'\}$.

Evident $(\tilde{V}', \tilde{\Phi}', \tilde{\Psi}' \circ g, \tilde{\mathcal{F}}')$ este o prelungire a lui $(V, \Phi' \circ g, \mathcal{F})$. Să arătăm că această prelungire este maximă.

Fie $(\tilde{V}^*, \tilde{\Phi}^*, \tilde{\Psi}^*, \tilde{\mathcal{F}}^*)$ o prelungire maximă a lui $(V, \Phi' \circ g, \mathcal{F})$. Cum $(\tilde{V}', \tilde{\Phi}', \tilde{\Psi}' \circ g, \tilde{\mathcal{F}}')$ este o prelungire a lui $(V, \Phi' \circ g, \mathcal{F})$, rezultă că există etalarea $\chi_1: \tilde{V}' \rightarrow \tilde{V}^*$, astfel încît $\tilde{\Psi}^* = \chi_1 \circ \tilde{\Psi}' \circ g$. Deoarece $(\tilde{V}^*, \tilde{\Phi}^*, \chi_1 \circ \tilde{\Psi}', \tilde{\mathcal{F}}^*)$ este o prelungire a lui $(V', \Phi', \mathcal{F}')$, iar $(\tilde{V}', \tilde{\Phi}', \tilde{\Psi}', \tilde{\mathcal{F}}')$ este prelungire maximă pentru $(V', \Phi', \mathcal{F}')$, există etalarea $\chi: \tilde{V}^* \rightarrow \tilde{V}'$ cu $\tilde{\Psi}' = \chi \circ \chi_1 \circ \tilde{\Psi}'$. Rezultă astfel că χ este un izomorfism analitic (de invers χ_1) și $(\tilde{V}', \tilde{\Phi}', \tilde{\Psi}' \circ g, \tilde{\mathcal{F}}')$ este prelungire maximă pentru $(V, \Phi' \circ g, \mathcal{F})$.

Observația 7. Fie $(\tilde{V}, \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\mathfrak{F}})$ o prelungire maximă a lui $(V, \Phi, \mathfrak{F})$. Dacă $(\tilde{\tilde{V}}, \tilde{\tilde{\Phi}}, \tilde{\tilde{\Psi}}, \tilde{\tilde{\mathfrak{F}}})$ este o prelungire maximă a lui $(\tilde{V}, \tilde{\Phi}, \tilde{\mathfrak{F}})$, atunci $\tilde{\tilde{\Psi}}$ este un izomorfism analitic, i. e. prelungirile $(\tilde{V}, \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\mathfrak{F}})$ și $(\tilde{\tilde{V}}, \tilde{\tilde{\Phi}}, \tilde{\tilde{\Psi}} \circ \tilde{\Psi}, \tilde{\tilde{\mathfrak{F}}})$ ale lui $(V, \Phi, \mathfrak{F})$ sînt izomorfe.

Conform observației 6, $(\tilde{\tilde{V}}, \tilde{\tilde{\Phi}}, \tilde{\tilde{\Psi}} \circ \tilde{\Psi}, \tilde{\tilde{\mathfrak{F}}})$ este prelungire maximă a lui $(V, \Phi, \mathfrak{F})$, de unde rezultă observația 7.

5. Înfășurătoarea de olomorfie. Cazul cel mai important de prelungire simultană este cel în care familia considerată cuprinde toate funcțiile olomorfe pe varietatea analitică V , etalată prin Φ în $\mathbb{C}^n$.

Definiția 8. Prelungirea maximă simultană a tripletului $(V, \Phi, \mathcal{O}(V))$ se numește *înfășurătoarea de olomorfie* a lui (V, Φ) și va fi notată $(\tilde{V}, \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi})$, fără a mai scrie și familia prelungită $\widetilde{\mathcal{O}(V)}$.

Teorema 3. *Înfășurătoarea de olomorfie a unei varietăți analitice complexe V , care se poate etala în $\mathbb{C}^n$, este unic determinată pînă la un izomorfism:*

Fie $\Phi_k: V \rightarrow \mathbb{C}^n$, $k = 1, 2$, două etalări ale lui V în $\mathbb{C}^n$. Atunci înfășurătoarele de olomorfie corespunzătoare $(\tilde{V}_k, \tilde{\Phi}_k, \tilde{\Psi}_k)$ sînt izomorfe, i. e. există un izomorfism analitic $\chi: \tilde{V}_1 \rightarrow \tilde{V}_2$, astfel încît $\tilde{\Psi}_2 = \chi \circ \tilde{\Psi}_1$.

Ideea demonstrației este următoarea: Construim o etalare $\Phi'_2: \tilde{V}_1 \rightarrow \mathbb{C}^n$, astfel încît $(\tilde{V}_1, \Phi'_2, \tilde{\Psi}_1)$ să fie o prelungire pentru $(V, \Phi_2, \mathcal{O}(V))$. Cum $(\tilde{V}_2, \tilde{\Phi}_2, \tilde{\Psi}_2)$ este prelungire analitică maximă a lui $(V, \Phi_2, \mathcal{O}(V))$, va exista o etalare $\chi: \tilde{V}_1 \rightarrow \tilde{V}_2$, astfel încît $\chi \circ \tilde{\Psi}_1 = \tilde{\Psi}_2$. Analog există o etalare $\tilde{\chi}: \tilde{V}_2 \rightarrow \tilde{V}_1$ pentru care $\tilde{\chi} \circ \tilde{\Psi}_2 = \tilde{\Psi}_1$, prin urmare χ este un izomorfism analitic și $\tilde{\chi}$ inversul său.

1) *Definirea aplicației analitice Φ'_2 :*

Aplicația Φ_2 are n componente Φ_{2p} , $p = 1, \dots, n$, funcții olomorfe pe V . Cum $(\tilde{V}_1, \tilde{\Phi}_1, \tilde{\Psi}_1)$ este înfășurătoarea de olomorfie

pentru (V, Φ_1) , fiecare dintre funcțiile Φ_{2p} se prelungește la o funcție $\Phi'_{2p} \in \mathcal{O}(\tilde{V}_1)$, astfel încît $\Phi'_{2p} \circ \tilde{\Psi}_1 = \Phi_{2p}$. Cele n funcții Φ'_{2p} definesc deci o aplicație analitică $\Phi'_2 : \tilde{V}_1 \rightarrow \mathbb{C}^n$ și

$$\Phi'_2 \circ \tilde{\Psi}_1 = \Phi_2. \quad (16)$$

2) Φ'_2 este o etalare:

Pentru a demonstra că Φ'_2 este un izomorfism analitic local, vom arăta că iacobianul $\tilde{\mathcal{J}}$ al aplicației Φ'_2 în coordonatele locale date de $\tilde{\Phi}_1$ pe $\tilde{V}_1$ este diferit de zero (cap. I, § 5, propoziția 3; cap. III, § 1, propoziția 4).

Fie $\mathcal{J}$ iacobianul aplicației analitice Φ_2 în coordonatele locale date de Φ_1 pe V : Dacă $a \in V$ și U este o vecinătate deschisă a lui a în V , astfel încît $\Phi_1|_U$ și $\Phi_2|_U$ să fie izomorfisme analitice, notînd*) cu $\Phi_1^{-1} = (\Phi_1|_U)^{-1}$, $\mathcal{J} \circ \Phi_1^{-1}$ este iacobianul izomorfismului analitic $\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}$. Prin urmare, $\mathcal{J} \in \mathcal{O}(V)$ și $\mathcal{J} \neq 0$ pe V , de unde $\mathcal{J}^{-1} \in \mathcal{O}(V)$. Fiindcă $(\tilde{V}_1, \tilde{\Phi}_1, \tilde{\Psi}_1)$ este înfășurătoare de olomorfie, $\mathcal{J}$ și $\mathcal{J}^{-1}$ se prelungesc analitic la $\tilde{V}_1$ prin funcțiile $\mathcal{J}'$ și $(\mathcal{J}^{-1})' \in \mathcal{O}(\tilde{V}_1)$:

$$\mathcal{J}' \circ \tilde{\Psi}_1 = \mathcal{J}, \quad (\mathcal{J}^{-1})' \circ \tilde{\Psi}_1 = \mathcal{J}^{-1}.$$

Deoarece $\mathcal{J} \cdot \mathcal{J}^{-1} = 1$ pe V , rezultă $\mathcal{J}' \cdot (\mathcal{J}^{-1})' = 1$ pe $\tilde{\Psi}_1(V)$ și cum $\mathcal{J}' \cdot (\mathcal{J}^{-1})' \in \mathcal{O}(\tilde{V}_1)$ și $\tilde{V}_1$ este conex, deducem că $\mathcal{J}' \cdot (\mathcal{J}^{-1})' = 1$ pe $\tilde{V}_1$ sau că $\mathcal{J}' \neq 0$ pe $\tilde{V}_1$.

Vom arăta că $\mathcal{J}' = \tilde{\mathcal{J}}$. Să presupunem a din V și U ales astfel încît nu numai Φ_1 și Φ_2 , dar și $\tilde{\Psi}_1$ restrinse la U să fie izomorfisme analitice și să notăm $\tilde{\Psi}_1^{-1} = (\tilde{\Psi}_1|_U)^{-1}$. Iacobianul aplicației $\Phi'_2 \circ \tilde{\Phi}_1^{-1}$ în $\Phi_1(U)$ este $\tilde{\mathcal{J}} \circ \tilde{\Phi}_1^{-1}$. Dar în $\Phi_1(U)$ avem $\Phi'_2 \circ \tilde{\Phi}_1^{-1} = \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}$, deci $\tilde{\mathcal{J}} \circ \tilde{\Phi}_1^{-1} = \mathcal{J} \circ \Phi_1^{-1} = \mathcal{J}' \circ \tilde{\Phi}_1^{-1}$, sau pe $\tilde{\Psi}_1(U)$ putem scrie $\tilde{\mathcal{J}} = \mathcal{J}'$ și cum $\tilde{\mathcal{J}}, \mathcal{J}' \in \mathcal{O}(\tilde{V}_1)$ și $\tilde{V}_1$ este conex, rezultă $\tilde{\mathcal{J}} = \mathcal{J}'$ pe $\tilde{V}_1$.

*) Pentru simplificarea scrierii, în cuprinsul acestei demonstrații suprimăm indicele a în notațiile Φ_1^{-1} și Ψ_1^{-1} , resp. indicele $\tilde{\Psi}_1(a)$ în notația $\tilde{\Phi}_1^{-1}$.

Conform (16), $(\tilde{V}_1, \Phi'_2, \tilde{\Psi}_1)$ este o prelungire analitică simultană pentru $(V, \Phi_2, O(V))$, ceea ce trebuia demonstrat.

Observația 8. Teorema 3 nu se păstrează, dacă în loc de $O(V)$ prelungim simultan o subfamilie $\mathcal{F} \subset O(V)$.

Fie, de exemplu, $V = \mathbb{C}$, în care notăm cu z un punct arbitrar, $\Phi_1: \zeta = e^z$ și $\Phi_2: \zeta = z$ și să considerăm $\mathcal{F} = \{f\}$, $f: w = e^z$.

Prelungirea maximă a lui (V, Φ_1, f) este $(\tilde{V}_1 = \mathbb{C} - \text{în care vom nota cu } \tilde{z} \text{ un punct arbitrar, } \tilde{\Phi}_1: \zeta = \tilde{z}, \tilde{\Psi}_1: \tilde{z} = e^z, \tilde{f}_1: w = \tilde{z})$.

Prelungirea maximă a lui (V, Φ_2, f) este $(\tilde{V}_2 = \mathbb{C} - \text{planul varia- bilei } \tilde{z}, \tilde{\Phi}_2: \zeta = \tilde{z}, \tilde{\Psi}_2: \tilde{z} = z, \tilde{f}_2: w = e^z)$.

Cele două prelungiri maxime nu sînt izomorfe, deoarece dacă ar exista un izomorfism analitic $\tilde{\chi}: \tilde{V}_2 \rightarrow \tilde{V}_1$, cu $\tilde{\chi} \circ \tilde{\Psi}_2 = \tilde{\Psi}_1$ am avea $\tilde{\chi}(z) = e^z, z \in \mathbb{C}$ și cum $\tilde{\chi}$ este injectiv am ajunge la o contradicție.

Teorema 4. Fie V și V' două varietăți analitice complexe etalate prin Φ resp. Φ' în $\mathbb{C}^n$ și fie $g: V \rightarrow V'$ o etalare*). Dacă $(\tilde{V}, \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi})$ resp. $(\tilde{V}', \tilde{\Phi}', \tilde{\Psi}')$ sînt înfășurători de olomorfie pentru (V, Φ) resp. (V', Φ') , atunci există o etalare $\tilde{g}: \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}'$, astfel încît următoarea diagramă

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{g} & V' \\ \tilde{\Psi} \downarrow & & \downarrow \tilde{\Psi}' \\ \tilde{V} & \xrightarrow{\tilde{g}} & \tilde{V}' \end{array}$$

să fie comutativă.

Prin compunere cu g fiecare funcție $f' \in O(V')$ ne dă o funcție $f = f' \circ g \in O(V)$. Fie $\mathcal{F}$ familia acestor funcții din $O(V)$ și $\mathcal{F}' = O(V')$.

Procedînd ca la demonstrarea teoremei 3, în care în loc de Φ_2 considerăm etalarea $\Phi' \circ g: V \rightarrow \mathbb{C}^n$, deducem că există o etalare $\hat{\Phi}: \tilde{V} \rightarrow \mathbb{C}^n$, astfel încît $\hat{\Phi} \circ \tilde{\Psi} = \Phi' \circ g$.

*) Nu se cere ca $\Phi' \circ g = \Phi$.

Vom arăta că $(V, \Phi' \circ g, \mathfrak{F})$ admite: 1) o prelungire $(\tilde{V}, \hat{\Phi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\mathfrak{F}})$ și 2) o prelungire maximă $(\tilde{V}', \tilde{\Phi}', \tilde{\Psi}' \circ g, \tilde{\mathfrak{F}}')$. De aci vom deduce existența etalării $\tilde{g}: \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}'$, pentru care $\tilde{g} \circ \tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}' \circ g$.

1) Deoarece $(\tilde{V}, \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi})$ este înfășurătoare de olomorfie pentru (V, Φ) și $\mathfrak{F} \subset O(V)$, să notăm cu $\mathfrak{F}$ familia de funcții din $\overline{O(\tilde{V})}$, care prelungesc la $(\tilde{V}, \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi})$ funcțiile din $\mathfrak{F}$. Rezultă că $(\tilde{V}, \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\mathfrak{F}})$ prelungește analitic $(V, \Phi, \mathfrak{F})$ (observația 4) și că $(\tilde{V}, \hat{\Phi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\mathfrak{F}})$ prelungește analitic $(V, \Phi' \circ g, \mathfrak{F})$ (observația 2).

2) Prin ipoteza $(V', \Phi', O(V'))$ admite prelungirea maximă $(\tilde{V}', \tilde{\Phi}', \tilde{\Psi}' \circ \tilde{\mathfrak{F}}')$, unde am notat $\tilde{\mathfrak{F}}' = \overline{O(\tilde{V}')}$ — prelungirea la $(\tilde{V}', \tilde{\Phi}', \tilde{\Psi}')$ a funcțiilor olomorfe pe V' . Atunci $(\tilde{V}', \tilde{\Phi}', \tilde{\Psi}' \circ g, \tilde{\mathfrak{F}}')$ constituie o prelungire maximă pentru $(V, \Phi' \circ g, \mathfrak{F})$, (observația 6).

§ 5. Domeniu de olomorfie

1. Fie V o varietate analitică complexă, Φ o etalare: $V \rightarrow \mathbb{C}^n$ și $(\tilde{V}, \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi})$ înfășurătoarea de olomorfie a lui (V, Φ) .

Definiția 1. (V, Φ) se numește *domeniu de olomorfie*, dacă $\tilde{\Psi}$ este un izomorfism analitic: $V \rightarrow \tilde{V}$.*)

Teorema 3 din §4, nr. 5 arată că oricare ar fi o etalare $\Phi_1: V \rightarrow \mathbb{C}^n$, (V, Φ_1) este domeniu de olomorfie dacă și numai dacă (V, Φ) este domeniu de olomorfie, deci are sens:

Definiția 2. Varietatea analitică complexă V , care se poate etala în $\mathbb{C}^n$, se numește *domeniu de olomorfie*, dacă există o etalare $\Phi: V \rightarrow \mathbb{C}^n$, astfel încât (V, Φ) să fie domeniu de olomorfie.

*) Subliniem că nu este suficient să existe un izomorfism analitic $V \rightarrow \tilde{V}$, ci trebuie ca $\tilde{\Psi}$ să fie izomorfism analitic. În acest caz (V, Φ) este prelungire maximă pentru $O(V)$, deoarece $(V, \Phi, 1_V, O(V))$ este prelungire izomorfă cu $(\tilde{V}, \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \overline{O(\tilde{V})})$.

În acest paragraf vom demonstra o condiție necesară și suficientă pentru ca o varietate analitică ce se poate etala în $\mathbb{C}^n$ să fie domeniu de olomorfie.

2. Introducem mai întâi o noțiune auxiliară pe care o definim pe o varietate analitică complexă V arbitrară:

Definiția 3. Fie K un compact din V și $\mathcal{C} \subset O(V)$. Numim $\mathcal{C}$ -înfășurătoare a lui K , mulțimea $\hat{K}_{\mathcal{C}}$ a punctelor $a \in V$ pentru care există un număr $c_a > 0$ cu proprietatea:

$$|f(a)| \leq c_a \|f\|_K, \quad (1)$$

oricare ar fi $f \in \mathcal{C}$. *)

Propoziția 1. *Înfășurătorea unui compact din V în raport cu o familie de funcții din $O(V)$ are următoarele proprietăți:*

1) $K \subset \hat{K}_{\mathcal{C}}$.

2) $K \subset K_1$ implică $\hat{K}_{\mathcal{C}} \subset \hat{K}_{1\mathcal{C}}$.

3) $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_1$ implică $\hat{K}_{\mathcal{C}_1} \subset \hat{K}_{\mathcal{C}}$.

4) Dacă oricare ar fi numărul natural n , $f \in \mathcal{C}$ implică $f^n \in \mathcal{C}$ atunci

$$\hat{K}_{\mathcal{C}} = \{a \in V \mid |f(a)| \leq \|f\|_K, \text{ oricare ar fi } f \in \mathcal{C}\}. \quad (2)$$

Intr-adevăr, dacă $a \in \hat{K}_{\mathcal{C}}$ există $c_a > 0$, astfel încît pentru orice $f \in \mathcal{C}$, $|f^n(a)| \leq c_a \|f^n\|_K$ sau $|f(a)| \leq c_a^{1/n} \|f\|_K$. Lăsînd pe n să tindă la ∞ , deducem că $|f(a)| \leq \|f\|_K$. Incluziunea cealaltă este evidentă.

5) În ipoteza 4, $\hat{\hat{K}}_{\mathcal{C}} = \hat{K}_{\mathcal{C}}$.

Exemple 1) Fie $V = \mathbb{C}$, $\mathcal{C}$ familia polinoamelor, K un compact din $\mathbb{C}$ și L reuniunea componentelor conexe relativ compacte ale lui $\mathbb{C} - K$. Atunci $\hat{K}_{\mathcal{C}} = K \cup L$.

*) În cazul $\mathcal{C} = O(V)$ vom nota uneori prescurtat $\hat{K}_{O(V)}$ cu $\hat{K}$.

1.1) Conform principiului maximului modulului, $\|f\|_K = \|f\|_{K \cup L}$, oricare ar fi $f \in \mathcal{O}$. Deci $K \cup L \subset \hat{K}_{\mathcal{O}}$.

1.2) Fie $z_0 \notin K \cup L$ și D un domeniu jordanian limitat de o curbă jordaniană Γ , astfel încît $K \cup L \subset D$ și $z_0 \in \Gamma$. Dacă $\omega = F(z)$ reprezintă conform D pe $|\omega| < 1$ și reprezintă omeomorf $\bar{D}$ pe $|\omega| \leq 1$, atunci există un număr $\rho \in (0, 1)$, astfel încît $F(K \cup L) \subset \{|\omega| \leq \rho\}$, în timp ce $|F(z_0)| = 1$. După o teoremă a lui Weierstrass ([67], vol. II, cap. XIII, § 7) F se aproximează uniform pe $\bar{D}$ cu polinoame, i. e. oricare ar fi numărul $\varepsilon > 0$, există un polinom P_ε pentru care $|F(z) - P_\varepsilon(z)| < \varepsilon$, z fiind un punct arbitrar din $\bar{D}$. Atunci $\|P_\varepsilon\|_{K \cup L} \leq \rho + \varepsilon$, în timp ce $|P_\varepsilon(z_0)| > 1 - \varepsilon$. Luînd $\varepsilon < (1 - \rho)/2$, $|P_\varepsilon(z_0)| > \|P_\varepsilon\|_{K \cup L} = \|P_\varepsilon\|_K$, deci după proprietatea 4) de mai sus, $z_0 \notin \hat{K}_{\mathcal{O}}$.

1') Fie din nou $V = \mathbb{C}$, K și L , dar $\mathcal{O} = \mathcal{O}(V)$ — inelul funcțiilor întregi. Atunci $\hat{K}_{\mathcal{O}(V)} = K \cup L$. Într-adevăr raționamentul 1.1) rămîne valabil, deci $K \cup L \subset \hat{K}_{\mathcal{O}(V)}$, iar proprietatea 3) ne dă $\hat{K}_{\mathcal{O}(V)} \subset K \cup L$.

2) Fie $V = \Delta$ un deschis din $\mathbb{C}$, K un compact din Δ și L_Δ reuniunea acelor componente conexe ale lui $\Delta - K$, care sînt relativ compacte în Δ . Atunci $\hat{K}_{\mathcal{O}(\Delta)} = K \cup L_\Delta$.

Notăm din nou cu L reuniunea componentelor conexe relativ compacte ale lui $\mathbb{C} - K$. Evident $L_\Delta \subset L$. Ca și la punctul 1.1), $K \cup L_\Delta \subset \hat{K}_{\mathcal{O}(\Delta)}$. Ca și la punctul 1.2), dacă $z_0 \notin K \cup L$, atunci $z_0 \notin \hat{K}_{\mathcal{O}(\Delta)}$. Fie $z_0 \in L - L_\Delta$. Atunci z_0 aparține unei componente conexe δ a lui $\Delta - K$, care nu este relativ compactă în Δ , prin urmare există $z_1 \in \partial\Delta \cap \delta$. Prin transformarea $T : z^* = \frac{1}{z - z_1}$, punctul $z_0^* = T(z_0)$ aparține componentei conexe nemărginite a lui $\mathbb{C} - T(K \cup L)$, deci aplicînd 1.2) există un polinom $P = P_\varepsilon$, astfel încît $|P(z_0^*)| > \|P\|_{T(K \cup L)}$. Deoarece $G = P \circ T|_\Delta \in \mathcal{O}(\Delta)$ și

$|G(z_0)| > \|G\|_{K \cup L}$, rezultă că $z_0 \notin \hat{K}_{O(\Delta)}$. În concluzie, $K \cup L_\Delta \supset \supset \hat{K}_{O(\Delta)}$.

De exemplu, dacă $\Delta = \mathbb{C} - \{0\}$ și $K = \{z \mid 0 < r_0 \leq |z| \leq r_1 < +\infty\}$, atunci $\hat{K}_{O(\Delta)} = K$.

3) Fie $V = \mathbb{C}^2$, $K = \{z \mid |z_1| \leq 1, |z_2| \leq \varepsilon\} \cup \{z \mid 1 - \varepsilon \leq |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1\}$ (exemplul lui Hartogs, cap. I, § 10, nr. 4), $\mathcal{C}$ familia polinoamelor de variabilele z_1 și z_2 resp. $O(V)$. În ambele cazuri, $\hat{K}_{\mathcal{C}} = \bar{U}_{1,1}(0) = \{z \mid |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1\}$.

3.1) Oricare ar fi $f \in \mathcal{C}$, $\|f\|_K \leq \|f\|_{\bar{U}_{1,1}(0)} \leq \|f\|_{\partial_0 \bar{U}_{1,1}(0)} \leq \|f\|_K$ (conform propoziției 4 din cap. I, § 9, nr. 4 și faptului că $\partial_0 \bar{U}_{1,1}(0) \subset K$). Prin urmare, $\bar{U}_{1,1}(0) \subset \hat{K}_{\mathcal{C}}$.

3.2) Dacă $z^0 \notin \bar{U}_{1,1}(0)$, atunci sau $|z_1^0| > 1$ sau $|z_2^0| > 1$. În primul caz, funcția $f(z) = z_1 \in \mathcal{C}$ ne dă $|f(z^0)| > 1 = \|f\|_K$, în cel de-al doilea $f(z) = z_2 \in \mathcal{C}$ dă același rezultat. Prin urmare $z^0 \notin \hat{K}_{\mathcal{C}}$, după proprietatea 4).

3. Vom stabili unele condiții necesare pentru ca o prelungire analitică să fie maximă.

Definiția 4. Fie (V, Φ) o varietate analitică V și o etalare $\Phi: V \rightarrow \mathbb{C}^n$. O familie de funcții $\mathcal{C} \subset O(V)$ se numește *stabilă la derivare* dacă oricare ar fi $f \in \mathcal{C}$ și $k = 1, \dots, n$, funcția $\frac{\partial f}{\partial z_k}$, definită prin (1), § 2, aparține lui $\mathcal{C}$.

Teorema 1. Fie (V, Φ) o varietate analitică complexă etalată în $\mathbb{C}^n$ și $\mathcal{C}$ o familie din $O(V)$ stabilă la derivare. Dacă (V, Φ) este prelungire maximă pentru $\mathcal{C}$, atunci oricare ar fi compactul $K \subset V$,

$$d(K) = d(\hat{K}_{\mathcal{C}}). \quad *) \quad (3)$$

Deoarece $K \subset \hat{K}_{\mathcal{C}}$, avem întotdeauna $d(\hat{K}_{\mathcal{C}}) \leq d(K)$. Pentru a demonstra egalitatea (3), să arătăm că oricare ar fi numărul $\rho \in (0, d(K))$, avem $\rho \leq d(\hat{K}_{\mathcal{C}})$ sau $\rho \leq d(a)$, unde a este un punct

*) Am notat cu $d(M)$ distanța mulțimii $M \subset V$ la frontiera lui V (§ 2, nr. 2).

arbitrar din $\hat{K}_{\mathcal{C}}$. Ultima afirmație echivalează cu faptul că există $U_{\rho}(a)$ pe V și, deoarece $\tilde{\Psi}$ este izomorfism analitic, cu faptul că există $U_{\rho}[\tilde{\Psi}(a)]$ pe $\tilde{V}$.

După teorema 2, § 4, nr. 4, putem presupune că $\tilde{V}$ este componenta conexă a fascicolului de germeni determinat pe $\mathbb{C}^n$ de $(V, \Phi, \mathcal{C})$. Vom demonstra că dezvoltarea Taylor a unei funcții f din $\mathcal{C}$ în jurul lui a :

$$f(a') = \sum_{j \in \mathbb{N}^n} \frac{D^j f(a)}{j_1! \dots j_n!} (z'_1 - z_1)^{j_1} \dots (z'_n - z_n)^{j_n}, \quad (4)$$

unde $z = \Phi(a)$ și $z' = \Phi(a')$, este convergentă în $U_{\rho}(z) \subset \mathbb{C}^n$. De aici va rezulta că $f \circ_a \Phi^{-1}$ se prelungește analitic (prin suma seriei din membrul drept (4)) la $U_{\rho}(z)$, iar germenii $\{(f \circ_a \Phi^{-1})_{z'}\}_{f \in \mathcal{C}}$ formează polidiscul $U_{\rho}[\tilde{\Psi}(a)]$ pe $\tilde{V}$, când z' descrie $U_{\rho}(z)$.

Să stabilim deci convergența seriei (4) în $U_{\rho}(z)$. Deoarece $a \in \hat{K}_{\mathcal{C}}$ și $f \in \mathcal{C}$ implică $D^j f \in \mathcal{C}$ oricare ar fi $j \in \mathbb{N}^n$, deducem că

$$|D^j f(a)| \leq c_a \|D^j f\|_K,$$

unde c_a este o anumită constantă pozitivă. Pentru a majora $\|D^j f\|_K$, b fiind un punct arbitrar din K , vom aplica inegalitățile Cauchy în $U_{\rho}(b)$:

$$|D^j f(b)| \leq j_1! \dots j_n! \rho^{-|j|} \|f\|_{\bar{U}_{\rho}(b)}.$$

Prin urmare

$$\|D^j f\|_K \leq j_1! \dots j_n! \rho^{-|j|} \|f\|_L,$$

unde $L = \bigcup_{b \in K} \bar{U}_{\rho}(b)$ este un compact, după lema 3, § 2, nr. 2, și

seria (4) este majorată de seria $c_a \|f\|_L \sum_{j \in \mathbb{N}^n} \left(\frac{z'_1 - z_1}{\rho}\right)^{j_1} \dots \left(\frac{z'_n - z_n}{\rho}\right)^{j_n}$ absolut convergentă în $U_{\rho}(z)$.

Teorema 1'. În condițiile teoremei 1, oricare ar fi compactul $K \subset V$ și punctul $q \in \hat{K}_{\mathcal{C}}$,

$$U_{d(q)}(q) \not\subset \hat{K}_{\mathcal{C}}. \quad (5)$$

Teorema 1' rezultă din teorema 1 și din

Propoziția 2. Fie (V, Φ) o varietate analitică etalată în $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}(V)$ și K un compact din V . Dacă $d(K) = d(\hat{K}_{\mathcal{C}})$, atunci pentru orice punct $q \in \hat{K}_{\mathcal{C}}$ avem (5).

Să presupunem că $U_{d(q)}(q) \subset \hat{K}_{\mathcal{C}}$. Atunci oricare ar fi punctul $\tilde{q} \in U_{d(q)}(q)$, $d(\tilde{q}) \geq d(\hat{K}_{\mathcal{C}}) = d(K) > 0$. Prin urmare $d[U_{d(q)}(q)] \geq d(K) > 0$, ceea ce contrazice lema 4 din § 2, nr. 2.

O altă consecință a aceluiași raționament este

Propoziția 2'. Fie (V, Φ) și $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}(V)$. Dacă pentru compactul $K \subset V$, mulțimea $\hat{K}_{\mathcal{C}}$ este un compact, atunci (5) are loc oricare ar fi $q \in \hat{K}_{\mathcal{C}}$.

Într-adevăr incluziunea $U_{d(q)}(q) \subset \hat{K}_{\mathcal{C}}$ implică $d[U_{d(q)}(q)] \geq d(\hat{K}_{\mathcal{C}}) > 0$, ceea ce este absurd.

Teorema 2. Fie (V, Φ) o varietate analitică etalată în $\mathbb{C}^n$. Dacă (V, Φ) este prelungire maximă pentru familia $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}(V)$, atunci oricare ar fi punctele p' și p'' din V , pentru care $\Phi(p') = \Phi(p'')$, există o funcție $f \in \mathcal{C}$ cu proprietatea $f_{p'} \neq f_{p''}$, unde am notat pentru $p \in V$, cu Φ^{-1} inversa locală a lui Φ în vecinătatea lui p și cu $f_p = (f \circ \Phi^{-1})_{\Phi(p)}$.

Luând prelungirea maximă $(\tilde{V}, \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\mathcal{C}})$ construită în demonstrația teoremei 2, § 4, nr. 4, cum $\tilde{\Psi}(p) = \{f_p\}_{f \in \mathcal{C}}$ și $\tilde{\Psi}$ este un izomorfism analitic, deducem că există $f \in \mathcal{C}$, pentru care $f_{p'} \neq f_{p''}$.

4. Iată acum o teoremă care aduce un criteriu suficient pentru ca o prelungire analitică să fie maximă:

Teorema 3. Fie V o varietate analitică complexă, $\Phi : V \rightarrow \mathbb{C}^n$ o etalare și $\mathcal{C}$ o familie de funcții din $\mathcal{O}(V)$, care este o subalgebră cu unitate, închisă în $\mathcal{O}(V)$, (organizat cu topologia convergenței uniforme pe compacte, § 1, nr. 6) și are următoarele proprietăți:

1') Oricare ar fi compactul $K \subset V$ și punctul $p \in \hat{K}_{\mathcal{C}}$, $U_{d(p)}(p) \not\subset \hat{K}_{\mathcal{C}}$

și 2) Dacă p' și p'' sînt două puncte diferite din V și $\Phi(p') = \Phi(p'')$, atunci există o funcție $l \in \mathcal{C}$, pentru care $l_{p'} \neq l_{p''}$.

În aceste condiții există o funcție $g \in \mathcal{C}$ pentru care (V, Φ) este prelungire maximă.*)

Demonstrația reia procedee din teoria funcțiilor de o variabilă complexă, unde existența unei funcții olomorfe într-un domeniu Δ arbitrar din plan, care să nu se prelungească analitic în afara lui Δ se stabilește constructiv, formînd o funcție olomorfă în Δ , cu zerouri care se acumulează în orice punct din $\partial\Delta$ și adaptînd în acest scop produsul weierstrassian ([81], vol. I, cap. IX, IV).

Vom arăta că fiind dată o mulțime $\{p_m\}$ de puncte din V numerabilă și densă peste tot în V , există o funcție $g \in \mathcal{C}$, astfel încît:

a) Oricare ar fi punctele p' și p'' din V diferite între ele, dar cu $\Phi(p') = \Phi(p'')$, avem $g_{p'} \neq g_{p''}$.

b) Funcția g are în fiecare polidisc $U_m = U_{d(p_m)}(p_m)$ zerouri de ordin oricît de mare.**)

Apoi vom proba că (V, Φ) este prelungire maximă pentru g .

1° Existența unei funcții $g \in \mathcal{C}$ cu proprietățile a) și b).

1°. 1. Construcția unei funcții $f \in \mathcal{C}$ cu proprietatea b).

Dată mulțimea $\{p_m\}$, să formăm șirul $U_1, U_2, U_1, U_2, U_3, U_1, \dots$ și să notăm cu $\tilde{U}_v$ polidiscul U_k , care ocupă locul v în acest șir.

Pe V există un șir de compacte K_v , astfel încît

$$K_v \subset \overset{\circ}{K}_{v+1} \text{ și } \bigcup_v K_v = V.$$

Avem $\tilde{U}_v \not\subset (\hat{K}_v)_c$, deoarece dacă $\tilde{U}_v = U_k$, sau $p_k \notin (\hat{K}_v)_c$ sau $p_k \in (\hat{K}_v)_c$ și se aplică 1'). Prin urmare, există un punct $q_v \in \tilde{U}_v - (\hat{K}_v)_c$.

După definiția $\mathcal{C}$ -înfășurătoarei lui K_v , există o funcție $h_v \in \mathcal{C}$, astfel încît

$$|h_v(q_v)| > \|h_v\|_{K_v}.$$

*) Am notat 1') condiția aceasta, deoarece intervine în teorema 1'. Vom folosi notația 1) pentru condiția din teorema 1.

**) Reamintim că varietatea V are bază numerabilă, ceea ce asigură existența unei mulțimi $\{p_m\}$ și a unei exhaustiuni cu compacte $\{K_v\}$ folosite mai jos.

Fie μ_v un număr natural suficient de mare ca notînd

$$f_v = \left(\frac{h_v}{h_v(q_v)} \right)^{\mu_v}$$

să avem $\|f_v\|_{K_v} < 2^{-v}$. Cum $\mathcal{C}$ este o algebră $f_v \in \mathcal{C}$, iar $f_v(q_v) = 1$.

Deoarece oricare ar fi numărul natural m , în K_m seria $\sum_{v=m}^{\infty} v |f_v|$ este majorată de seria convergentă $\sum_{v=m}^{\infty} v 2^{-v}$, produsul infinit

$\prod_{v=1}^{\infty} (1 - f_v)^v$ converge uniform pe K_m (i. e. pe compactele din V)*).

Prin urmare, după teorema lui Weierstrass

$$f = \prod_{v=1}^{\infty} (1 - f_v)^v \in \mathcal{O}(V).$$

Dar $\mathcal{C}$ este o subalgebră închisă a lui $\mathcal{O}(V)$ și $1 \in \mathcal{C}$, deci $\prod_{v=1}^N (1 - f_v)^v \in \mathcal{C}$, de unde rezultă $f \in \mathcal{C}$.

Funcția $f \not\equiv 0$, deoarece în orice K_m avem $\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{v=N}^{\infty} (1 - f_v)^v = 1$, deci se pot anula numai un număr finit de factori. Ea are în $q_v \in \tilde{U}_v$ un zero cu ordin de multiplicitate $\geq v$. Însă fiecare $U_h = \tilde{U}_v$ pentru un șir crescător de numere v , prin urmare, U_h conține zerouri ale lui f cu ordin de multiplicitate oricît de mare.

Observația 1. La construirea funcției f cu proprietatea b) am folosit numai faptul că familia $\mathcal{C}$ formează o subalgebră unitară închisă în $\mathcal{O}(V)$ și ipoteza 1').

*) Se aplică criteriul $\prod_{v=1}^{\infty} (1 - u_v)$ converge uniform și absolut, dacă $\sum_{v=1}^{\infty} u_v$ converge uniform și absolut, [67], vol. I, cap. VIII, § 4, p. 320—321.

1°.2. *Construirea unei funcții $g \in \mathcal{C}$ cu proprietățile a) și b).* Vom stabili mai întâi următoarea formă echivalentă a condiției a):

a') *Există o mulțime numerabilă $\{p_m\}$ densă peste tot în V , astfel încît oricare ar fi m și $q \in \Phi^{-1}[\Phi(p_m)]$, $q \neq p_m$, să avem $g_q \neq g_{p_m}$.*

Evident a) implică a'). Să arătăm că a') implică a): Fie p' și p'' două puncte diferite din V cu $\Phi(p') = \Phi(p'') = z$ și g o funcție olomorfă pe V cu proprietatea a'). Dacă $g_{p'} = g_{p''}$, există vecinătățile $v_{p'}$, $v_{p''}$ și v_z , astfel încît $\Phi|_{v_{p'}}$ și $\Phi|_{v_{p''}}$ să fie bijecții pe v_z de inverse $_{p'}\Phi^{-1}$ resp. $_{p''}\Phi^{-1}$ și $g \circ _{p'}\Phi^{-1} = g \circ _{p''}\Phi^{-1}$ în v_z . Cum în $v_{p'}$ există un punct p_m al mulțimii dense date, în $v_{p''}$ există $q = (_{p''}\Phi^{-1} \circ \Phi)(p_m)$. Din egalitatea $g \circ _{p'}\Phi^{-1} = g \circ _{p''}\Phi^{-1}$, deducem atunci $g_{p_m} = g_q$, ceea ce contrazice a').

Să revenim acum la problema 1°. 2.

Dacă funcția f cu proprietatea b) construită la punctul 1°.1 satisface a') relativ la mulțimea $\{p_m\}$ dată, putem lua $g = f$.

În cazul contrar, vom nota cu $\mathcal{C}_f$ închiderea în $\mathcal{O}(V)$ a mulțimii tuturor funcțiilor de forma hf cu $h \in \mathcal{C}$. Evident $\mathcal{C}_f \subset \mathcal{C}$, deoarece $\mathcal{C}$ este o algebră închisă în $\mathcal{O}(V)$ și orice funcție din $\mathcal{C}_f$ are proprietatea b).

Pentru fiecare m , să considerăm mulțimea Q_m a punctelor $q_m \in V$, $q_m \neq p_m$ cu proprietatea $\Phi(q_m) = \Phi(p_m)$, care este cel mult numerabilă *) și pentru fiecare $q_m \in Q_m$ să definim mulțimea $\mathcal{O}(m, q_m) = \{\varphi \in \mathcal{C}_f \mid \varphi_{p_m} \neq \varphi_{q_m}\}$. Vom arăta că $\mathcal{O}(m, q_m)$ este: i) un deschis în $\mathcal{C}_f$ și ii) dens peste tot în $\mathcal{C}_f$. Ca submulțime închisă a spațiului metric complet $\mathcal{O}(V)$, $\mathcal{C}_f$ este la rîndul său spațiu metric complet. Teorema lui Baire (cap. I, § 3, nr. 4) se aplică în $\mathcal{C}_f$ și rezultă că mulțimea $\mathcal{O} = \bigcap_{m, q_m} \mathcal{O}(m, q_m)$ este densă în $\mathcal{C}_f$. Din această proprietate a lui $\mathcal{O}$ reținem numai faptul că $\mathcal{O} \neq \emptyset$, deci că există o funcție $g \in \mathcal{O}$.

*) Există cel puțin o mulțime $Q_m \neq \emptyset$, deoarece în cazul contrar f ar satisface a').

Deoarece orice funcție din $\mathcal{C}$ are proprietățile a') și b), problema 1°. 2 este rezolvată, rămânând numai să verificăm afirmațiile i) și ii).

i) $\mathcal{O}(m, q_m)$ este un deschis în $\mathcal{C}_f$.

Va fi suficient să demonstrăm că $\mathcal{F}(m, q_m) = \mathcal{C}_f - \mathcal{O}(m, q_m) = \{ \varphi \in \mathcal{C}_f \mid \varphi_{q_m} = \varphi_{p_m} \}$ este un închis în $O(V)$, deci să arătăm că oricare ar fi șirul $\varphi^v \in \mathcal{F}(m, q_m)$ convergent (uniform pe compactele din V) la φ , $\varphi \in \mathcal{F}(m, q_m)$. Să luăm un număr ρ , $0 < \rho < \min(d(p_m), d(q_m))$. Deoarece $(\varphi^v \circ_{p_m} \Phi^{-1})_{z_m} = (\varphi^v \circ_{q_m} \Phi^{-1})_{z_m}$, $z_m = \Phi(p_m) = \Phi(q_m)$, există o vecinătate a lui z_m , în care $\varphi^v \circ_{p_m} \Phi^{-1} = \varphi^v \circ_{q_m} \Phi^{-1}$. În virtutea principiului prelungirii analitice, această egalitate are loc în $\bar{U}_\rho(z_m)$. Atunci la limită, $\varphi \circ_{p_m} \Phi^{-1} = \varphi \circ_{q_m} \Phi^{-1}$ în $\bar{U}_\rho(z_m)$, deci $\varphi_{p_m} = \varphi_{q_m}$ sau $\varphi \in \mathcal{F}(m, q_m)$.

ii) $\mathcal{O}(m, q_m)$ este dens peste tot în $\mathcal{C}_f$.

Fie k o funcție arbitrară din $\mathcal{C}_f$. Sau $k_{p_m} \neq k_{q_m}$ și $k \in \mathcal{O}(m, q_m)$ sau $k_{p_m} = k_{q_m}$. În acest ultim caz vom demonstra că funcția $k \in \overline{\mathcal{O}(m, q_m)}$.

În $\mathcal{C}_f$ există o funcție h cu $h_{p_m} \neq h_{q_m}$. Într-adevăr dacă $f_{p_m} \neq f_{q_m}$, putem lua $h = f$. În cazul contrar, vom alege o funcție $l \in \mathcal{C}$ cu $l_{p_m} \neq l_{q_m}$, care există conform ipotezei 2), deoarece $p_m \neq q_m$ și $\Phi(p_m) = \Phi(q_m)$. Atunci $lf \in \mathcal{C}_f$ și $(lf)_{p_m} \neq (lf)_{q_m}$, deci putem lua $h = lf$. Pentru uniformitatea expunerii vom scrie $h = lf$ în ambele cazuri, notînd $l = 1$ în primul caz.

Oricare ar fi numărul $\lambda > 0$, funcția $k + \lambda h \in \mathcal{C}_f$. Prin construcție, $k + \lambda h \in \mathcal{O}(m, q_m)$ și cum $k = \lim_{\lambda \rightarrow 0} (k + \lambda h)$ (convergența fiind uniformă pe compacte din V), rezultă $k \in \overline{\mathcal{O}(m, q_m)}$.

Observația 1'. Pentru a construi o funcție $g \in \mathcal{C}$ cu proprietatea a) este suficient să presupunem că $\mathcal{C}$ formează o subalgebră unitară închisă în $O(V)$ și satisface ipoteza 2). Repetăm procedeul de la nr. 1°. 2, plecînd cu o funcție f arbitrară din $\mathcal{C}$, de exemplu chiar cu $f = 1$.

2° O funcție g olomorfă pe V cu proprietățile a) și b) nu se poate prelungi în afara lui (V, Φ) .

Fie $(\tilde{V}, \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \tilde{g})$ prelungirea maximă a lui (V, Φ, g) construită după teorema 1, § 4, nr. 3. Să arătăm că etalarea analitică $\tilde{\Psi}$ este un izomorfism analitic:

2°. 1. $\tilde{\Psi}$ este injectiv.

Dacă p' și p'' sînt două puncte diferite din V există două posibilități: sau $\Phi(p') \neq \Phi(p'')$ sau $\Phi(p') = \Phi(p'')$. Cum $\tilde{\Psi}(p') = g_{p'} = (g \circ \Phi^{-1})_{\Phi(p')}$ și $\tilde{\Psi}(p'') = g_{p''} = (g \circ \Phi^{-1})_{\Phi(p'')}$ în ambele cazuri $\tilde{\Psi}(p') \neq \tilde{\Psi}(p'')$.

2°. 2. $\tilde{\Psi}$ este surjectiv.

Să identificăm V cu $\tilde{\Psi}(V) \subset \tilde{V}$. Dacă $V \neq \tilde{V}$, cum $\tilde{V}$ este conex, există un punct $p \in \tilde{V} - V$, unde am notat cu $\tilde{V}$ închiderea lui V în $\tilde{V}$.

Fie $\{p_m\}$ mulțimea din enunțul proprietății b). Conform acestei proprietăți, polidiscul maxim de centru p_m din V : $U_{d(p_m)}(p_m)$ este și polidiscul maxim de centru p_m din $\tilde{V}$. Într-adevăr, în cazul contrar $\bar{U}_{d(p_m)}(p_m)$ ar fi compact în $\tilde{V}$, iar funcția $\tilde{g}$ ar fi olomorfă în $\bar{U}_{d(p_m)}(p_m)$. Însă pe baza identificării făcute, $\tilde{g} = g$ pe V , deci $\tilde{g}$ are în $U_{d(p_m)}(p_m)$ zerouri cu ordinul de multiplicitate oricît de mare, ceea ce conduce la o contradicție. *)

Deoarece $p \in \tilde{V}$, în $U_r(p)$ cu $0 < r \leq \frac{d(p)}{2}$ există puncte din V , și anume chiar puncte p_m . Conform lemei 1 din § 2, nr. 2, există $U_r(p_m)$ în V și $U_r(p_m) \ni p$. Prin urmare $V \ni p$, ceea ce este absurd.

Observația 2. În demonstrația 2°. 1 a intervenit numai proprietatea a), pe cînd în demonstrația 2°. 2 numai proprietatea b).

*) O funcție φ olomorfă pe un compact K (i. e. pe un deschis din V , care include K) nu poate avea pe K zerouri de ordin oricît de mare, fără a fi identic nulă. Să presupunem că φ ar avea în punctele $a^v \in K$ zerouri cu ordine N_v oricît de mari. Am putea extrage din a^v un subșir, pe care-l vom nota tot a^v , convergent la un punct $a^0 \in K$ și astfel încît ordinul zeroului lui φ din a^v să fie $N_v > v$. Fie $j \in \mathbb{N}^n$ arbitrar; $D^j \varphi(a^0) = \lim_{v \rightarrow \infty} D^j \varphi(a^v) = 0$, deci $\varphi \equiv 0$.

Deci putem formula rezultatul: Dacă $(\tilde{V}, \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \tilde{g})$ este prelungirea maximă a lui (V, Φ, g) , $g \in O(V)$ și g are proprietatea a) resp. b) atunci $\tilde{\Psi}$ este injectiv resp. surjectiv.

Raționând ca la punctul 2°. 1 se verifică imediat

Propoziția 3. Dacă $(\tilde{V}, \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\mathcal{C}})$ este prelungirea maximă a lui $(V, \Phi, \mathcal{C})$, unde $\mathcal{C} \subset O(V)$ are proprietatea 2), atunci $\tilde{\Psi}$ este injectiv.

Din teorema 3 de mai sus și observația 5, § 4, nr. 4, rezultă

Propoziția 4. În condițiile teoremei 3, (V, Φ) este prelungire maximă pentru familia $\mathcal{C}$ și pentru $O(V)$ (i.e. (V, Φ) este domeniu de olomorfie).

5. Grupind rezultatele stabilite mai sus, obținem următoarea caracterizare a domeniilor de olomorfie datorită lui H. Cartan și P. Thullen [26].

Teorema 4. Condiția necesară și suficientă pentru ca (V, Φ) să fie un domeniu de olomorfie este ca să fie îndeplinite afirmațiile:

- 1) Oricare ar fi compactul $K \subset V$, $d(K) = d(\hat{K}_{O(V)})$ și
- 2) Oricare ar fi punctele p' și p'' din V , $p' \neq p''$, cu $\Phi(p') = \Phi(p'')$, există o funcție l olomorfă pe V , astfel încât $l_{p'} \neq l_{p''}$.

resp.

- 1') Oricare ar fi compactul $K \subset V$ și $p \in \hat{K}_{O(V)}$, $U_{d(p)}(p) \not\subset \hat{K}_{O(V)}$ și 2).

Într-adevăr, dacă (V, Φ) este domeniu de olomorfie, atunci conform teoremelor 1 și 2 au loc afirmațiile 1) și 2); conform propoziției 2, condițiile 1) și 2) implică 1') și 2), iar conform teoremei 3, din 1') și 2) rezultă faptul că (V, Φ) este domeniu de olomorfie.

Observația 3. Teorema 3 arată că în cazul unui domeniu de olomorfie (V, Φ) există o funcție $g \in O(V)$ cu proprietatea a), pentru care (V, Φ) este prelungire maximă. *)

*) Evident, toate aceste rezultate se păstrează dacă în loc de $O(V)$ vom lua o familie $\mathcal{C} \subset O(V)$ stabilă la derivare, subalgebră cu unitate și închisă în $O(V)$; ele caracterizează prelungirea maximă a unei astfel de familii.

Un caz particular al acestei teorii îl constituie *domeniile de olomorfie din C^n* , pentru care etalarea Φ este incluziunea *).

Atunci condiția 2) nu mai intervine și obținem

Teorema 5. *Domeniul V din C^n este un domeniu de olomorfie, dacă și numai dacă este îndeplinită una din următoarele condiții echivalente:*

1) *Oricare ar fi compactul K , $d(K) = d(\hat{K}_{O(V)})$.*

1') *Oricare ar fi compactul K și $p \in \hat{K}_{O(V)}$, $U_{d(p)}(p) \not\subset \hat{K}_{O(V)}$.*

1'') *Oricare ar fi compactul K , $\hat{K}_{O(V)}$ este compact în V .**)*

După teorema precedentă și propoziția 2, rămâne să demonstrăm numai că 1) implică 1''):

a) Mulțimea $\hat{K}_{O(V)}$ este închisă în C^n . Fie $\{z^k\}$ un șir de puncte din $\hat{K}_{O(V)}$ convergent la un punct $z^0 \in C^n$. Punctul $z^0 \in V$, pentru că notînd cu r un număr $0 < r \leq d(\hat{K}_{O(V)})$, cum în $U_r(z^0)$ există un punct z^k , rezultă că $z^0 \in U_r(z^k) \subset V$. Oricare ar fi funcția $f \in O(V)$ avem $|f(z^0)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |f(z^k)| \leq \|f\|_K$, deci $z^0 \in \hat{K}_{O(V)}$.

b) Mulțimea $\hat{K}_{O(V)}$ este mărginită în C^n . Fie $M = \max_{j=1, \dots, n} \|z_j\|_K$.

Oricare ar fi $z \in \hat{K}_{O(V)}$, luînd funcția $f(z) = z_j$, avem $|z_j| \leq \|z_j\|_K \leq M$. Prin urmare $\hat{K}_{O(V)} \subset U_M(0)$.

Din rezultatele obținute se deduce ușor teorema relativă la cazul $n = 1$: *Orice domeniu din C este domeniu de olomorfie.*

Fie Δ un domeniu din C . Pentru orice compact $K \subset \Delta$, avem $\hat{K}_{O(\Delta)} = K \cup L_\Delta$, L_Δ fiind reuniunea componentelor conexe ale lui $\Delta - K$, care sînt relativ compacte în Δ (exemplul 2), nr. 2). Fiindcă $K \cup L_\Delta$ este un compact în Δ , după teorema 5 rezultă că Δ este un domeniu de olomorfie.

6. Teoremele de mai sus pun în evidență proprietăți ale domeniilor de olomorfie care au condus la noțiuni deosebit de impor-

*) Definiția 1 din acest paragraf, nr. 1, este echivalentă în acest caz cu definiția 1 din cap. I, § 10, nr. 4.

**) Și pentru teorema 5 este valabilă nota *) de pe pagina precedentă.

tante în dezvoltarea teoriei funcțiilor de mai multe variabile complexe pe varietăți analitice:

Definiția 5. O varietate analitică complexă V se numește *olomorf separată*, dacă oricare ar fi punctele p' și p'' din V , $p' \neq p''$, există o funcție $f \in O(V)$, astfel încât $f(p') \neq f(p'')$.

Propoziția 5. Orice domeniu de olomorfie (V, Φ) este olomorf separat.

Fie (V, Φ) un domeniu de olomorfie și $p', p'' \in V$, $p' \neq p''$. Dacă $\Phi(p') \neq \Phi(p'')$, atunci evident există $f \in O(V)$ cu $f(p') \neq f(p'')$, de exemplu putem lua f — o componentă convenabil aleasă a aplicației Φ . Dacă $\Phi(p') = \Phi(p'') = z$, după teorema 4, condiția 2) există $l \in O(V)$ cu $l_{p'} \neq l_{p''}$ i.e. $(l \circ p' \Phi^{-1})_z \neq (l \circ p'' \Phi^{-1})_z$, deci dezvoltările Taylor în p' resp. p'' ale funcției l sînt diferite și există un operator diferențial D , astfel încît $f = D l \in O(V)$ și $f(p') \neq f(p'')$.

Definiția 6. O varietate analitică complexă V se numește *olomorf convexă*, dacă $O(V)$ -înfășurătoarea oricărui compact din V este un compact.

Folosind rezultate și procedee de demonstrație dezvoltate în acest capitol, dar și o teoremă datorită lui Serre (teorema 6, cap. VI, § 6, nr. 4) se obține

Teorema 6. O varietate analitică complexă V etalată în $\mathbb{C}^n$ și olomorf convexă este un domeniu de olomorfie.

Fie $\Phi: V \rightarrow \mathbb{C}^n$ o etalare și $(\tilde{V}, \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi})$ înfășurătoarea de olomorfie a lui (V, Φ) .

1° $\tilde{\Psi}$ este surjectiv. După propoziția 2' știm că $(V, \Phi, O(V))$ satisface ipoteza 1') din teorema 4, deci conform observației 1 pe V există o funcție olomorfă f cu proprietatea b) și 1° rezultă din observația 2.

2° Preimaginea unui punct $\tilde{p} \in \tilde{V}$ prin $\tilde{\Psi}$ este o mulțime finită.

Conform 1°, $\tilde{p} = \tilde{\Psi}(p)$ cu $p \in V$. Oricare ar fi punctul $q \in \tilde{\Psi}^{-1}(\tilde{p})$ și $f \in O(V)$, dacă notăm $\tilde{f}$ prelungirea lui f la $(\tilde{V}, \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi})$, atunci $f(q) = \tilde{f}(\tilde{p}) = f(p)$. Deci, luînd compactul $K = \{p\}$, rezultă $\tilde{\Psi}^{-1}(\tilde{p}) \subset \hat{K}_{O(V)}$ și cum $\hat{K}_{O(V)}$ este compact, iar $\tilde{\Psi}^{-1}(\tilde{p})$ este o mulțime fără puncte de acumulare în V , $\tilde{\Psi}^{-1}(\tilde{p})$ este finită.

3° $\tilde{V}$ este olomorf convex.

3°.1. $\tilde{V}$ este domeniu de olomorfie. Proprietatea aceasta este general valabilă pentru orice (V, Φ) , independent de olomorf convexitate, după cum rezultă din observația 7, § 4, nr. 4. Prin urmare, $O(\tilde{V}) = \widetilde{O(V)}$ — prelungirea funcțiilor olomorfe pe V la $\tilde{V}$.

3°. 2. Fie $\tilde{K}$ un compact din $\tilde{V}$.

3°. 2.1. Mulțimea $K = \tilde{\Psi}^{-1}(\tilde{K})$ este compactă, (i. e. aplicația $\tilde{\Psi}$ este proprie).

Într-adevăr, pentru fiecare $p \in V$ să notăm cu $\tilde{p} = \tilde{\Psi}(p)$ și cu $r(p) = \min_{q \in \tilde{\Psi}^{-1}(\tilde{p})} d(q)$, care este un număr pozitiv, conform punctului

2°. După observația 3, § 4, nr. 3, oricare ar fi r , $0 < r < r(p)$, aplicația $\tilde{\Psi}|_{U_r(p)}$ este un izomorfism analitic: $U_r(p) \cong U_r(\tilde{p})$.

Fie $\{\Omega_i\}_{i \in I}$ o acoperire deschisă arbitrară a lui K . Fiecărui $p \in K$ i se pot asocia un indice i și un număr r ca mai sus, astfel încît $p \in U_r(p) \subset \Omega_i$ și pentru fiecare $\tilde{p} \in \tilde{K}$ să notăm cu $\rho = \min r$ relativ la punctele $p \in \tilde{\Psi}^{-1}(\tilde{p})$. Familia $\{U_\rho(\tilde{p})\}_{\tilde{p} \in \tilde{K}}$ formează o acoperire a lui $\tilde{K}$, deci putem extrage din ea o acoperire finită $\{U_{\rho_j}(\tilde{p}_j)\}_{j=1, \dots, N}$. Prin urmare, K admite acoperirea finită $\{U_{\rho_j}(p)\}_{p \in \tilde{\Psi}^{-1}(\tilde{p}_j), j=1, \dots, N}$, pe care printr-o renumerotare o putem scrie sub forma $\{U_{\rho_h}(p_h)\}_{h=1, \dots, N_1}$ *) și cum fiecare ρ_h este cel mult egal cu numărul r asociat lui p_h , dacă notăm cu i_h indicele i asociat lui p_h , atunci $U_{\rho_h}(p_h) \subset \Omega_{i_h}$, i. e. $\{\Omega_{i_h}\}_{h=1, \dots, N_1}$ formează o acoperire finită a lui K extrasă din $\{\Omega_i\}_{i \in I}$.

3°.2.2. $\tilde{\Psi}(\widehat{K}_{O(V)}) = (\widehat{K})_{O(\tilde{V})}$.

Relația se obține prin verificarea directă, ținînd seama că $f(p) = \tilde{f}(\tilde{p})$ oricare ar fi $p \in K$ și $f \in O(V)$ resp. oricare ar fi $\tilde{p} \in \tilde{K}$ și $\tilde{f} \in O(\tilde{V})$, dacă $\tilde{p} = \tilde{\Psi}(p)$ și $\tilde{f}$ este prelungirea lui f la $(\tilde{V}, \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi})$.

*) Dacă ar exista $q \in K - \bigcup_h U_{\rho_h}(p_h)$, notînd $\tilde{q} = \tilde{\Psi}(q) \in U_{\rho_j}(\tilde{p}_j)$, $z = \tilde{\Phi}(\tilde{q})$, $z_j = \tilde{\Phi}(\tilde{p}_j)$ și λ drumul obținut ridicînd din q segmentul zz_j relativ la Φ , am avea $d(\lambda, \partial V) = 0$. Dar notînd $x = \tilde{\Psi}^{-1}(\overline{U_{\rho_j}(p_j)})$, $\lambda \subset \hat{x}$ deci $d(\lambda, \partial V) > 0$.

Prin urmare, $(\widehat{K})_{O(\tilde{V})}$ este compact.

4° $\tilde{V}$ este *olomorf separat*, conform 3°. 1 și propoziției 5.

Din rezultatele 1°—4°, vom deduce că $\tilde{V}$ este o varietate Stein (cap. VI, § 1, definiția 1) și că putem aplica teorema lui Serre (cap. VI, § 6, nr. 4, teorema 6), prin urmare că V este de asemenea o varietate Stein. Conform definiției 1, cap. VI, § 1, V este *olomorf separat*, deci după propoziția 2' și teorema 4, V este domeniu de *olomorfie*.

§ 6. Aplicații ale prelungirii analitice

1. Folosind procedee din teoria prelungirii analitice se rezolvă și problema formulată în cap. I, § 8, nr. 3: caracterizarea domeniilor de convergență ale seriilor Taylor. În acest scop, vom considera prelungiri analitice care păstrează anumite proprietăți ale familiei de funcții prelungite.

Fie V o varietate analitică complexă, Φ o etalare: $V \rightarrow \mathbb{C}^n$ și $\mathcal{C}$ o familie din $\mathcal{O}(V)$.

Definiția 1. Se numește *N-prelungire* a lui $(V, \Phi, \mathcal{C})$ o prelungire analitică $(V', \Phi', \Psi, \mathcal{C}')$ a lui $(V, \Phi, \mathcal{C})$ (definiția 2, § 4, nr. 2) cu proprietatea următoare:

(N) Oricare ar fi șirul $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ cu seria $\sum_j f_j$ convergentă *normal* pe compactele din V , seria $\sum_j f'_j$ — unde $f'_j \in \mathcal{C}'$ și $f'_j \circ \Psi = f_j$ — converge *normal* pe compactele din V' .

Vom introduce de asemenea proprietățile (U) și (B):

(U) Oricare ar fi șirul $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ convergent în $\mathcal{O}(V)$ (i. e. convergent *uniform* pe compactele din V) șirul $\{f'_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}'$ converge în $\mathcal{O}(V')$.

(B) Oricare ar fi familia $\{f_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{C}$ mărginită în $\mathcal{O}(V)$ (i. e. mărginită pe compactele din V), familia prelungită $\{f'_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{C}'$ este mărginită în $\mathcal{O}(V')$.

Înlocuind proprietatea (N) cu proprietatea (U) resp. (B) se obține noțiunea de *U-prelungire* resp. *B-prelungire* a lui $(V, \Phi, \mathcal{C})$.

Analog se deduc din noțiunea de prelungire analitică maximă (definiția 4, § 4, nr. 3) noțiunile de N-, U-, resp. B-prelungire maximă și se demonstrează existența și unicitatea pînă la izomorfism a acestor prelungiri.

Fie $(\tilde{V}, \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\mathcal{C}})$ prelungirea maximă a lui $(V, \Phi, \mathcal{C})$. Să arătăm că $(\tilde{\Psi}(V), \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\mathcal{C}})$ — unde cu $\tilde{\Phi}$ și $\tilde{\mathcal{C}}$ notăm acum restricțiile, iar cu $\tilde{\Psi}$ corestricția — este o N-, U- resp. B-prelungire a lui $(V, \Phi, \mathcal{C})$. Conform lemei 1 de mai jos oricare ar fi compactul $\tilde{K} \subset \tilde{\Psi}(V)$, există un compact $K \subset V$, astfel încît $\tilde{\Psi}(K) = \tilde{K}$. Fie $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$, cu $\sum_j f_j$ convergentă normal pe orice compact din V . Cum $\|f_j\|_K = \|\tilde{f}_j\|_{\tilde{K}}$, rezultă că $\sum_j \tilde{f}_j$ converge normal pe $\tilde{K}$.

Analog se verifică proprietățile (U) și (B).

Vom nota cu $\tilde{V}_N$ ($\tilde{V}_U$ resp. $\tilde{V}_B$) reuniunea domeniilor $\tilde{D}$ din $\tilde{V}$ pentru care: $\tilde{D} \supset \tilde{\Psi}(V)$ și $(\tilde{D}, \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\mathcal{C}})$ este o N- (U- resp. B-) prelungire a lui $(V, \Phi, \mathcal{C})$.

Să verificăm că $(\tilde{V}_N, \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\mathcal{C}})$ este o N-prelungire maximă a lui $(V, \Phi, \mathcal{C})$.

1) $(\tilde{V}_N, \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\mathcal{C}})$ este o N-prelungire, deoarece orice compact $\tilde{K} \subset \tilde{V}_N$ este inclus într-o reuniune finită de domenii $\tilde{D}$, fie $\tilde{K} \subset \bigcup_{s=1}^q \tilde{D}_s$, și deci $\tilde{K} = \bigcup_{s=1}^q \tilde{K}_s$, unde $\tilde{K}_s$ este un compact din $\tilde{D}_s$. Deci dacă $\sum_j f_j$ converge normal pe orice compact din V , $\sum_j \tilde{f}_j$ converge normal pe fiecare $\tilde{K}_s$ și prin urmare, pe $\tilde{K}$.

2) Dacă $(V', \Phi', \Psi', \mathcal{C}')$ este o altă N-prelungire a lui $(V, \Phi, \mathcal{C})$, există etalarea $\chi: V' \rightarrow \tilde{V}$ cu $\chi \circ \Psi' = \tilde{\Psi}$. Rămîne să arătăm că $\chi(V') \subset \tilde{V}_N$. Evident, $\chi(V')$ este un domeniu din $\tilde{V}$ și $\chi(V') \supset \tilde{\Psi}(V)$. Să verificăm că $(\chi(V'), \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\mathcal{C}})$ este o N-prelungire a lui $(V, \Phi, \mathcal{C})$. Aplicînd din nou lema 1 deducem că orice compact $\tilde{K} \subset \chi(V')$ este de forma $\tilde{K} = \chi(K')$, cu K' compact din V' . Dacă $\sum_j f_j$ converge normal pe compactele din V , atunci $\sum_j f'_j$ converge normal pe K' , deci $\sum_j \tilde{f}_j$ converge normal pe $\tilde{K}$.

Analog rezultă că $(\tilde{V}_U, \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\mathcal{C}})$ resp. $(\tilde{V}_B, \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\mathcal{C}})$ formează o U-resp. B-prelungire maximă a lui $(V, \Phi, \mathcal{C})$. Unicitatea se demonstrează în toate cazurile repetind raționamentul de la teorema 1, § 4, nr. 3.

L e m a 1. Fie X și $\tilde{X}$ două spații topologice, X separat, $\tilde{X}$ separat și local compact, iar $\Psi: X \rightarrow \tilde{X}$ o etalare. Oricare ar fi compactul $\tilde{K} \subset \Psi(X)$, există un compact $K \subset X$ cu $\Psi(K) = \tilde{K}$.

Intr-adevăr pentru fiecare punct $\tilde{p} \in \tilde{K}$ să alegem un punct $p \in \Psi^{-1}(\tilde{p})$ și o vecinătate U a lui p cu $\bar{U}$ compact și cu $\Psi|_{\bar{U}}$ un omeomorfism pe $\Psi(\bar{U})$. Din acoperirea $\{\Psi(U)\}_{\tilde{p} \in \tilde{K}}$ a lui $\tilde{K}$ extragem o acoperire finită $\{\Psi(U_j)\}_{j=1, \dots, N}$. Mulțimea $K = (\bigcup_{j=1}^N \bar{U}_j) \cap \Psi^{-1}(\tilde{K})$ satisface condițiile din enunț.

Diferite teoreme relative la prelungire demonstrate în §§ 4 și 5 se formulează — cu unele modificări — și în cazul prelungirilor N, U sau B. De exemplu, teoremele 1 și 2 de mai jos corespund teoremelor 1 și 3 din § 5.

T e o r e m a 1. Dacă (V, Φ) este o N-(U- resp. B-) prelungire maximă pentru $(V, \Phi, \mathcal{C})$ și $\mathcal{C}$ este stabilă la derivare, atunci oricare ar fi compactul $K \subset V$, avem $d(K) = d(\hat{K}_{\mathcal{C}})$.

Reluăm demonstrația teoremei 1, § 5, nr. 3: Notăm $(\tilde{V}, \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\mathcal{C}})$ prelungirea maximă construită în teorema 2, § 4, nr. 4, $\rho \in (0, d(K))$ și $a \in \hat{K}_{\mathcal{C}}$. Am văzut că există pe $\tilde{V}$ polidiscul $U_{\rho}(\tilde{a})$, $\tilde{a} = \tilde{\Psi}(a)$, și că orice $f \in \mathcal{C}$ se prelungește printr-o funcție $\tilde{f}$ a cărei dezvoltare Taylor în jurul lui $\tilde{a}$ este majorată în $U_{\rho}(\tilde{a})$ de seria $c_a \|f\|_L \sum_{j \in \mathbb{N}^n} \left(\frac{|z'_1 - z_1|}{\rho} \right)^{j_1} \dots \left(\frac{|z'_n - z_n|}{\rho} \right)^{j_n}$, ($z = \tilde{\Phi}(\tilde{a})$, $z' = \tilde{\Phi}(\tilde{a}')$, $\tilde{a}'$ -punct arbitrar din $U_{\rho}(\tilde{a})$). Fie $S(z')$ suma seriei geometrice de mai sus și $\rho' \in (0, \rho)$. Atunci

$$\|\tilde{f}\|_{\bar{U}_{\rho'}(\tilde{a})} \leq c_a \|S\|_{\bar{U}_{\rho'}(z)} \|f\|_L.$$

De aci rezultă: $U_{\rho}(\tilde{a}) \subset \tilde{V}_N \cap \tilde{V}_U \cap \tilde{V}_B$. Intr-adevăr, dacă

$\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ și $\sum_j f_j$ converge normal pe compactele din V , $\sum_j \tilde{f}_j$ converge normal pe compactele din $U_\rho(\tilde{a})$, deci $U_\rho(\tilde{a}) \cup \tilde{V}_N$ este unul din domeniile $\tilde{D} \subset \tilde{V}_N$ din demonstrația existenței N-prelungirii maxime. Dacă $\{f_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{C}$ este o familie mărginită în $O(V)$, $\{\tilde{f}_j\}_{j \in J}$ este o familie mărginită pe compactele din $U_\rho(\tilde{a})$, deci $U_\rho(\tilde{a}) \cup \tilde{V}_B \subset \tilde{V}_B$. Dacă șirul $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ este uniform convergent pe compactele din V , atunci este și familie mărginită în $O(V)$, prin urmare șirul $\{\tilde{f}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ este uniform convergent pe compactele din $U_\rho(\tilde{a})$ (după extinderea teoremei lui Vitali, § 1, nr. 6) și $U_\rho(\tilde{a}) \cup \tilde{V}_U \subset \tilde{V}_U$. Dar dacă (V, Φ) este N-(U- resp. B-) prelungire maximă pentru $(V, \Phi, \mathcal{C})$, atunci $\tilde{\Psi}$ este un izomorfism analitic: $V \rightarrow \tilde{V}_N(\tilde{V}_U \text{ resp. } \tilde{V}_B)$ și deci $\tilde{\Psi}^{-1}[U_\rho(\tilde{a})] = U_\rho(a)$. Rezultă $\rho \leq d(a)$ și în concluzie, $d(K) = d(\hat{K}_\mathcal{C})$.

Teorema 2. Fie V o varietate analitică complexă, $\Phi: V \rightarrow \mathbb{C}^n$ o etalare și $\mathcal{C}$ o familie de funcții din $O(V)$, astfel încât $f \in \mathcal{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ implică $\lambda f \in \mathcal{C}$ și care satisface următoarele proprietăți:

- 1') Oricare ar fi compactul $K \subset V$ și punctul $p \in \hat{K}_\mathcal{C}$, $U_{d(p)}(p) \not\subset \hat{K}_\mathcal{C}$.
- 2) Dacă p' și p'' sînt două puncte diferite din V , dar $\Phi(p') = \Phi(p'')$ atunci există o funcție $l \in \mathcal{C}$, pentru care $l_{p'} \neq l_{p''}$.

În aceste condiții (V, Φ) este N-, B- și U-prelungire maximă a lui $(V, \Phi, \mathcal{C})$.

Fie $(\tilde{V}, \tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\mathcal{C}})$ prelungirea maximă a lui $(V, \Phi, \mathcal{C})$, iar $\tilde{V}_N$, $\tilde{V}_U$, resp. $\tilde{V}_B$ varietățile corespunzătoare N-, U-, resp. B-prelungirii maxime. Conform propoziției 3, § 5, nr. 4, din condiția 2) rezultă $\tilde{\Psi}$ injectiv.

Reluînd demonstrația de la punctul 1°. 1, teorema 3, § 5, nr. 4 să considerăm o mulțime $\{p_m\}$ numerabilă, densă peste tot în V , să notăm cu $U_m = U_{d(p_m)}(p_m)$, să formăm șirul $U_1, U_2, U_1, U_2, U_3, U_1, \dots$ în care termenul de rang v fie $\tilde{U}_v$ și să luăm o exhaustiune a lui V prin compacte: $K_v \subset \hat{K}_{v+1}$, $V = \bigcup_v K_v$. Condiția 1') implică exis-

tența unui punct $q_v \in \tilde{U}_v - (\hat{K}_v)_c$ și deci a unei funcții $h_v \in \mathcal{C}$, astfel încît

$$|h_v(q_v)| > 2^{2v} \|h_v\|_{K_v}.$$

Prin ipoteză $f_v = \frac{2^v h_v}{h_v(q_v)} \in \mathcal{C}$, $\|f_v\|_{K_v} < 2^{-v}$ și $f_v(q_v) = 2^v$.

Deoarece $\tilde{\Psi}$ este injectiv, vom identifica V cu $\tilde{\Psi}(V)$ din $\tilde{V}$.

Fie $\tilde{W}$ una dintre mulțimile $\tilde{V}_N$, $\tilde{V}_U$, și $\tilde{V}_B$. Pentru a demonstra că $\tilde{W} = V$ vom arăta mai întîi că U_m este și polidiscul maxim al lui p_m din $\tilde{W}$. Într-adevăr, în cazul contrar $\bar{U}_m$ ar fi compact în $\tilde{W}$. Pe orice compact K din V șirul $\{f_v\}$ are proprietatea $\sum_v \|f_v\|_K < +\infty$, deci converge uniform și este familie mărginită. Oricare ar fi cazul considerat N , U sau B , șirul $\{\tilde{f}_v\}$ este familie mărginită pe orice compact din $\tilde{W}$. Prin urmare, $\{\tilde{f}_v\}$ ar fi mărginit în $\bar{U}_m$, ceea ce contrazice faptul că în U_m se găsesc o infinitate de puncte q_v și $f_v(q_v) = 2^v$.

Acum raționamentul folosit la punctul 2°2 în teorema 3, § 5, nr. 4 pentru a stabili că $\tilde{\Psi}$ este surjectiv se aplică direct pentru $\tilde{\Psi} : V \rightarrow \tilde{W}$ și arată că $\tilde{\Psi}(V) = \tilde{W}$.

2. Cu această pregătire putem caracteriza domeniile Reinhardt, care sînt domenii de olomorfie:

Teorema 3. *Fie Δ un domeniu Reinhardt cu centrul 0 din $\mathbb{C}^n$, care conține punctul 0. Condiția necesară și suficientă ca Δ să fie domeniu de olomorfie este ca Δ să fie N -prelungire maximă pentru familia $\mathfrak{M}$ a tuturor monoamelor*

$$\mathfrak{M} = \{f = \lambda z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n} \mid \lambda \in \mathbb{C}, j \in \mathbb{N}^n\}.$$

1) Dacă Δ este domeniu de olomorfie, există o funcție $g \in \mathcal{O}(\Delta)$ care nu se prelungește analitic în afara lui Δ (observația 3, § 5, nr. 5). După teorema 1, cap. I, § 10, nr. 2, g este suma unei serii

Taylor convergentă normal pe compactele din Δ , prin urmare există un șir de monoame $\{f_\nu\}$ corespunzător acestei dezvoltări pentru care $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$ converge normal pe compactele din Δ , dar astfel încît oricare ar fi domeniul Δ^* care include strict pe Δ , există un compact $K^* \subset \Delta^*$, pe care $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$ nu converge normal, i. e. Δ este N-prelungire maximă pentru $\mathfrak{M}$.

2) Reciproc, dacă Δ este N-prelungire maximă pentru $\mathfrak{M}$, cum $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{Q} =$ familia polinoamelor de n variabile, și observația 5, § 4, nr. 4, se păstrează (cu aceeași demonstrație) pentru N-, U- sau B-prelungiri, rezultă că Δ este N-prelungire maximă pentru $\mathfrak{Q}$. Dar familia $\mathfrak{Q}$ este stabilă la derivare, prin urmare după teorema 1, oricare ar fi compactul $K \subset \Delta$, $d(K) = d(\hat{K}_{\mathfrak{Q}})$. Însă $\mathfrak{Q} \subset \mathcal{O}(\Delta)$, deci $K \subset \hat{K}_{\mathcal{O}(\Delta)} \subset \hat{K}_{\mathfrak{Q}}$ și $d(K) = d(\hat{K}_{\mathcal{O}(\Delta)})$. Putem aplica atunci lui Δ teorema 5, din § 5, nr. 5 și deducem că Δ este domeniu de olomorfie.

Pentru a obține din această teoremă o caracterizare geometrică a domeniilor Reinhardt de olomorfie vom demonstra mai întîi:

Propoziția 1. Fie K un compact din $\mathbb{C}^n$ și $\mathfrak{M}$ familia monoamelor $\lambda z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{N}^n$. Atunci

$$\hat{K}_{\mathfrak{M}} = \psi^{-1}(\mathcal{K}^*),$$

unde $\psi: \mathbb{C}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}^n$, $\psi(z) = (\ln |z_1|, \dots, \ln |z_n|)$, (cap. I, § 8, nr. 3), $\mathcal{K} = \{Z = (t_1 z_1, \dots, t_n z_n) \mid z \in K, t \in \bar{U}_{1, \dots, n}(0)\}$, iar $\mathcal{K}^*$ este înfășurătoarea convexă a lui $\mathcal{K} = \psi(\mathcal{K})$.

Se verifică imediat că notînd $\psi(\hat{K}_{\mathfrak{M}}) = \hat{K}_{\mathfrak{M}}^*$ avem

$$\hat{K}_{\mathfrak{M}} = \psi^{-1}(\hat{K}_{\mathfrak{M}}^*) \supset \mathcal{K} = \psi^{-1}(\mathcal{K}^*).$$

Deoarece $\hat{K}_{\mathfrak{M}}^* = \{\rho \in \tilde{\mathbb{R}}^n \mid \sum_{h=1}^n j_h \rho_h \leq \ln \|z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n}\|_K, j \in \mathbb{N}^n\}$,

deci o intersecție de semispații, $\hat{K}_{\mathfrak{M}}^*$ este convex. Prin urmare,

$\widehat{K}_{\mathcal{R}}^* \supset \widehat{\mathcal{X}}^*$ = intersecția semispațiilor S , care conțin pe $\mathcal{X}^*$, [12], cartea V, cap. II, § 3, 2, ed. rusă, p. 96.

Mulțimea $\mathcal{X}^*$ are proprietatea următoare: dacă $\rho \in \mathcal{X}^*$ și $a \in \mathbb{R}_+^n$, atunci $\rho - a \in \mathcal{X}^*$. Rezultă că orice semispațiu S este dat printr-o inegalitate $\sum_{h=1}^n c_h \rho_h \leq \alpha$ cu $c_h \in \mathbb{R}_+$, $h = 1, \dots, n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Cum $S = \bigcap_{v=1}^{\infty} S^v$, $S^v = \{ \rho \in \widetilde{\mathbb{R}}^n \mid \sum_{h=1}^n c_h^v \rho_h \leq \alpha, c_h^v \in \mathbb{Q}_+, h = 1, \dots, n, \alpha \in \mathbb{R} \}$, unde $c_h^v \nearrow c_h$, putem scrie $\widehat{\mathcal{X}}^* = \bigcap S$, intersecția referindu-se la semispațiile $\mathcal{S} = \{ \rho \in \widetilde{\mathbb{R}}^n \mid \sum_{h=1}^n j_h \rho_h \leq \beta, j = (j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^n, \beta \in \mathbb{R} \}$, care includ pe $\mathcal{X}^*$. Fie $\tilde{z} \in K$, astfel încît $|\tilde{z}_1^{j_1} \dots \tilde{z}_n^{j_n}| = \|z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n}\|_K$ și $\tilde{\rho} = \psi(\tilde{z})$. Atunci oricare ar fi punctul $\rho \in \widehat{K}_{\mathcal{R}}^*$, $\sum_{h=1}^n j_h \rho_h \leq \sum_{h=1}^n j_h \tilde{\rho}_h \leq \beta$, prin urmare $\rho \in \mathcal{S}$ sau $\widehat{K}_{\mathcal{R}}^* \subset \bigcap \mathcal{S}$.

Din $\widehat{K}_{\mathcal{R}}^* = \widehat{\mathcal{X}}^*$ și $\widehat{K}_{\mathcal{R}} = \psi^{-1}(\widehat{K}_{\mathcal{R}}^*)$, deducem $\widehat{K}_{\mathcal{R}} = \psi^{-1}(\widehat{\mathcal{X}}^*)$.

Teorema 4. Pentru ca un domeniu Reinhardt Δ cu centrul 0, care conține punctul 0, să fie domeniu de olomorfie este necesar și suficient ca Δ să fie reuniune de polidiscuri și ca Δ^* să fie convex.

1) Dacă Δ este domeniu de olomorfie, după teorema 5, § 5, nr. 5, pentru orice compact $K \subset \Delta$ rezultă $\widehat{K}_{\mathcal{R}} \cap \Delta$ compact, unde $\widehat{K}_{\mathcal{R}}$ are semnificația din propoziția precedentă. Deoarece $\widehat{K}_{\mathcal{R}}$ este conex, rezultă $\widehat{K}_{\mathcal{R}} \cap \Delta = \widehat{K}_{\mathcal{R}}$, deci $\widehat{K}_{\mathcal{R}} \subset \Delta$.

Fie $\rho \in \Delta^*$ și $K = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \psi(z) = \rho\}$. Din propoziția 1 și relația $\rho \in \mathcal{X}^*$, deducem că oricare ar fi $a \in \mathbb{R}_+^n$, $\rho - a \in \mathcal{X}^* \subset \widehat{K}_{\mathcal{R}}^* \subset \Delta^*$ și cum $\Delta = \psi^{-1}(\Delta^*)$, rezultă că Δ este reuniune de polidiscuri.

Fie acum K_m un șir de compacte din Δ , $m = 1, 2, \dots$, cu $K_m \subset K_{m+1}$ și $\bigcup_m K_m = \Delta$. Evident $(\widehat{K}_m)_{\mathcal{R}} \subset (\widehat{K}_{m+1})_{\mathcal{R}}$ și $\bigcup_m (\widehat{K}_m)_{\mathcal{R}} = \Delta$. Prin ur-

mare, folosind din nou propoziția 1, $\widehat{\mathcal{K}}_m^* \subset \widehat{\mathcal{K}}_{m+1}^*$ și $\bigcup_m \widehat{\mathcal{K}}_m^* = \Delta^*$, ceea ce arată că Δ^* este convex.

2) Dacă Δ^* are proprietate: $\rho \in \Delta^*$, $a \in \mathbb{R}_+^n \Rightarrow \rho - a \in \Delta^*$, și este convex, atunci oricare ar fi compactul $K \subset \Delta$, $\Delta^* \supset \widehat{\mathcal{K}}^*$, deci $\Delta \supset \widehat{K}_{\mathcal{M}}$. Cum $\widehat{K}_{\mathcal{M}}$ este compact, $\mathcal{M}$ -înfășurătoarea lui K în Δ , $\widehat{K}_{\mathcal{M}} \cap \Delta = \widehat{K}_{\mathcal{M}}$ este compactă. După teorema 5, § 5, nr. 5, Δ este domeniu de olomorfie.

Din teorema 4 de mai sus și observația 3, § 5, nr. 5, deducem că Δ fiind un domeniu Reinhardt cu centrul 0, care este reuniune de polidiscuri cu centrul 0 și pentru care Δ^* este convex, există o funcție $g \in \mathcal{O}(\Delta)$, care nu se prelungește analitic în afara lui Δ . Deoarece g se dezvoltă în serie Taylor în Δ (teorema 1, cap. I, § 10, nr. 2) rezultă reciproca teoremei 1, cap. I, § 8, nr. 3:

Teorema 5. *Un domeniu Reinhardt cu centrul 0, reuniune de polidiscuri cu centrul 0 și cu imaginea prin aplicația ψ (cap. I, § 8, nr. 3) convexă, este domeniul de convergență al unei serii Taylor.*

§ 7. Fascicule analitice

1. Fie V o varietate analitică complexă, $\mathcal{O} = \mathcal{O}(V)$ inelul funcțiilor olomorfe pe V și $\underline{\mathcal{O}} = \underline{\mathcal{O}}(V)$ fascicolul germenilor de funcții olomorfe pe V .

Definiția 1. Se numește *fascicol analitic* pe V un fascicol de $\mathcal{O}$ -module.

Rezultatele din cap. II, §§ 4 și 5 se aplică pentru $X = V$ și $\mathcal{A} = \mathcal{O}$. Fasciculele analitice pe V formează deci o categorie abeliană $\text{Mod } \mathcal{O}$. Un rol deosebit vor avea fasciculele analitice de tip finit și cele coerente. Teorema fundamentală, pe care o vom demonstra în acest paragraf, datorită lui Oka [69] asigură faptul că fascicolul $\mathcal{O}$ este coerent. Mai înainte de a demonstra această teoremă, în care vom folosi în mod esențial teorema de pregătire a lui Weierstrass, amintim câteva

Exemple de fascicule analitice:

1° $\underline{O}^m$.

2° $\underline{\mathfrak{M}} = \underline{\mathfrak{M}}(f_1, \dots, f_p)$ fascicolul generat de secțiunile $f_1, \dots, f_p \in \Gamma(\underline{V}, \underline{\mathcal{F}})$ ale unui fascicol $\underline{\mathcal{F}}$ analitic pe V . În cazul particular: $\underline{\mathcal{F}} = \underline{O}^m$, $\underline{\mathfrak{M}}$ este subfascicol al lui $\underline{O}^m$.

3° $\underline{\mathfrak{R}} = \underline{\mathfrak{R}}(f_1, \dots, f_p)$ fascicolul relațiilor între secțiunile $f_1, \dots, f_p \in \Gamma(\underline{V}, \underline{\mathcal{F}})$ ale unui fascicol $\underline{\mathcal{F}}$ analitic pe V . $\underline{\mathfrak{R}}$ este subfascicol al lui $\underline{O}^p$.

2. Teorema 1 (Oka). *Fascicolul $\underline{O}(V)$ este coerent.*

Deoarece coerența este o proprietate locală (cap. II, § 5, nr. 4, observația 4) și fiecare punct $a \in V$ are o vecinătate izomorfă analitic cu un deschis din $\mathbb{C}^n$, unde n este dimensiunea lui V în punctul a , este suficient (§ 3, nr. 2, propoziția 5, 2)) să arătăm că fascicolul $\underline{O}(\mathbb{C}^n)$ este coerent. În acest scop vom aplica o inducție după n .

În cazul $n = 0$, $\underline{O}(\mathbb{C}^0)$ se reduce la $\mathbb{C}$, iar $\mathbb{C}^0$ la un punct. Date p secțiuni, i. e. p numere complexe $f_1, \dots, f_p \in \mathbb{C}$, $\underline{\mathfrak{R}}(f_1, \dots, f_p)$ este un submodul al lui $\mathbb{C}^p$, deci conform propoziției 3 (cap. I, § 13, nr. 2) este finit generat.

Vom presupune că $\underline{O}(\mathbb{C}^{n-1})$ este fascicol analitic coerent și vom arăta că $\underline{O}(\mathbb{C}^n)$ are aceeași proprietate.*)

Fie Ω un domeniu din $\mathbb{C}^n$. Identificînd secțiunile în $\underline{O}(\Omega)$ cu funcții olomorfe pe Ω (§ 3, nr. 1, observația 1) vom considera p funcții arbitrare f_j , $j = 1, \dots, p$, din $\underline{O}(\Omega)$ și vom demonstra că $\underline{\mathfrak{R}}(f_1, \dots, f_p)$ este de tip finit.

Cum $\underline{\mathfrak{R}}(f_1, \dots, f_p) \subset \underline{O}(\Omega)^p$, pe baza identificării va fi suficient să arătăm că oricare ar fi punctul $z^0 \in \Omega$, există o vecinătate $\omega \subseteq \Omega$ a lui z^0 și un număr finit $g^1, \dots, g^N$ de elemente din $\underline{O}(\omega)^p$, care generează $\underline{\mathfrak{R}}_\omega(f_1, \dots, f_p)$ (cap. II, § 5, nr. 3, definiția 2).

*) Ca de obicei considerăm $\mathbb{C}^{n-1}$ identificat cu mulțimea punctelor $z = (z', 0)$ din $\mathbb{C}^n$ și fascicolul $\underline{O}(\mathbb{C}^{n-1})$ cu un subfascicol al fascicolului $\underline{O}(\mathbb{C}^n)_{\mathbb{C}^{n-1}}$.

1) Putem presupune $f_j \not\equiv 0$ în Ω . Într-adevăr $\mathfrak{R}(0, \dots, 0, f_{k+1}, \dots, f_p)$ este izomorf cu $O(\Omega)^k \oplus \mathfrak{R}(f_{k+1}, \dots, f_p)$. Dacă secțiunile $\gamma^t = (\gamma_{k+1}^t, \dots, \gamma_p^t)$, $t = 1, \dots, N'$, generează $\mathfrak{R}_\omega(f_{k+1}, \dots, f_p)$, atunci secțiunile $g^t = (0, \dots, 0, \gamma_{k+1}^t, \dots, \gamma_p^t)$ și $g^{N'+l} = (0, \dots, 0, \underset{l}{1}, 0, \dots, 0)$, $l = 1, \dots, k$, generează $\mathfrak{R}_\omega(0, \dots, 0, f_{k+1}, \dots, f_p)$.

Printr-o transformare afină și aplicarea teoremei de pregătire a lui Weierstrass (teorema 2, cap. I, § 12, nr. 3), problema se reduce la cazul $z^0 = 0$ și f_j — pseudopolinoame Weierstrass în z_n cu coeficienți $f_{ji}(z')$ funcții olomorfe de z' într-o vecinătate Ω' a lui $z' = 0'$.

Într-adevăr printr-o transformare afină putem presupune $z^0 = 0$ și $f_j(0', z_n) \not\equiv 0$ în nici o vecinătate a lui $z_n = 0$ (propoziția 2, cap. I, § 12, nr. 1). Conform teoremei de pregătire a lui Weierstrass, $f_j = h_j W_j$ într-o vecinătate U a lui $z = 0$, cu h_j funcții olomorfe, $h_j(0) \neq 0$ și W_j pseudopolinoame Weierstrass în z_n .

Transformarea $O_z^p \rightarrow O_z^p$, care transformă un germene $G_z = (G_{1z}, \dots, G_{pz}) \in O_z^p$ în $H_z = (H_{1z}, \dots, H_{pz}) \in O_z^p$, cu $H_{jz} = G_{jz} h_{jz}$, induce un izomorfism al lui $\mathfrak{R}_z(f_1, \dots, f_p)$ pe $\mathfrak{R}_z(W_1, \dots, W_p)$. Dacă într-o vecinătate $\tilde{U}$ a lui $z=0$, $\tilde{U} \subset U$, aplicațiile $H^s = (H_{1s}, \dots, H_{ps}) \in O(\tilde{U})^p$ generează $\mathfrak{R}_{\tilde{U}}(W_1, \dots, W_p)$, atunci $G^s = (G_1^s = H_1^s h_1^{-1}, \dots, G_p^s = H_p^s h_p^{-1}) \in O(\tilde{U})^p$ generează $\mathfrak{R}_{\tilde{U}}(f_1, \dots, f_p)$.

2) Să notăm cu m cel mai mare dintre gradele pseudopolinoamelor f_j în z_n . Schimbînd eventual numerotarea, vom presupune că gradul lui f_p este m . Vom nota cu ζ un punct fixat arbitrar pentru care $\zeta' \in \Omega'$ și cu z un punct variabil și vom demonstra mai întâi că: $\mathfrak{R}_\zeta(f_1, \dots, f_p)$ este O_ζ -generat de elementele sale $g_\zeta = (g_{1\zeta}, \dots, g_{p\zeta})$ ale căror componente $g_{j\zeta}$ sînt reprezentate de pseudopolinoame în z_n de grad $\leq m$, în vecinătatea lui ζ .

Conform teoremei de pregătire a lui Weierstrass aplicată în punctul ζ cu ajutorul translației $u = z - \zeta$, putem scrie într-o vecinătate a acestui punct:

$$f_p = f'f'', \quad (1)$$

unde f' este un pseudopolinom Weierstrass în $z_n - \zeta_n$ de grad m' și f'' un pseudopolinom în z_n (propoziția 1, cap. I, § 13, nr. 1.1) de grad $m'' = m - m'$.

Fie $g_\zeta \in \mathfrak{R}_\zeta(f_1, \dots, f_p)$, $g_\zeta = (g_{1\zeta}, \dots, g_{p\zeta})$ și g_j un reprezentant al lui $g_{j\zeta}$. Lema de pregătire a lui Weierstrass (teorema 1, cap. I § 12, nr. 2) ne dă atunci într-o vecinătate a lui ζ :

$$g_j = Q_j f_p + R_j, \quad j = 1, \dots, p-1, \quad (2)$$

unde Q_j și R_j sînt olomorfe în vecinătatea lui ζ , iar R_j este un pseudopolinom în z_n de grad $< m'$.

Înlocuind (2) în relația $\sum_{j=1}^p g_{j\zeta} f_{j\zeta} = 0_\zeta$ și notînd

$$R_p = \sum_{j=1}^{p-1} Q_j f_j + g_p, \quad (3)$$

deducem că $(R_{1\zeta}, \dots, R_{p\zeta}) \in \mathfrak{R}_\zeta(f_1, \dots, f_p)$. Însă din (2) și (3) rezultă în vecinătatea lui ζ

$$(g_1, \dots, g_p) = Q_1(f_p, 0, \dots, 0, -f_1) + Q_2(0, f_p, 0, \dots, 0, -f_2) + \dots + \\ + Q_{p-1}(0, \dots, 0, f_p, -f_{p-1}) + (R_1, \dots, R_p). \quad (4)$$

Deoarece f_p, f_j resp. R_j , $j = 1, \dots, p-1$, sînt pseudopolinoame în z_n de grad $\leq m$ resp. $< m'$, rămîne să ne ocupăm de R_p . Într-o vecinătate a lui ζ ,

$$R_p f'' f' = - \sum_{j=1}^{p-1} R_j f_j.$$

Aplicînd propoziția 1 din cap. I, § 13, nr. 1.1, în punctul ζ , deducem că $R_p f''$ este un pseudopolinom în z_n de grad $< m$. Pe de altă parte

$$(R_1, \dots, R_p) = f''^{-1}(R_1 f'', \dots, R_p f'') \quad (5)$$

într-o vecinătate a lui ζ , iar $R_j f''$ este un pseudopolinom în z_n de grad $< m$. Relațiile (4) și (5) arată că g_ζ este o combinație liniară

cu coeficienți din O_ζ , de p elemente din $\mathfrak{R}_\zeta(f_1, \dots, f_p)$ cu componente germeni de pseudopolinoame în z_n de grad $\leq m$.

3) Ne putem limita prin urmare să considerăm elementele $g_\zeta \in \mathfrak{R}_\zeta(f_1, \dots, f_p)$ cu

$$g_j(z) = \sum_{k=0}^m g_{jk}(z') z_n^k, \quad j = 1, \dots, p, \quad (6)$$

și g_{jk} olomorfe într-o vecinătate a lui $\zeta' \in \Omega'$. Fie de asemenea

$$f_j(z) = \sum_{l=0}^m f_{jl}(z') z_n^l, \quad (7)$$

cu f_{jl} olomorfe în Ω' .

Cum $g_\zeta \in \mathfrak{R}_\zeta(f_1, \dots, f_p)$, avem într-o vecinătate a lui ζ

$$\sum_{j=1}^p g_j(z) f_j(z) = 0,$$

ceea ce echivalează cu sistemul de $2m + 1$ relații

$$\sum_{k, l \geq 0, k+l=t} \left(\sum_{j=1}^p g_{jk} f_{jl} \right) = 0, \quad t = 0, 1, \dots, 2m \quad (8)$$

într-o vecinătate a lui ζ' , pe care o vom nota U' , $U' \subset \Omega'$.

Vom interpreta aceste $2m + 1$ relații ca o relație unică dată de

$$\tilde{g} = (g_{10}, \dots, g_{p0}, g_{11}, \dots, g_{p1}, \dots, g_{1m}, \dots, g_{pm}) \quad (9)$$

din $O(U')^{p(m+1)}$ între $p(m+1)$ elemente $\tilde{f}_v \in O(\Omega')^{2m+1}$ reprezentînd coloana v din matricia

$$\begin{pmatrix} f_{10} \dots f_{p0} & 0 \dots 0 & \dots & 0 \dots 0 \\ f_{11} \dots f_{p1} & f_{10} \dots f_{p0} & \dots & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{1m} \dots f_{pm} & f_{1m-1} \dots f_{pm-1} & \dots & f_{10} \dots f_{p0} \\ 0 \dots 0 & f_{1m} \dots f_{pm} & \dots & f_{11} \dots f_{p1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & \dots & f_{1m} \dots f_{pm} \end{pmatrix}$$

Prin urmare, g_ζ determină $\tilde{g}_{\zeta'} \in \mathfrak{R}_{\zeta'}$ ($\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{p(m+1)}$) și reciproc ținând seama de (9) și (6), $\tilde{g}_{\zeta'}$ determină g_ζ .

Conform ipotezei inducției și consecinței 7, cap. II, § 5, nr. 8, fascicolul $\mathcal{O}(\mathbb{C}^{n-1})^{2m+1}$ este analitic coerent. Atunci fascicolul $\mathfrak{R}_\Omega(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{p(m+1)})$ este de tip finit, deci există o vecinătate ω' a lui $0'$, $\omega' \subset \Omega'$, și un număr finit N de secțiuni $\tilde{g}^s \in \mathcal{O}(\omega')^{p(m+1)}$, $s = 1, \dots, N$, $\tilde{g}^s = (g_{10}^s, \dots, g_{pm}^s)$, astfel încât oricare ar fi $\zeta' \in \omega'$ și $\tilde{g}_{\zeta'} \in \mathfrak{R}_{\zeta'}(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{p(m+1)})$, $\tilde{g}_{\zeta'} = \sum_{s=1}^N a_{s\zeta'} \tilde{g}_{\zeta'}^s$ cu $a_{s\zeta'} \in \mathcal{O}_{\zeta'}$.

Aplicând relația (6), fie $g_j^s(z) = \sum_{h=0}^m g_{jh}^s(z') z_n^h$, $j = 1, \dots, p$, și $g^s = (g_1^s, \dots, g_p^s) \in \mathcal{O}(\omega' \times \mathbb{C})^p$, $s = 1, \dots, N$. Prin construcție, $g_{\zeta'}^s \in \mathfrak{R}_{\zeta'}(f_1, \dots, f_p)$, oricare ar fi $\zeta' \in \omega' \times \mathbb{C}$. Să verificăm că g^s generează $\mathfrak{R}_{\omega' \times \mathbb{C}}(f_1, \dots, f_p)$. Într-adevăr, fie ζ' un punct arbitrar din ω' și g_ζ un germene oarecare din $\mathfrak{R}_\zeta(f_1, \dots, f_p)$ de reprezentant g cu componente g_j pseudopolinoame în z_n de grad $\leq m$. Notînd cu $\tilde{g}_{\zeta'}$ germenele din $\mathfrak{R}_{\zeta'}(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{p(m+1)})$ determinat de g_ζ după (6) și (9), avem $\tilde{g}_{\zeta'} = \sum_{s=1}^N a_{s\zeta'} \tilde{g}_{\zeta'}^s$ cu $a_{s\zeta'} \in \mathcal{O}_{\zeta'}$, de unde deducem $g_\zeta = \sum_{s=1}^N a_{s\zeta'} g_{\zeta'}^s$ cu $a_{s\zeta'}$ germenele funcției $a_s(z')$, considerată ca funcție de z , în punctul ζ .

3. Din teorema lui Oka deducem că toate rezultatele stabilite în cap. II, § 5, nr. 8 se aplică fasciculelor analitice coerente pe V . După observațiile 7 și 8 din acel paragraf, putem enunța următoarele definiții, pe care le vom folosi mereu:

Definiția 2. Un fascicol analitic $\mathcal{F}$ pe V este coerent, dacă oricare punct $a \in V$ are o vecinătate U astfel încît

i) să avem un șir exact

$$\underline{\mathcal{O}}_U \rightarrow \underline{\mathcal{O}}_U \rightarrow \mathcal{F}_U \rightarrow 0, \quad (10)$$

p și q — numere întregi ≥ 0 , sau

$$\text{ii)} \quad \underline{\mathcal{F}} \simeq \underline{O}_U^q / \underline{\mathcal{I}}, \quad (11)$$

unde $\underline{\mathcal{I}}$ este un subfascicol analitic de tip finit al lui $\underline{O}_U^q$.

Fasciculele $\underline{O}_U^q$, q — număr întreg ≥ 0 , sînt coerente.

Definiția 3. Un subfascicol analitic $\underline{\mathcal{F}}$ al lui $\underline{O}^m$ este coerent dacă este de tip finit.

Dacă $f_1, \dots, f_p \in \Gamma(V, \underline{O}^m)$, fasciculele $\underline{\mathcal{M}}$ și $\underline{\mathcal{R}}$ din exemplele 2° și 3° de mai sus sînt fascicule analitice coerente.*)

Exemplu de fascicol analitic necoerent. Fie Ω un deschis din V , care nu este închis în V și $\underline{\mathcal{F}}$ subfascicolul de ideale**) din $\underline{O}$, pentru care $\underline{\mathcal{F}}_a = \underline{O}_a$ dacă $a \in \Omega$ și $\underline{\mathcal{F}}_a = 0_a$ dacă $a \notin \Omega$, (prelungea trivială a fascicolului $\underline{O}_\Omega$ la V , cap. II, § 7 nr. 6). Conform consecinței 1, cap. II, § 5, nr. 3, $\underline{\mathcal{F}}$ nu este de tip finit sau coerent.***)

Observația 1. Pe o varietate analitică conexă V orice fascicol analitic coerent $\underline{\mathcal{F}}$ diferit de fascicolul nul care formează spațiu separat, are toate fibrele $\underline{\mathcal{F}}_a \neq 0_a$, $a \in V$.

Observația 2. Propozițiile stabilite în cap. II, § 5, nr. 8 vor fi mereu aplicate în cele ce urmează relativ la fasciculele analitice coerente pe V . În particular, ele arată că aceste fascicule formează o categorie abeliană Coh $\underline{O}$.

§ 8. Submulțimi analitice și subvarietăți analitice

1. Una din problemele importante ale teoriei funcțiilor de mai multe variabile complexe este studiul mulțimii zerourilor unei funcții sau al mulțimii zerourilor comune mai multor funcții.

*) Aceeași proprietate au fasciculele $\underline{\mathcal{M}}$ și $\underline{\mathcal{R}}$, dacă $f_1, \dots, f_p \in \Gamma(V, \underline{\mathcal{F}})$ și $\underline{\mathcal{F}}$ este fascicol analitic coerent.

**) Un subfascicol de module $\underline{\mathcal{F}}$ al fascicolului de inele $\underline{O}$ are evident drept fibre $\underline{\mathcal{F}}_a$ ideale ale inelelor $\underline{O}_a$, $a \in V$ și va fi numit fascicol de ideale ale lui $\underline{O}$.

***) Un alt exemplu se obține din propoziția 3, § 8, nr. 1 de mai jos.

Problema aceasta este mult mai complicată decât în cazul unei singure variabile și vom prezenta aici numai câteva aspecte.

Definiția 1. Se numește *submulțime analitică* *) a unei varietăți analitice complexe V o mulțime $M \subset V$ cu proprietatea că, oricare ar fi $a \in V$, există o vecinătate U a lui a și un număr finit de funcții $f_1, \dots, f_N$ olomorfe pe U , astfel încît $M \cap U = \{b \mid b \in U, f_1(b) = \dots = f_N(b) = 0\}$.

Propoziția 1. Orice submulțime analitică este închisă.

Într-adevăr fie $a \in M'$, U o vecinătate a lui a cu proprietatea din definiție și b_v un șir de puncte din $M \cap U$, care tinde la a . Din continuitatea funcțiilor f_j și din condiția $f_j(b_v) = 0$ rezultă $f_j(a) = 0$ și $a \in M$.

Submulțimile analitice M se definesc uneori cerînd ca proprietatea din definiția 1 să fie verificată numai pentru $a \in M$, dar adăugînd condiția ca să fie submulțimi închise ale lui V .

Se demonstrează că M este o submulțime nicăieri densă în V și că în ipoteza V conex, și mulțimea $V - M$ este conexă. [44], p. 86.

Propoziția 2. Fie $\mathcal{F}$ o familie de funcții olomorfe pe V .

Vom nota cu $\mathcal{O}(\mathcal{F}) = \{a \mid a \in V, f(a) = 0 \text{ pentru orice } f \in \mathcal{F}\}$. Atunci $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ este o submulțime analitică a lui V .

Să notăm cu $\mathcal{I}(\mathcal{F})$ idealul lui $\mathcal{O}(V)$, generat de funcțiile familiei $\mathcal{F}$ și cu $\mathcal{J}(\mathcal{F})$ fascicolul de ideale ale lui $\mathcal{O}(V)$ corespunzător: pentru fiecare $a \in V$, fibra acestui fascicol este idealul $\mathcal{I}(\mathcal{F})_a$ generat de germenii funcțiilor din $\mathcal{F}$ în punctul a .

Conform teoremei 3 din cap. I, § 13, nr. 2, inelul $\mathcal{O}(V)_a$ este noetherian, astfel încît există un număr finit de germeni $g_{ja} \in \mathcal{I}(\mathcal{F})_a$, $j = 1, \dots, N_0$, care generează $\mathcal{I}(\mathcal{F})_a$ ca $\mathcal{O}(V)_a$ -modul și cum fiecare g_{ja} este o combinație liniară finită de germeni de funcții din $\mathcal{F}$ în punctul a cu coeficienți din $\mathcal{O}(V)_a$, rezultă că $\mathcal{I}(\mathcal{F})_a$ este generat de un număr finit de germeni f_{ha} , $h = 1, \dots, N$, cu $f_h \in \mathcal{F}$.

*) Se folosește și denumirea de *subspațiu analitic* al lui V [24]. În definiția spațiilor analitice se ia ca model local submulțimile analitice ale unui deschis oarecare din $\mathbb{C}^n$, organizate ca spațiu inelat [44].

Aplicînd însă teorema 4 din cap. I, § 13, nr. 3, există o vecinătate U a lui a , astfel încît pentru orice $b \in U$, idealul $\mathcal{I}(\mathcal{F})_b$ este generat de $f_{1b}, \dots, f_{Nb}$. Atunci $\mathcal{O}(\mathcal{F}) \cap U = \mathcal{O}(f_1, \dots, f_N) \cap U$, deci $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ este o submulțime analitică. Rezultă totodată că $\mathcal{I}(\mathcal{F})$ este un fascicol analitic coerent de ideale ale lui $\mathcal{O}(V)$.

Propoziția 3. *Dacă $\mathcal{I}$ este un subfascicol analitic coerent de ideale ale lui $\mathcal{O}(V)$, atunci mulțimea punctelor $a \in V$ în care $\mathcal{I}_a \neq \mathcal{O}(V)_a$, i. e. mulțimea punctelor $a \in V$, unde se anulează toate funcțiile ale căror germeni aparțin lui $\mathcal{I}_a$, formează o submulțime analitică a lui V .*

Într-adevăr oricare ar fi $a \in V$, există o vecinătate U a lui a și un număr finit $f_1, \dots, f_N$ de funcții olomorfe pe U , astfel încît pentru orice $b \in U$, germenii $f_{1b}, \dots, f_{Nb}$ generează $\mathcal{I}_b$. Cum $\mathcal{I}_b = \mathcal{O}(V)_b$ implică $f_j(b) \neq 0$ pentru cel puțin un indice j , mulțimea punctelor $b \in U$, în care $\mathcal{I}_b \neq \mathcal{O}(V)_b$, coincide cu submulțimea lui U formată de punctele b , în care $f_1(b) = \dots = f_N(b) = 0$, ceea ce trebuia demonstrat.

Reciproc, fiind dată o submulțime analitică $M \subset V$ i se poate asocia un fascicol de ideale ale lui $\mathcal{O}(V)$ pe V , pe care îl vom nota $\mathcal{I}(M)$, luînd $\mathcal{I}(M)_a = \mathcal{O}_a$ pentru $a \in V - M$ și $\mathcal{I}(M)_a$ — idealul germenilor de funcții olomorfe în vecinătatea lui a , care se anulează identic pe M . Se demonstrează că $\mathcal{I}(M)$ este un fascicol analitic coerent (Cartan [20], [46], cap. IV). Pentru a aprofunda legătura dintre submulțimile analitice și idealele de funcții olomorfe se introduce noțiunea de germene de submulțime analitică și se demonstrează celebra teoremă a zerourilor (Nullstellensatz, [44], p. 90, 97). În cele ce urmează vom studia însă numai un caz particular: submulțimile analitice care sînt subvarietăți analitice. Singurele exemple de subvarietăți pe care le-am considerat pînă aici au fost deschisele varietăți V . Acum dimpotrivă ne vom ocupa de subvarietățile, care au în fiecare punct dimensiunea mai mică decît V și care sînt închise din V . În acest sens vom da o nouă definiție *):

*) În cele ce urmează vom folosi numai această definiție.

2. Definiția 2. Fie V o varietate analitică complexă de dimensiune n . O submulțime închisă W a lui V se numește *subvarietate analitică de dimensiunea m* a lui V , dacă, oricare ar fi punctul $a \in W$, există un sistem de coordonate locale $(z_1, \dots, z_n)$ pe V , definit pe o vecinătate U a lui a (§ 1, nr. 3, definiția 27), astfel încît $W \cap U$ este mulțimea punctelor $b \in U$ de coordonate $z_{m+1} = \dots = z_n = 0$.

Vom presupune $m < n$, întrucît cazul $m = n$ este banal. Atunci W coincide cu o reuniune de componente conexe ale lui V și este totodată subvarietate analitică deschisă.

Observația 1. O subvarietate analitică de dimensiune m este submulțime analitică a lui V .

Definiția 3. Vom numi un sistem de coordonate z definit într-o vecinătate U a unui punct $a \in W$, astfel încît $U \cap W = \{b \mid b \in U, z_{m+1}(b) = \dots = z_n(b) = 0\}$, *sistem de coordonate locale asociat lui W în punctul a* .

Vom nota cu χ izomorfismul analitic corespunzător acestui sistem de coordonate, $\chi: U \rightarrow \chi(U) \subset \mathbb{C}^n$, care aplică $U \cap W$ pe $\chi(U \cap W) = \chi(U) \cap \mathbb{C}_{1, \dots, m}^m$. Fie $\pi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$, proiecția care asociază lui z punctul $(z_1, \dots, z_m)$. Atunci $\Lambda = \pi \circ \chi|_{U \cap W}$ stabilește un omeomorfism al lui $U \cap W$ pe $\Lambda(U \cap W)$, care este un deschis din $\mathbb{C}^m$. Prin urmare, $(U \cap W, \Lambda)$ formează o hartă complexă pe W . Se verifică ușor că familia de hărți $\{(U \cap W, \Lambda)\}_{a \in W}$, unde $(U \cap W, \Lambda)$ corespunde unui sistem de coordonate locale asociat lui W în punctul a , formează un atlas olomorf pe W , astfel încît putem enunța

Propoziția 4. O subvarietate analitică W a lui V formează o varietate analitică complexă, dacă este înzestrată cu structura analitică definită de atlasul $\{(U \cap W, \Lambda)\}_{a \in W}$.

Această structură analitică pe W se numește structura indusă pe W de structura analitică a lui V . În cele ce urmează vom considera W înzestrată cu această structură.

Propoziția 5. Condiția necesară și suficientă pentru ca o submulțime închisă $W \subseteq V$ să constituie o subvarietate analitică de dimensiune m a lui V este ca oricare ar fi punctul $a \in W$ să existe o vecinătate U a lui a și o aplicație $F: U \rightarrow \mathbb{C}^{n-m}$ olomorfă și nesingu-

lară în a (i. e. de rang $n - m$), astfel încît $U \cap W = \{b \mid b \in U, F(b) = F(a)\}$.

1) Dacă W este subvarietate analitică, vom alege U ca în definiția 2 și F aplicația de componente $z_{m+1}, \dots, z_n$.

2) Reciproc, să presupunem $F(a) = 0$, să notăm cu F_j , $j = m + 1, \dots, n$, componentele aplicației F și să restrîngem eventual U astfel încît (U, φ) să formeze o hartă pe V , $\varphi(U)$ să fie un deschis din spațiul $\mathbb{C}^n$ de variabile ζ și $\varphi(a) = 0$. Aplicația olomorfă $\Phi = F \circ \varphi^{-1}$ este de rang $n - m$ în vecinătatea lui $\zeta = 0$. Putem forma o matrice nesară cu linia j dată de $(a_{j1}, \dots, a_{jn})$,

$j = 1, \dots, m$ resp. de $\left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial \zeta_1}, \dots, \frac{\partial \Phi_j}{\partial \zeta_n}\right)$, $\Phi_j = F_j \circ \varphi^{-1}$, $j = m + 1, \dots, n$

și completa Φ pînă la un izomorfism analitic al unei vecinătăți a lui $\zeta = 0$ pe o vecinătate a lui $z = 0$, punînd $z_j = \Phi_j(\zeta) =$

$= \sum_{h=1}^n a_{jh} \zeta_h$, $j = 1, \dots, m$ și $z_j = \Phi_j(\zeta)$, $j = m + 1, \dots, n$. Obținem astfel

în vecinătatea lui a un sistem de coordonate z cu proprietatea cerută în definiția 2.

Propoziția 6. Fie W și V două varietăți analitice complexe de dimensiune m resp. n și $\Phi: W \rightarrow V$ o aplicație analitică injectivă. Dacă

1° Φ este o aplicație proprie și

2° rangul aplicației Φ (§ 1, nr. 5, definiția 29) este m , atunci $\Phi(W)$ este o subvarietate analitică a lui V și Φ este un izomorfism analitic $W \rightarrow \Phi(W)$.

1) Din condiția 1° rezultă că $\Phi(W)$ este o mulțime închisă, fiindcă aplicația Φ este închisă. Într-adevăr, dacă A este un închis din W , $b \in \Phi(A)'$ și $b_n = \Phi(a_n)$, $a_n \in A$, $n = 1, 2, \dots$, este un șir convergent la b , atunci mulțimea $\Phi^{-1}(\{b, b_1, b_2, \dots\})$ este compactă, deci există un subșir din șirul $\{a_n\}$ convergent la un punct $a \in A$. Prin urmare, $b = \Phi(a) \in \Phi(A)$.

2) Fie $a \in W$ și $b = \Phi(a)$, (Δ, ψ) o hartă pe V cu $b \in \Delta$, $\psi(b) = 0$ și $t = (t_1, \dots, t_n)$ un punct variabil în $\psi(\Delta)$, iar (Ω, φ) o hartă pe W cu $a \in \Omega$, $\varphi(a) = 0$, $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_m)$ un punct variabil în $\varphi(\Omega)$ și $\Phi(\Omega) \subset \Delta$. Aplicația olomorfă $f = \psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1}$, definită pe $\varphi(\Omega)$,

se scrie $t_j = f_j(\zeta)$, $j = 1, \dots, n$, și are rangul m . Cu o schimbare eventuală a indicilor variabilelor t_j , aplicînd propoziția 4 din cap. I, § 5 pentru $H(\zeta, t) = f(\zeta) - t$, $H: \varphi(\Omega) \times \psi(\Delta) \rightarrow \mathbb{C}^n$, $\varphi(\Omega) \times \psi(\Delta) \subset \mathbb{C}^{m+n}$, deducem că există polidiscurile $u = \{\zeta \mid |\zeta_j| < R_j, j = 1, \dots, m\} \subset \varphi(\Omega)$, $u^1 = \{t^1 = (t_1, \dots, t_m) \mid |t_j| < \rho_j, j = 1, \dots, m\}$ și $u^2 = \{t^2 = (t_{m+1}, \dots, t_n) \mid |t_j| < \rho_j, j = m+1, \dots, n\}$, cu $u^1 \times u^2 \subset \psi(\Delta)$, și aplicația olomorfa $\zeta = F(t^1)$, ($\zeta_j = F_j(t_1, \dots, t_m)$, $j = 1, \dots, m$) în u^1 , astfel încît

$$\begin{aligned} \{(\zeta, t) \in u \times u^1 \times u^2 \mid t = f(\zeta)\} &= \{(\zeta, t) \mid t^1 \in u^1, \zeta = \\ &= F(t^1), t^2 = \tilde{f}[F(t^1)]\}, \end{aligned}$$

unde ultima aplicație este dată de $t_j = f_j[F(t^1)]$, $j = m+1, \dots, n$. Putem alege o vecinătate U a lui b , astfel încît $U \subset \Delta$, $\psi(U) = U^1 \times U^2$, cu U^1 și U^2 polidiscuri de dimensiune m resp. $n-m$, $U^1 \subset u^1$, $U^2 \subset u^2$, și $U \cap \Phi(W) = U \cap \Phi(\omega)$, unde $\omega = \varphi^{-1}(u)$. (Ultima condiție se realizează observînd că $b \notin \Phi(W) - \Phi(\omega)$, care este o mulțime închisă.) Se verifică imediat că

$$\psi[U \cap \Phi(W)] = \{t \in \psi(U) \mid t^2 = \tilde{f}[F(t^1)]\}.$$

Prin urmare izomorfismul analitic $z_j = t_j$, $j = 1, \dots, m$ și $z_j = t_j - f_j[F(t^1)]$, $j = m+1, \dots, n$, definește pe U un sistem de coordonate locale z , în care $U \cap \Phi(W)$ coincide cu mulțimea punctelor din U de coordonate $z_{m+1} = \dots = z_n = 0$.

În concluzie $\Phi(W)$ este o subvarietate analitică a lui V și Φ este un izomorfism analitic a lui W pe $\Phi(W)$.

Reciproc, dacă W și V sînt varietăți analitice complexe de dimensiune m resp. n și Φ este un izomorfism analitic al lui W pe o subvarietate analitică $\Phi(W)$ a lui V , atunci aplicația, pe care o vom nota tot cu $\Phi: W \rightarrow V$, dedusă compunînd Φ cu aplicația de incluziune $\Phi(W) \rightarrow V$, este proprie și are rangul m .

3. Fascicule analitice coerente pe o subvarietate analitică

Fie W o subvarietate analitică a lui V și $\mathcal{O}(V)$ fascicolul germenilor de funcții olomorfe pe V . Pe W putem defini două fascicule:

$\underline{O}(V)_W$ restricția lui $\underline{O}(V)$ la W și $\underline{O}(W)$ fascicolul de germeni de funcții olomorfe pe W , considerat ca varietate analitică (cu structura analitică indusă de structura lui V). Ne propunem să cercetăm legătura dintre cele două fascicule pe W .

Propoziția 7. Pentru fiecare punct $a \in W$ și sistem de coordonate z asociat lui W în a , avem șirul exact

$$0 \rightarrow \underline{O}(W)_a \xrightarrow{\theta_a} \underline{O}(V)_a, \quad (1)$$

unde θ_a este definit în modul următor: Fie φ_{aW} un germene de funcție olomorfă pe W în punctul a . Un reprezentant al lui φ_{aW} se va scrie pe o vecinătate $U^* \cap W$ a lui a în W , unde U^* este un deschis în V inclus în U , ca o funcție olomorfă $\varphi(z_1, \dots, z_m)$. Vom interpreta $\varphi(z_1, \dots, z_m)$ ca funcție de n variabile $z_1, \dots, z_n$ pe U^* și vom nota cu φ_a germenele acestei funcții pe V în punctul a . Punem: $\theta_a(\varphi_{aW}) = \varphi_a$.

Observația 2. Într-un punct $a \in W$, fibra $\underline{O}(W)_a$ este izomorfă cu $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_m\}$, iar fibra $\underline{O}(V)_a$ este izomorfă cu $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$,

Propoziția 8. Avem șirul exact de fascicule pe W

$$\underline{O}(V)_W \xrightarrow{\tau_W} \underline{O}(W) \rightarrow 0. \quad (2)$$

Fie $a \in W$ și $f_a \in \underline{O}(V)_a$, de reprezentant $(f, \tilde{U})$ unde $\tilde{U}$ este o vecinătate a lui a în V . Vom nota germenele determinat de $(f|_{\tilde{U} \cap W}, \tilde{U} \cap W)$ în a pe W cu f_{aW} și vom defini $\tau_W(f_a) = f_{aW}$. Se verifică imediat că $\tau_{Wa} \circ \theta_a = 1_{\underline{O}(W)_a}$, de unde rezultă că τ_W este surjectiv.

Observația 3. Putem organiza $\underline{O}(W)$ ca fascicol de $\underline{O}(V)$ -module cu ajutorul morfismului τ_W , care devine astfel un morfism de $\underline{O}(V)$ -module pe W . Într-adevăr, pentru orice $a \in W$, $h_{aW} \in \underline{O}(W)_a$ și $f_a \in \underline{O}(V)_a$, vom pune

$$f_a h_{aW} = \tau_W(f_a) h_{aW} = f_{aW} h_{aW}. \quad (3)$$

Propoziția 9. Fie $\tilde{O}(W)$ — prelungirea trivială a fascicolului $O(W)$ la V (cap. II, § 7, nr. 6), care se organizează în mod evident ca fascicol analitic pe V și $\tilde{\tau}_W$ — prelungirea lui τ_W prin morfismul nul. Avem șirul exact de fascicole analitice pe V :

$$0 \rightarrow \underline{\mathcal{I}}(W) \rightarrow \underline{O}(V) \xrightarrow{\tilde{\tau}_W} \tilde{O}(W) \rightarrow 0. \quad (4)$$

Fascicolul $\underline{\mathcal{I}}(W) = \ker \tilde{\tau}_W$ are următoarele fibre:

1) Dacă $a \in W$, atunci $\underline{\mathcal{I}}(W)_a = \ker \tau_{W_a}$ — idealul germenilor din $O(V)_a$ reprezentați de funcții olomorfe în vecinătatea lui a , care restrinse la W se anulează identic.

2) Dacă $a \notin W$, atunci $\underline{\mathcal{I}}(W)_a = O(V)_a$.

$\underline{\mathcal{I}}(W)$ este fascicolul de ideale al subvarietății analitice W , în sensul de la nr. 1.

Evident, $\underline{\mathcal{I}}(W)_W = \ker \tau_W$. Putem scrie izomorfismele

$$\tilde{O}(W) \simeq \underline{O}(V) / \underline{\mathcal{I}}(W) \text{ și } \underline{O}(W) \simeq \underline{O}(V)_W / \underline{\mathcal{I}}(W)_W. \quad (5)$$

Teorema 1. (Cartan [20].) Fascicolul analitic $\underline{\mathcal{I}}(W)$ este coerent.

Cum coerența este o proprietate locală (cap. II, § 5, nr. 4, observația 4), va fi suficient să arătăm că $\underline{\mathcal{I}}(W)$ este coerent în vecinătatea fiecărui punct $a \in V$.

1) Dacă $a \notin W$, există o vecinătate U a lui a , astfel încât $U \cap W = \emptyset$, deci $\underline{\mathcal{I}}(W)_U = O(V)_U$.

2) Dacă $a \in W$, fie z un sistem de coordonate asociat lui W în a pe vecinătatea U a lui a și $F: U \rightarrow F(U) \subset \mathbb{C}^n$ izomorfismul analitic corespunzător.

Vom arăta că funcțiile z_j olomorfe pe U , $j = m+1, \dots, n$, generează $\underline{\mathcal{I}}(W)_U$ ca fascicol de $O(V)$ -module, de unde după definiția 3, § 7, nr. 3, va rezulta coerența lui $\underline{\mathcal{I}}(W)_U$.

Remarcăm că $z_j \in \Gamma[U, O(V)]$, dar cum $\tilde{\tau}_W(z_{jb}) = 0_b$, $b \in U$ putem scrie $z_j \in \Gamma[U, \underline{\mathcal{I}}(W)]$, $j = m+1, \dots, n$. Să verificăm că germeii z_{jb} , $j = m+1, \dots, n$, generează $\underline{\mathcal{I}}(W)_b$, oricare ar fi $b \in U$.

2.1) Dacă $b \in U - W$, atunci există un indice j printre indicii $m + 1, \dots, n$, astfel încît $z_j(b) \neq 0$, deci germenele z_{jb} este o unitate în $O(V)_b$, pe care îl generează.

2.2) Dacă $b \in W$, orice $f_b \in \mathcal{J}(W)_b$ are un reprezentant $(f, \tilde{U})$ cu $b \in \tilde{U} \subset U$, care în coordonatele z se scrie $\tilde{f}(z) = f[F^{-1}(z)]$ și satisface relația $\tilde{f}(z_1, \dots, z_m, 0, \dots, 0) = 0$. Dezvoltînd $\tilde{f}$ în serie Taylor în jurul punctului $F(b)$ și grupînd succesiv termenii care cuprind ca factor pe $z_n, z_{n-1}, \dots, z_{m+1}$, obținem $\tilde{f}(z) = \sum_{j=m+1}^n \tilde{f}_j(z) z_j$ cu $\tilde{f}_j$ funcții olomorfe în vecinătatea lui $F(b)$. Prin urmare, $f_b = \sum_{j=m+1}^n f_{jb} z_{jb}$, unde $f_j = \tilde{f}_j \circ F$ și $f_{jb} \in O(V)_b$.

4. Propoziția 10. *Orice fascicol $\underline{O}(W)$ -analitic pe W este și fascicol $\underline{O}(V)$ -analitic pe W .*

Într-adevăr orice fascicol $\underline{\mathcal{F}}$ de $\underline{O}(W)$ -module pe W se organizează cu ajutorul morfismului τ_W ca fascicol de $\underline{O}(V)$ -module pe W , punînd pentru $a \in W$, $f_a \in \underline{\mathcal{F}}_a$ și $h_a \in O(V)_a$

$$h_a f_a = h_{aW} f_a. \quad (6)$$

Vom arăta că un fascicol $\underline{\mathcal{F}}$ analitic coerent pe W în raport cu $\underline{O}(W)$ are ca prelungire trivială $\tilde{\underline{\mathcal{F}}}$ un fascicol analitic coerent pe V . Vom considera însă un caz mai general, și anume vom presupune că X este o submulțime a lui V , vom nota $Y = W \cap X$ și vom studia fascicule $\underline{\mathcal{F}}$ de $\underline{O}(W)$ -module pe Y și prelungirea lor trivială $\tilde{\underline{\mathcal{F}}}$ la X . Atunci cînd va fi necesar să punem în evidență mulțimea X , vom nota $\tilde{\underline{\mathcal{F}}}$ cu $\tilde{\underline{\mathcal{F}}}^X$.

Propoziția 11. *Dacă $\underline{\mathcal{F}}$ este fascicol $\underline{O}(W)$ -analitic pe Y , atunci $\tilde{\underline{\mathcal{F}}}$ este fascicol $\underline{O}(V)$ -analitic pe X .*

Într-adevăr, dacă $a \in X$, $f_a \in \tilde{\underline{\mathcal{F}}}_a$ și $h_a \in O(V)_a$, vom lua

$$h_a f_a = \begin{cases} h_{aW} f_a & \text{pentru } a \in Y \\ 0_a & \text{pentru } a \in X - Y \end{cases} \quad (7)$$

Propoziția 12. Dacă $\underline{\mathcal{F}}$ este fascicol $\underline{\mathcal{O}}(W)$ -analitic coerent pe Y , atunci $\widetilde{\underline{\mathcal{F}}}$ este fascicol $\underline{\mathcal{O}}(V)$ -analitic coerent pe X .

1) Vom demonstra mai întâi cazul $\underline{\mathcal{F}} = \underline{\mathcal{O}}(W)_Y$. Din șirul exact (4) de fascicole de $\underline{\mathcal{O}}(V)$ -module pe $\overline{V}$ deducem după teorema lui Serre (cap. II, § 5, nr. 8, teorema 3) că $\widetilde{\underline{\mathcal{O}}}(W)$ este un fascicol analitic coerent pe V . Prin restricție la X proprietatea se păstrează, deci $\widetilde{\underline{\mathcal{O}}}(W)_X$ este un fascicol $\underline{\mathcal{O}}(V)$ -analitic coerent. Însă $\widetilde{\underline{\mathcal{O}}}(W)_X = [\widetilde{\underline{\mathcal{O}}(W)_Y}]^X$, prelungirea trivială a lui $\underline{\mathcal{O}}(W)_Y$ la X .

2) Să considerăm acum un fascicol $\underline{\mathcal{F}}$ analitic coerent pe Y în raport cu $\underline{\mathcal{O}}(W)$ oarecare și să demonstrăm că prelungirea sa $\widetilde{\underline{\mathcal{F}}}$ la X este un fascicol $\underline{\mathcal{O}}(V)$ -analitic coerent pe X . În acest scop vom folosi definiția 2 din § 7, nr. 3.

Fie a un punct arbitrar din X . Dacă $a \notin Y$, există o vecinătate Ω' a lui a în V , astfel încît $(\Omega' \cap X) \cap Y = \emptyset$. Deci $\widetilde{\underline{\mathcal{F}}}_{\Omega' \cap X} = 0$. Rămîne să examinăm cazul $a \in Y$.

2.1) Conform ipotezei există o vecinătate Ω' a lui a în V , astfel încît pe $\Omega = \Omega' \cap Y$ să avem un șir exact

$$0 \rightarrow \underline{\mathfrak{R}} \rightarrow \underline{\mathcal{O}}(W)_\Omega^N \xrightarrow{j} \underline{\mathcal{F}}_\Omega \rightarrow 0, \quad (8)$$

unde $\underline{\mathfrak{R}} = \ker j$ este $\underline{\mathcal{O}}(W)$ -analitic coerent pe Ω . Restrîngînd eventual Ω' , avem deci șirul exact

$$\underline{\mathcal{O}}(W)_\Omega^{N_1} \xrightarrow{j_1} \underline{\mathfrak{R}} \rightarrow 0. \quad (9)$$

Pentru considerațiile de mai jos este util să explicităm morfismul j_1 :

Există N_1 secțiuni $F^l = (F^l_1, \dots, F^l_{N_1})$, $F^l \in \Gamma(\Omega, \underline{\mathfrak{R}}) \subset \Gamma(\Omega, \underline{\mathcal{O}}(W)^N)$, $l = 1, \dots, N_1$, astfel încît oricare ar fi $b \in \Omega$ și $F_{bW} \in \underline{\mathfrak{R}}_b$ să avem

$$j_1(\Phi_{bW}) = \sum_{l=1}^{N_1} \Phi_{l,bW} F^l_{bW} = F_{bW}, \quad (10)$$

pentru anume $\Phi_{bW} = (\Phi_{1,bW}, \dots, \Phi_{N_1,bW}) \in \underline{\mathcal{O}}(W)_b^{N_1}$.

2.2) Restrângem eventual din nou Ω' , astfel încît funcțiile F_i^l , $l = 1, \dots, N_1$ și $i = 1, \dots, N$, olomorfe pe Ω , să se prelungească la funcții, pe care le vom nota F_i^l , olomorfe pe Ω' . De exemplu vom lua Ω' , astfel încît pe Ω' să avem un sistem de coordonate z asociat cu W în a și F_i^l să fie olomorfe de $z_1, \dots, z_m$ în $\Omega' \cap W$; atunci F_i^l se obțin considerînd F_i^l ca funcții de $z_1, \dots, z_n$ pe Ω' . Fie $F^l = (F_1^l, \dots, F_N^l) \in \Gamma[\Omega', \underline{O}(V)^N]$ și $\mathfrak{R}'$ subfascicolul lui $\underline{O}(V)_{\Omega'}^N$ generat de F^l , $l = 1, \dots, N_1$ pe Ω' .

2.3) Prelungim trivial șirul (8) la $\Omega' \cap X$ și obținem șirul exact de fascicole de $\underline{O}(V)$ -module:

$$0 \rightarrow \mathfrak{R}_{\Omega' \cap X} \rightarrow \underline{\tilde{O}}(W)_{\Omega' \cap X}^N \xrightarrow{\tilde{j}} \underline{\tilde{F}}_{\Omega' \cap X} \rightarrow 0.$$

De asemenea putem scrie șirul exact de fascicole de $\underline{O}(V)$ -module

$$0 \rightarrow \underline{\mathcal{J}}(W)_{\Omega' \cap X}^N \rightarrow \underline{O}(V)_{\Omega' \cap X}^N \xrightarrow{\gamma} \underline{\tilde{O}}(W)_{\Omega' \cap X}^N \rightarrow 0, \quad \gamma = \tilde{\tau}_W^N|_{\Omega' \cap X},$$

deoarece exactitatea se păstrează prin formarea sumei directe. Rezultă șirul exact

$$\underline{O}(V)_{\Omega' \cap X}^N \xrightarrow{\lambda = \tilde{j} \circ \gamma} \underline{\tilde{F}}_{\Omega' \cap X} \rightarrow 0.$$

2.4) Rămîne numai să demonstrăm că fascicolul $\ker \lambda$ este $\underline{O}(V)$ -analitic coerent. În acest scop vom arăta că

$$\ker \lambda = \mathfrak{R}_{\Omega' \cap X} + \underline{\mathcal{J}}(W)_{\Omega' \cap X}^N.$$

Fiindcă $\lambda(\mathfrak{R}_{\Omega' \cap X}) = \tilde{j}(\mathfrak{R}_{\Omega' \cap X}) = 0$ și $\tilde{\tau}_W[\underline{\mathcal{J}}(W)] = 0$, vom verifica numai incluziunea

$$\ker \lambda \subset \mathfrak{R}_{\Omega' \cap X} + \underline{\mathcal{J}}(W)_{\Omega' \cap X}^N.$$

2.4.1) Fie $b \in \Omega$ și $F_b \in \underline{O}(V)_b^N$ cu $F_b = (F_{1b}, \dots, F_{Nb})$ și $\lambda(F_b) = 0_b$. Avem $\gamma(F_b) = F_{bW}$ și $\tilde{j}(F_{bW}) = 0_b$. Prin urmare $F_{bW} \in \mathfrak{R}_b$

și putem aplica (10): $F_{bW} = \sum_{l=1}^{N_1} \Phi_{lbW} F_{bW}^l$, pentru un anumit $\Phi_{bW} \in \mathcal{O}(W)_b^{N_1}$. Deoarece τ_W este surjectiv, există $\Phi'_{lb} \in \mathcal{O}(V)_b$, astfel încît $\tau_W(\Phi'_{lb}) = \Phi_{lbW}$. Formăm $\sum_{l=1}^{N_1} \Phi'_{lb} F_b^l \in \mathfrak{R}'_b$. Însă $F_b = \sum_{l=1}^{N_1} \Phi'_{lb} F_b^l \in \mathcal{J}(W)_b^N$, ceea ce trebuia demonstrat.

2.4.2) Deoarece $(\Omega' \cap X) - \Omega \subset V - W$, pentru orice $b \in (\Omega' \cap X) - \Omega$ avem $\mathcal{J}(W)_b = \mathcal{O}(V)_b$ și $\ker \lambda_b \subset \mathcal{J}(W)_b^N$.

§ 9. Fascicolul germenilor de funcții meromorfe pe V .

1. Fie V o varietate analitică complexă și $\underline{\mathcal{O}} = \underline{\mathcal{O}}(V)$ fascicolul germenilor de funcții olomorfe pe V .

Pentru fiecare punct $a \in V$, formăm corpul cît $\mathcal{M}_a$ al domeniului de integritate $\mathcal{O}_a^*$.

Definiția 1. Un element $m_a \in \mathcal{M}_a$ se numește *germene de funcție meromorfă în a* .

Un germen de funcție meromorfă m_a este definit ca o clasă de echivalență de cuple $\{f_a, g_a\}$, cu f_a și $g_a \in \mathcal{O}_a$, $g_a \neq 0_a$, față de relația:

$$\{f_a, g_a\} \sim \{f_a^*, g_a^*\} \Leftrightarrow f_a g_a^* - f_a^* g_a = 0_a \quad (1)$$

și se notează $m_a = \frac{f_a}{g_a}$. Identificăm f_a cu $\frac{f_a}{1_a}$.

Să remarcăm că pentru orice $m_a \neq 0_a$, putem alege f_a și g_a relativ primi.

Organizăm mulțimea $\underline{\mathcal{M}} = \bigcup_{a \in V} \mathcal{M}_a$ ca fascicol definind proiecția $\pi: m_a \rightarrow a$ și vecinătățile elementelor $m_a \in \underline{\mathcal{M}}$, în modul următor:

*) Dacă V are în a dimensiunea n , atunci $\mathcal{M}_a$ este izomorf cu corpul cît al domeniului de integritate $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$.

Dacă $m_a = \frac{f_a}{g_a}$, fie (f, U) și (g, U) , cu U o vecinătate conexă a lui a în V iar f și g funcții olomorfe în U , doi reprezentanți ai germeilor f_a resp. g_a . Pentru fiecare $b \in U$, germenele $g_b \neq 0_b$, iar $\frac{f_b}{g_b}$ determină un element m_b din $\mathcal{M}_b$. Definim ca vecinătate a lui m_a mulțimea $\{m_b \mid b \in U\}$. Să observăm că această vecinătate este independentă de cuplul $\{f_a, g_a\}$ din clasa m_a în sensul următor: Fie $m_a = \frac{f_a^*}{g_a^*}$, $g_a^* \neq 0_a$, astfel încît germenii f_a^* și g_a^* să admită reprezentanți de forma (f^*, U) resp. (g^*, U) . Din relația $f_a g_a^* - f_a^* g_a = 0_a$ deducem $f g^* - f^* g = 0$ într-o vecinătate a lui a , deci după principiul prelungirii analitice în U . Dar atunci $f_b g_b^* - f_b^* g_b = 0_b$, $g_b \neq 0_b$ și $g_b^* \neq 0_b$, deci $m_b = \frac{f_b^*}{g_b^*}$.

Fascicolul $\mathcal{M} = \mathcal{M}(V)$ astfel obținut se numește *fascicolul germeilor de funcții meromorfe* pe V . El este un fascicol de corpuri pe V și totodată un fascicol de $\mathcal{O}$ -module. Evident, $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$.

2. În § 3, nr. 2, am arătat că funcțiile olomorfe pe V corespund biunivoc cu secțiunile fascicolului $\mathcal{O}$ peste V , încît putem identifica $\mathcal{O}(V)$ cu $\Gamma(V, \mathcal{O})$ și defini funcțiile olomorfe ca secțiuni în $\mathcal{O}$. Vom introduce noțiunea de funcție meromorfă în mod analog:

Definiția 2. Se numește *funcție meromorfă* pe V o secțiune a lui $\mathcal{M}$ peste V , i. e. o aplicație continuă $f: V \rightarrow \mathcal{M}$ cu $f(a) \in \mathcal{M}_a$, oricare ar fi $a \in V$.

Folosind un procedeu general de a da o secțiune într-un fascicol cu ajutorul unei acoperiri prin racordare de secțiuni locale, putem defini funcțiile meromorfe pe V și în modul următor:

Definiția 2'. Se dă o acoperire deschisă $\{\Omega_i\}_{i \in I}$ a lui V și pentru fiecare $i \in I$ un cuplu $\{f_i, g_i\}$ de funcții olomorfe pe Ω_i ,

astfel încît g_i să nu fie identic nulă pe nici un deschis din Ω_i și pentru orice pereche $(i, j) \in I^2$, cu $\Omega_{ij} \neq \emptyset$, $f_i g_j - f_j g_i = 0$ în Ω_{ij} . Un sistem $\{\Omega_i; f_i, g_i\}_{i \in I}$ definește o funcție meromorfă pe V , iar două sisteme $\{\Omega_i; f_i, g_i\}_{i \in I}$ și $\{\Delta_\alpha; \varphi_\alpha, \psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ definesc aceeași funcție meromorfă pe V , dacă și numai dacă pentru orice pereche de indici $(i, \alpha) \in I \times A$, cu $\Omega_i \cap \Delta_\alpha \neq \emptyset$, avem $f_i \psi_\alpha - \varphi_\alpha g_i = 0$ în $\Omega_i \cap \Delta_\alpha$.

Vom nota $\Gamma(V, \underline{\mathcal{M}})$ cu $\mathcal{M}(V)$.

Analog, pentru orice deschis $U \subset V$, vom numi funcție meromorfă pe U o secțiune din $\Gamma(U, \underline{\mathcal{M}}) = \mathcal{M}(U)$, deoarece putem identifica $\underline{\mathcal{M}}(U)$ cu $\mathcal{M}(V)_U$.

Observația 1. Spre deosebire de cazul 1-dimensional, în cazul n -dimensional, $n > 1$, nu putem asocia întotdeauna unei funcții meromorfe pe V o aplicație continuă $V \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Într-adevăr, fie $f(a) = m_a = \frac{\varphi_a}{\psi_a}$, $\psi_a \neq 0_a$ și φ resp. ψ două funcții olo-morfe în vecinătatea lui a , care determină germenii φ_a resp. ψ_a . Dacă $\psi(a) \neq 0$ sau dacă $\psi(a) = 0$, dar $\varphi(a) \neq 0$, îi putem asocia lui m_a valoarea $\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} \in \mathbb{C}$ resp. valoarea ∞ . Dacă însă $\psi(a) = \varphi(a) = 0$, presupunînd φ_a și ψ_a relativ primi, în orice vecinătate a lui a există un punct b , astfel încît $\psi(b) \neq 0$ și $\frac{\varphi(b)}{\psi(b)} = c$, punct arbitrar din $\mathbb{C}$, deci a este un punct de nedeterminare completă (cap. I, § 13, nr. 1.3, teorema 2).

Definiția 3. Dacă f este o funcție meromorfă pe V mulțimea punctelor $a \in V$ pentru care $f_a \notin O_a$ se numește *mulțimea polară* a lui f . *)

3. Principiul slab de prelungire analitică se extinde la funcții meromorfe.

*) Se demonstrează că mulțimea polară a unei funcții meromorfe pe o varietate analitică complexă n -dimensională conexă V este sau nulă sau o submulțime analitică de dimensiune $(n - 1)$ a lui V , [44], p. 247.

Propoziția 1. Fie V o varietate analitică complexă conexă și f_k , $k = 1, 2$, două funcții meromorfe pe V , care coincid într-un punct din V . Atunci $f_1 = f_2$ pe V .

Din consecința 2, cap. II, § 1, nr. 4, rezultă că mulțimea $V^* = \{p \mid p \in V, f_1(p) = f_2(p)\}$ este deschisă. Fie $a \in V^{*'} , f_k(a) = \frac{\varphi_{ka}}{\psi_{ka}}$ și U o vecinătate conexă a lui a , în care φ_k și ψ_k sînt funcții

olomorfe, iar $f_k(p) = \frac{\varphi_{kp}}{\psi_{kp}}$ pentru $p \in U$. Cum $a \in V^{*'} ,$ există

$p \in U \cap V^*$. Atunci $\varphi_{1p} \psi_{2p} - \varphi_{2p} \psi_{1p} = 0_p$ sau $\varphi_1 \psi_2 - \varphi_2 \psi_1 = 0$ într-o vecinătate a lui p din U . După principiul prelungirii analitice (§ 1, nr. 5, teorema 3), deducem $\varphi_1 \psi_2 - \varphi_2 \psi_1 = 0$ în U , deci $\varphi_{1a} \psi_{2a} - \varphi_{2a} \psi_{1a} = 0_a$ și $f_1(a) = f_2(a)$, sau $a \in V^*$. Prin urmare mulțimea V^* este și închisă. Cum $V^* \neq \emptyset$ și V este conex, obținem $V = V^*$.

IV PROBLEMELE LUI COUSIN

Un rol fundamental în dezvoltarea teoriei funcțiilor de mai multe variabile complexe l-au jucat problemele lui Cousin, care generalizează teoremele Mittag-Leffler și Weierstrass din cazul unei singure variabile complexe. Considerate de P. Cousin în spațiul $\mathbb{C}^n$ în 1895, [30], ele au fost studiate treptat în condiții tot mai generale. Teoria fasciculelor și a fibratelor s-au dovedit în acest sens extrem de utile. În capitolul de față, după enunțarea problemelor lui Cousin, § 1, vom da rezolvarea lor în cazul particular al cubului §§ 4 și 9. Pentru aceasta vom folosi o serie de teoreme importante, care vor fi prezentate în celelalte paragrafe.

§ 1. Formularea problemelor lui Cousin

V fiind o varietate analitică complexă, convenim din nou să notăm cu $\mathcal{O} = \mathcal{O}(V)$ și $\mathcal{M} = \mathcal{M}(V)$ fascicolul germenilor de funcții olomorfe resp. meromorfe pe V .

1. Problema I-a (problema aditivă) a lui Cousin

Se știe că după teorema lui Mittag-Leffler, dat un șir de puncte b_n , $n = 1, 2, \dots$, din plan, fără punct de acumulare la distanță finită și pentru fiecare b_n un polinom $\pi_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right)$ în raport cu $\left(\frac{1}{z-b_n}\right)$, există o funcție meromorfă f , având ca poli punctele b_n cu părțile principale $\pi_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right)$. Într-o formulare echivalentă, teorema Mit-

tag-Leffler afirmă existența unei funcții meromorfe f , olomorfă în $\mathbb{C} - \{b_n\}_{n=1,2,\dots}$ și astfel încît $f - \pi_n \left(\frac{1}{z-b_n} \right)$ să fie olomorfă într-o vecinătate a lui b_n , $n = 1, 2, \dots$

Problema I a lui Cousin pentru varietatea analitică complexă V își propune generalizarea acestui rezultat pentru V .

Definiția 1. Se numește *sistem de părți principale* pe varietatea analitică complexă V o secțiune în fascicolul cit $\mathcal{M}/\mathcal{O}$, $\mathcal{M}$ și $\mathcal{O}$ fiind considerate ca fasciculele de grupuri aditive ale germe- nilor de funcții meromorfe resp. olomorfe pe V .

Se verifică imediat că un sistem de părți principale poate fi definit și în modul următor (propoziția 6, cap. II, § 1, nr. 4):

Definiția 1'. Un *sistem de părți principale* pe V este o familie $\{\Omega_i, f_i\}_{i \in I}$, unde $\{\Omega_i\}_{i \in I}$ formează o acoperire a lui V , iar f_i sînt funcții meromorfe pe Ω_i , cu proprietatea că funcția $f_i - f_j$ este olomorfă pe Ω_{ij}^* , oricare ar fi indicii $i, j \in I$, astfel încît $\Omega_{ij} \neq \emptyset$. Două familii $\{\Omega_i, f_i\}_{i \in I}$ și $\{\Omega_\alpha^*, f_\alpha^*\}_{\alpha \in A}$ definesc același sistem de părți principale, dacă pentru orice cuplu de indici $(i, \alpha) \in I \times A$, cu proprietatea $\Omega_i \cap \Omega_\alpha^* \neq \emptyset$, funcția $f_i - f_\alpha^*$ este olomorfă pe $\Omega_i \cap \Omega_\alpha^*$.

Într-adevăr, dat $\sigma \in \Gamma(V, \mathcal{M}/\mathcal{O})$, putem asocia fiecărui punct $a \in V$, o vecinătate Ω și o funcție f meromorfă pe Ω , pentru care $f(b) + O_b = \sigma(b)$, $b \in \Omega$. Obținem astfel o familie $\{\Omega, f\}_{a \in V}$ cu proprietățile din definiția 1'. Reciproc, dată o familie $\{\Omega_i, f_i\}_{i \in I}$, definim $\sigma(a) = f_i(a) + O_a$, dacă $a \in \Omega_i$.

Observăm că orice funcție f meromorfă pe V determină un sistem de părți principale. Într-adevăr, putem asocia lui f secțiunea $\sigma = \varphi \circ f$, unde φ este aplicația canonică: $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/\mathcal{O}$ sau sistemul de părți principale $\{\Omega_i, f|_{\Omega_i}\}_{i \in I}$, unde $\{\Omega_i\}_{i \in I}$ formează o acoperire a lui V . Problema reciprocă formează obiectul primei probleme a lui Cousin.

*) Ca de obicei, în cazul unei familii de mulțimi, notăm cu $\Omega_{ij} = \Omega_i \cap \Omega_j$.

Problema I-a a lui Cousin: *Dată varietatea analitică complexă V și un sistem de părți principale $\{\Omega_i, f_i\}_{i \in I}$ pe V , să se găsească o funcție meromorfă f pe V , astfel încât oricare ar fi $i \in I$ funcția $f - f_i$ să fie olomorfă pe Ω_i .*

Observația 1. Să considerăm șirul exact de fascicule pe V

$$0 \rightarrow \underline{O} \rightarrow \underline{M} \rightarrow \underline{M/O} \rightarrow 0. \quad (1)$$

Condiția necesară și suficientă pentru ca problema I a lui Cousin să fie solubilă pentru varietatea analitică V este ca șirul

$$0 \rightarrow \Gamma(V, \underline{O}) \rightarrow \Gamma(V, \underline{M}) \rightarrow \Gamma(V, \underline{M/O}) \rightarrow 0 \quad (2)$$

să fie exact.

Se demonstrează însă că există varietăți analitice complexe pentru care problema I a lui Cousin nu este întotdeauna rezolvabilă. De exemplu, o teoremă a lui Cartan arată că un deschis din $\mathbb{C}^2$, pentru care problema I a lui Cousin admite soluție, este domeniu de olomorfie, [10], p. 59, dar un polidisc din care am extras centrul nu este domeniu de olomorfie (cap. I, § 10 nr. 4, propoziția 1). Obținem totodată un exemplu de șir exact de fascicule analitice, care nu determină un șir exact de secțiuni.

În locul problemei I a lui Cousin vom cerceta în cele ce urmează

Problema I-a a lui Cousin generalizată: *Fie $\Omega = \{\Omega_i\}_{i \in I}$ o acoperire deschisă a varietății analitice complexe V și pentru fiecare cuplu de indici $(i, j) \in I^2$, astfel încât $\Omega_{ij} \neq \emptyset$, fie $c_{ij} \in O(\Omega_{ij})$, cu proprietățile:*

$$1^\circ c_{ij} + c_{ji} = 0 \text{ pe } \Omega_{ij}.$$

$$2^\circ c_{ij} + c_{jk} + c_{ki} = 0 \text{ pe } \Omega_{ijk}, \text{ oricare ar fi tripletul de indici } i, j, k \in I \text{ cu } \Omega_{ijk} \neq \emptyset. *)$$

Să se găsească pentru fiecare $i \in I$ o funcție $c_i \in O(\Omega_i)$ cu proprietatea

$$c_{ij} = c_i - c_j$$

în Ω_{ij} , întrucât $\Omega_{ij} \neq \emptyset$.

*) Din condițiile 1° și 2° rezultă o condiție analogă pentru un număr finit oarecare de indici.

Propoziția 1. *Rezolvarea problemei I a lui Cousin se obține din rezolvarea problemei I a lui Cousin generalizate.*

Dat sistemul de părți principale $\{\Omega_i, f_i\}_{i \in I}$, definim pentru orice cuplu $(i, j) \in I^2$ cu $\Omega_{ij} \neq \emptyset$, funcția $c_{ij} = f_i - f_j$ olomorfă în Ω_{ij} și obținem astfel un sistem de date pentru problema I a lui Cousin generalizată: $\{\Omega_i, c_{ij}\}_I$. Dacă această problemă are soluție, există $c_i \in O(\Omega_i)$, astfel încât $f_i - c_i = f_j - c_j$ în $\Omega_{ij} \neq \emptyset$. Punind $f = f_i - c_i$ în Ω_i pentru fiecare $i \in I$, definim o funcție f meromorfă pe V și astfel încât, oricare ar fi $i \in I$, $f - f_i \in O(\Omega_i)$. Funcția f rezolvă problema I a lui Cousin.

Observația 2. Forma generalizată a problemei I a lui Cousin se interpretează imediat în cadrul coomologiei cu coeficienți în fasciculul $\mathcal{O}$. Datele unei probleme I a lui Cousin generalizate definesc un $\bar{1}$ -cociclu din $Z^1(\Omega, \mathcal{O})$, iar soluția corespunde unui 0-colanț a cărui cofrontieră cu semnul schimbat este cocicluul dat. Prin urmare dacă problema I a lui Cousin generalizată pentru o acoperire Ω și orice date $\{c_{ij}\}_I$ are soluție, atunci $H^1(\Omega, \mathcal{O}) = 0$ și reciproc. În particular, dacă problema I a lui Cousin generalizată este solubilă pentru orice date, $H^1(V, \mathcal{O}) = 0$ și reciproc (observația 5, cap. II, § 7, nr. 5).

Pentru a aprofunda legătura cu teoria coomologiei să considerăm datele unei probleme I a lui Cousin generalizate $\{\Omega_i, c_{ij}\}_I$ și o rafinare $\Omega^* = \{\Omega_\alpha^*\}_{\alpha \in A}$ a acoperirii $\Omega = \{\Omega_i\}_{i \in I}$, definită de aplicația $\Phi: A \rightarrow I$. Prin procedeul dezvoltat în cap. II, § 7, nr. 2, propoziția 2, obținem un sistem de date $c_{\alpha\beta}$ pentru $\alpha, \beta \in A$, $\Omega_{\alpha\beta}^* \neq \emptyset$, definit prin relațiile $c_{\alpha\beta}^* = c_{\Phi(\alpha)\Phi(\beta)}|_{\Omega_{\alpha\beta}^*}$. Problema I a lui Cousin

generalizată de date $\{\Omega_\alpha^*, c_{\alpha\beta}^*\}_A$ se va numi problema I a lui Cousin generalizată indusă de $\{\Omega_i, c_{ij}\}_I$ relativ la Ω^* .

Vom generaliza din nou problema I a lui Cousin, dînd următoarea formulare:

Problema I* a lui Cousin: *Dacă datele $\{\Omega_i, c_{ij}\}_I$ definesc o problemă I a lui Cousin generalizată, să se găsească o rafinare Ω^* a acoperirii Ω , astfel încât problema indusă să fie rezolvabilă.*

Propoziția 2. *Dacă problema I^* admite soluție, atunci problema I a lui Cousin este rezolvabilă.*

Fie din nou $\{\Omega_i, f_i\}_{i \in I}$ un sistem de părți principale pe V și $\{\Omega_i, c_{ij} = f_i - f_j\}_{i \in I}$ datele problemei I a lui Cousin generalizate corespunzătoare. Să presupunem că Ω^* este o rafinare a lui Ω dată de aplicația Φ , astfel încît problema lui Cousin indusă $\{\Omega_\alpha^*, c_{\alpha\beta}^*\}_A$ să aibă soluție, deci să existe $c_\alpha^* \in \mathcal{O}(\Omega_\alpha^*)$, pentru care $c_{\alpha\beta}^* = c_\alpha^* - c_\beta^*$, dacă $\Omega_{\alpha\beta}^* \neq \emptyset$.

Să arătăm că luînd $F = f_{\Phi(\alpha)} - c_\alpha^*$ pe Ω_α^* , $\alpha \in A$, obținem o soluție a problemei I a lui Cousin propuse.

Vom verifica mai întîi că F este o funcție meromorfă pe V : Fie $\alpha, \beta \in A$, astfel încît $\Omega_{\alpha\beta}^* \neq \emptyset$. Atunci $(f_{\Phi(\alpha)} - c_\alpha^*) - (f_{\Phi(\beta)} - c_\beta^*) = c_{\Phi(\alpha)\Phi(\beta)} - c_{\alpha\beta}^* = 0$ pe $\Omega_{\alpha\beta}^*$.

Pentru orice $i \in I$, $F - f_i \in \mathcal{O}(\Omega_i)$: Într-adevăr, oricare ar fi punctul $a \in \Omega_i$ și α , astfel încît $a \in \Omega_\alpha^*$ avem în $\Omega_i \cap \Omega_\alpha^*$ următoarea relație $F - f_i = f_{\Phi(\alpha)} - c_\alpha^* - f_i = c_{\Phi(\alpha)i} - c_\alpha^*$.*)

După cum rezultă din observația 5, cap. II, § 7, nr. 5, problema I^* a lui Cousin admite soluție pentru orice date, dacă și numai dacă $H^1(V, \mathcal{O}) = 0$. Ținînd seama de observația 2 și de propozițiile 1 sau 2, deducem

Teorema 1. *Condiția necesară și suficientă pentru ca problema I generalizată sau problema I^* a lui Cousin să admită soluție pe varietatea analitică complexă V este ca $H^1(V, \mathcal{O}) = 0$. Această condiție este suficientă pentru ca problema I a lui Cousin să admită soluție pe V .*

2. Problema a II-a (problema multiplicativă) a lui Cousin

Fie V o varietate analitică complexă, $\mathcal{O}$ fascicolul germenilor de funcții olomorfe pe V și $\mathcal{M}$ fascicolul germenilor de funcții meromorfe pe V . Pentru fiecare punct $a \in V$ să notăm cu $\mathcal{M}_a^* = \mathcal{M}_a - \{0_a\}$ grupul multiplicativ al germenilor de funcții meromorfe, neidentic nule în vecinătatea lui a și cu $\mathcal{O}_a^*$ grupul multiplicativ al germenilor inversibili de funcții olomorfe în a . Submul-

) Dacă problema I^ admite soluție, atunci și problema I generalizată are soluție.

țimile $\underline{\mathcal{M}}^* = \bigcup_{a \in V} \mathcal{M}_a^*$ și $\underline{O}^* = \bigcup_{a \in V} O_a^*$ formează subfascicole ale fascicolului de mulțimi $\underline{\mathcal{M}}$. Ele sînt fascicole de grupuri abeliene (notate multiplicativ) și $\underline{O}^*$ este subfascicol al lui $\underline{\mathcal{M}}^*$. Fie $\underline{\mathcal{M}}^*/\underline{O}^*$ fascicolul cît de grupuri abeliene pe V .

Definiția 2. Se numește *divizor* pe V o secțiune peste V în fascicolul $\underline{\mathcal{M}}^*/\underline{O}^*$.

Definiția 2'. O familie $\{\Omega_i, f_i\}_{i \in I}$, unde $\{\Omega_i\}_{i \in I}$ formează o acoperire a lui V , iar f_i este o funcție meromorfă pe Ω_i , definește un *divizor* pe V , dacă funcțiile $f_i f_j^{-1}$ și $f_i^{-1} f_j$ sînt olomorfe în Ω_{ij} , îndată ce $\Omega_{ij} \neq \emptyset$. Două familii $\{\Omega_i, f_i\}_{i \in I}$ și $\{\Omega_\alpha^*, f_\alpha^*\}_{\alpha \in A}$ definesc același divizor, dacă pentru orice pereche de indici i și α , astfel încît $\Omega_i \cap \Omega_\alpha^* \neq \emptyset$, funcțiile $f_i f_\alpha^{*-1}$ și $f_i^{-1} f_\alpha^*$ sînt olomorfe în $\Omega_i \cap \Omega_\alpha^*$.*)

Echivalența celor două definiții se obține ca și în cazul sistemelor de părți principale.

Orice funcție f meromorfă, care nu este identic nulă pe nici o componentă conexă a lui V , determină în mod natural un divizor pe V . Problema a II-a a lui Cousin cere reciproc, fiind dat un divizor să se găsească o funcție meromorfă corespunzătoare.

Definiția 3. Orice divizor determinat de o funcție meromorfă se numește *principal*.

Prin urmare a stabili că orice problemă a II-a a lui Cousin este rezolvabilă echivalează cu a demonstra că orice divizor este principal.

Dacă dimensiunea varietății V este $n = 1$ orice fibră a fascicolului $\underline{\mathcal{M}}^*/\underline{O}^*$ corespunde biunivoc cu $\mathbb{Z}$, căci putem asocia fiecărui element din $(\underline{\mathcal{M}}^*/\underline{O}^*)_a$, $a \in V$, ordinul în a al funcției meromorfe ce îl reprezintă. Un divizor poate fi definit deci ca o funcție: $V \rightarrow \mathbb{Z}$, care ia valori $\neq 0$ în puncte izolate, fără punct de acumulare pe V . În acest mod este prezentată noțiunea de divizor în teoria clasică a funcțiilor pe o suprafață riemanniană V . Dată o funcție meromorfă pe V , zerourile și polii ei împreună cu ordinele lor de multiplicitate pozitive resp. negative definesc un divizor pe V . Problema re-

*) Considerăm funcții neidentic nule pe nici o componentă conexă a domeniului lor de definiție.

ciprocă se rezolvă în cazul $V = \mathbb{C}$ cu ajutorul teoremei lui Weierstrass despre produse infinite, iar în cazul unei suprafețe riemanniene oarecare prin extensia acestei teoreme de către Behnke și Stein, și de către Florack ([7], cap. VI, § 6).

Generalizarea teoremei lui Weierstrass în cazul n dimensional a condus astfel la

Problema a II-a a lui Cousin : *Dat un divizor $\{\Omega_i, f_i\}_{i \in I}$ pe V , să se găsească o funcție meromorfă f pe V , astfel încât $f f_i^{-1}$ să fie o funcție olomorfă, inversibilă pe Ω_i , $i \in I$.*

Observația 3. Șirul de fascicule de grupuri abeliene multiplicative

$$0 \rightarrow \mathcal{O}^* \rightarrow \mathcal{M}^* \rightarrow \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^* \rightarrow 0 \quad (3)$$

este exact. Problema a II-a a lui Cousin admite soluții pe V atunci și numai atunci când șirul

$$0 \rightarrow \Gamma(V, \mathcal{O}^*) \rightarrow \Gamma(V, \mathcal{M}^*) \rightarrow \Gamma(V, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) \rightarrow 0 \quad (4)$$

este exact.

Problema a II-a a lui Cousin nu admite întotdeauna soluție. Oka a construit de exemplu în următorul domeniu din $\mathbb{C}^2$: $\Delta = \{(z_1, z_2) \mid 3/4 < |z_j| < 5/4, j = 1, 2\}$, pentru care problema I este rezolvabilă (Δ este domeniu de olomorfie), un divizor care nu este principal ([10], p. 101). În cazul $n = 1$, pentru a serie o funcție meromorfă cu zerouri și poli dați este suficient să putem construi funcții olomorfe cu zerouri date. Un rezultat analog este valabil în general:

Definiția 4. Vom numi *divizor întreg* un divizor α , care după definiția 2' este dat printr-un sistem $\{\Omega_i, f_i\}_{i \in I}$ cu $f_i \in \mathcal{O}(\Omega_i)$, sau după definiția 2 în orice punct $a \in V$ este de forma $f_a \mathcal{O}_a^*$, unde $f_a \in \mathcal{O}_a$.

Propoziția 3. *Orice divizor este citul a doi divizori întregi.*

Fie α un divizor. Oricare ar fi punctul a din V , luând o vecinătate U_a a sa suficient de mică, avem îndeplinite următoarele condiții: 1) Există $A \in \Gamma(U_a, \mathcal{M}^*)$, astfel încât pentru orice $p \in U_a$ să avem $\alpha(p) = A(p) \mathcal{O}_p^*$. 2) Există A' și $A'' \in \Gamma(U_a, \mathcal{O})$ relativ prime în fiecare punct din U_a , astfel încât $A = \frac{A'}{A''}$.

Să arătăm că $\{U_a, A'\}_{a \in V}$ și $\{U_a, A''\}_{a \in V}$ definesc doi divizori α' resp. α'' . În acest scop vom lua un alt punct $b \in V$, astfel încît $U_{ab} \neq \emptyset$. Fie B, B', B'' funcțiile corespunzătoare pentru b . Prin ipoteză $A B^{-1} = H \in \Gamma(U_{ab}, \mathcal{O}^*)$, deci $A' B'' = A'' B' H$ și $A' B'' H^{-1} = A'' B'$ pe U_{ab} , de unde rezultă că B' divide pe A' și că A' divide pe B' în U_{ab} sau că $A' B'^{-1} \in \Gamma(U_{ab}, \mathcal{O}^*)$. Analog, $A'' B''^{-1} \in \Gamma(U_{ab}, \mathcal{O}^*)$. Divizorii α' și α'' sînt întregi, iar $\alpha = \alpha' \alpha''^{-1}$.

Consecința 1. *Dacă problema a II-a a lui Cousin admite soluție pentru divizori întregi, atunci ea este rezolvabilă.*

În cazul $n = 1$ cu ajutorul teoremei lui Weierstrass se obține ușor teorema lui Poincaré: Orice funcție meromorfă pe V este cîtul a două funcții olomorfe, care sînt relativ prime în fiecare punct. Această teoremă a condus la problema lui Poincaré, care admite în general două formulări.

Problema lui Poincaré (forma tare): *Dată o funcție meromorfă pe varietatea analitică complexă V , ea este cîtul a două funcții olomorfe pe V , relativ prime în fiecare punct din V .*

Problema lui Poincaré (forma slabă): *O funcție meromorfă pe V este cîtul a două funcții olomorfe pe V .*

Propoziția 4. *Dacă problema a II-a a lui Cousin admite soluție pe V , atunci și problema lui Poincaré (în forma tare) admite soluție pe V .*

Fie $F \in \Gamma(V, \mathcal{M}^*)$ și α divizorul principal asociat lui F . După propoziția 3, $\alpha = \alpha' \alpha''^{-1}$ cu α' și α'' divizori întregi, definiți de sisteme $\{U_a, A'\}_{a \in V}$ resp. $\{U_a, A''\}_{a \in V}$, cu A' și A'' relativ prime. Problema a II-a a lui Cousin fiind rezolvabilă, există funcțiile F' și F'' olomorfe care determină α' resp. α'' . Aceste funcții sînt relativ prime în fiecare punct din V , iar $F' F''^{-1}$ definește ca și F divizorul α . Prin urmare $F F'^{-1} F'' = H$ — o unitate din $\mathcal{O}(V)$ — și $F = (F' H) F''^{-1}$. Cazul $F = 0$ pe unele componente conexe ale lui V este banal.

Problema a II-a a lui Cousin generalizată: *Fie $\{\Omega_i\}_{i \in I}$ o acoperire a lui V și, pentru fiecare cuplu de indici $(i, j) \in I^2$ cu*

$\Omega_{ij} \neq \emptyset$, fie c_{ij} o funcție olomorfă inversibilă în Ω_{ij} , astfel încât:

1° $c_{ij} c_{ji} = 1$ în Ω_{ij} și

2° $c_{ij} c_{jk} c_{ki} = 1$ în Ω_{ijk} , dacă $\Omega_{ijk} \neq \emptyset$ *).

Să se găsească funcțiile c_i olomorfe și inversibile în Ω_i , $i \in I$, astfel încât $c_{ij} = c_i c_j^{-1}$ în Ω_{ij} , Ω_{ij} fiind presupus nevid.

Ca și în cazul problemei I se stabilește imediat

Propoziția 5. Dacă problema a II-a a lui Cousin generalizată este rezolvabilă, atunci și problema a II-a a lui Cousin este rezolvabilă.

Fie $\{\Omega_i, f_i\}_{i \in I}$ datele unei probleme a II-a lui Cousin. Punând $c_{ij} = f_i f_j^{-1}$ în Ω_{ij} , obținem datele unei probleme generalizate $\{\Omega_i, c_{ij}\}_I$. Dacă aceasta admite soluția $\{\Omega_i, c_i\}_{i \in I}$, funcția f , definită prin relațiile $f = f_i c_i^{-1}$ în Ω_i , rezolvă problema a II-a lui Cousin propusă.

Observația 4. Datele problemei a II-a a lui Cousin generalizate $\{\Omega_i, c_{ij}\}_I$, care constituie o transcriere multiplicativă a problemei I generalizate, definesc un 1-cociclu multiplicativ c din $Z^1(\Omega, O^*)$, unde $\Omega = \{\Omega_i\}_{i \in I}$ și cocicluul asociază perechii $(i, j) \in \overline{I^2}$ secțiunea $c_{ij} \in \Gamma(\Omega_{ij}, O^*)$.

Din nou faptul că această problemă este rezolvabilă echivalează cu proprietatea acestui cociclu de a fi cofrontieră. Deci problema a II-a generalizată admite soluție, atunci și numai atunci când $H^1(\Omega, O^*) = 0$ pentru orice acoperire Ω , de unde rezultă condiția necesară și suficientă pentru ca această problemă să admită soluție: $H^1(V, O^*) = 0$ **).

Continuînd analogia cu problema I, se poate introduce și problema II *.

3. Folosind funcția exponențială vom stabili o legătură între problema multiplicativă a lui Cousin și cea aditivă, care ne va

*) Condiția 1° implică faptul că c_{ij} sînt inversibile. Relația 2° se extinde pentru intersecția unui număr oarecare de mulțimi Ω_i .

**) $H^1(\Omega, O^*)$ și $H^1(V, O^*)$ sînt grupuri de coomologie în transcriere multiplicativă.

conduce la clasele caracteristice ale lui Chern și la un nou criteriu pentru ca problema a II-a a lui Cousin să fie rezolvabilă.

Definiția 5. Vom numi *acoperire distinsă* o acoperire $\Omega = \{\Omega_i\}_{i \in I}$, pentru care Ω_i și Ω_{ij} , i și $j \in I$, sînt simplu conexe.

Dacă Ω este un domeniu simplu conex din V , iar F este o funcție olomorfă inversibilă, atunci există $f \in O(\Omega)$, astfel încît

$$F = e^{2\pi i f}, \quad (5)$$

f fiind determinată, abstracție făcînd de o constantă aditivă, număr întreg.

Fie $\{\Omega_j, c_{jk}\}_I$ datele unei probleme a II-a a lui Cousin, unde acoperirea Ω este distinsă. Pentru fiecare pereche de indici j, k din I cu $\Omega_{jk} \neq \emptyset$, vom alege o funcție $d_{jk} \in O(\Omega_{jk})$, astfel încît

$$c_{jk} = e^{2\pi i d_{jk}}, \quad d_{jk} + d_{kj} = 0 \text{ și } d_{jj} = 0. \quad (6)$$

Obținem astfel un 1-colanț aditiv $d \in C^1(\Omega, \underline{O})$, care în genere nu este 1-cociclu. Fie

$$m_{jkl} = d_{jk} + d_{kl} + d_{lj}. \quad (7)$$

Se verifică imediat că $m_{jkl} \in \mathbb{Z}$ și că formează un 2-cociclu $m \in Z^2(\Omega, \mathbb{Z})$. Dacă înlocuim d_{jk} prin $d_{jk} + n_{jk}$ cu $n_{jk} \in \mathbb{Z}$, $n_{jk} + n_{kj} = 0$, $n_{jj} = 0$, se vede că n_{jk} formează un 1-colanț $n \in C^1(\Omega, \mathbb{Z})$, iar în loc de m obținem 2-cociclu $m + \delta n$.

În concluzie, unei probleme a II-a a lui Cousin generalizate cu datele $\{\Omega_j, c_{jk}\}_I$, Ω — acoperire distinsă, îi corespunde univoc o clasă $m \in H^2(\Omega, \mathbb{Z})$.

Să plecăm acum de la problema a II-a a lui Cousin propriu-zisă. Fie D un divizor. Putem lua un sistem corespunzător $\{\Omega_i, f_i\}_{i \in I}$, unde Ω este o acoperire distinsă. Fie $\{\Omega_i, c_{ij} = f_i f_j^{-1}\}_I$ datele problemei a II-a a lui Cousin generalizate determinată de D și m clasa din $H^2(\Omega, \mathbb{Z})$ asociată după procedeul de mai sus. Se verifică ușor că această clasă nu se schimbă dacă, păstrînd acoperirea Ω , se alege alt sistem $\{\Omega_i, \tilde{f}_i\}_{i \in I}$ pentru a defini divi-

zorul D . Am definit astfel o aplicație $\chi_\Omega: \Gamma(V, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) \rightarrow H^2(\Omega, \mathbb{Z})$, care asociază lui D clasa $\dot{m}$. Aplicația $\chi_\Omega = \lambda_\Omega \circ \mu_\Omega$, unde $\mu_\Omega: \Gamma(V, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) \rightarrow H^1(\Omega, \mathcal{O}^*)$ asociază unui divizor D clasa $\dot{c} \in H^1(\Omega, \mathcal{O}^*)$ a 1-cocicluului multiplicativ c , iar $\lambda_\Omega: H^1(\Omega, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^2(\Omega, \mathbb{Z})$ asociază unei clase $\dot{c}$ clasa $\dot{m}$ prin procedeul de mai sus.

Se verifică imediat că λ_Ω și μ_Ω , deci și χ_Ω , sînt omomorfisme.

Dacă D este divizor principal $\chi_\Omega(D) = \dot{0}$.

Pentru a trece de la grupurile de coomologie ale unei acoperiri la grupurile de coomologie ale varietății V , vom lua o rafinare $\Omega^* = \{\Omega_\alpha^*\}_{\alpha \in A}$, cu $\Phi: A \rightarrow I$ și $\Omega_\alpha^* \subset \Omega_{\Phi(\alpha)}$, $\alpha \in A$, care formează acoperire distinsă, și vom considera problema lui Cousin indusă $\{\Omega_\alpha^*, f_{\Phi(\alpha)}|_{\Omega_\alpha^*}\}_{\alpha \in A}$. Se verifică relația de comutativitate $\sigma(\Omega, \Omega^*) \circ \chi_\Omega = \chi_{\Omega^*}$, unde $\sigma(\Omega, \Omega^*): H^2(\Omega, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\Omega^*, \mathbb{Z})$ are semnificația din cap. II, § 7, nr. 2. Putem aplica procedeul de trecere la limita inductivă, considerînd însă numai acoperiri distinsă, și vom obține omomorfismul canonic

$$\chi: \Gamma(V, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) \rightarrow H^2(V, \mathbb{Z}). \quad (8)$$

Definiția 6. Clasa $\{\dot{m}\} = \chi(D) \in H^2(V, \mathbb{Z})$ se numește *clasa lui Chern* sau *clasa caracteristică a divizorului D resp. a problemei a II-a a lui Cousin corespunzătoare*.

Teorema 2 (Oka-Serre.) Omomorfismul canonic (8) are următoarele proprietăți:

- 1) Dacă D este un divizor principal, $\chi(D) = \{\dot{0}\}$.
- 2) În ipoteza $H^1(V, \mathcal{O}) = 0$, dacă $\chi(D) = \{\dot{0}\}$, atunci D este divizor principal.

Vom indica numai demonstrația afirmației 2). Dacă divizorul D este dat prin sistemul $\{\Omega_i, f_i\}_{i \in I}$, cu Ω acoperire distinsă, și dacă $\chi_\Omega(D) = \dot{m}$, există o rafinare a lui Ω printr-o acoperire distinsă

$\Omega^* = \{\Omega_\alpha^*\}_{\alpha \in A}$ definită de aplicația Φ , astfel încît $\chi_{\Omega^*}(D) = \overline{\rho_\Phi m} = \dot{0} \in H^2(\Omega^*, \mathbb{Z})$ sau $\rho_\Phi m = \delta n$, cu $n \in C^1(\Omega^*, \mathbb{Z})$. Păstrînd notațiile din relațiile (6) și (7), fie $d^* = \rho_\Phi d - n$. Evident $c^* = \rho_\Phi c = e^{2\pi i d^*}$, iar $\delta d^* = \rho_\Phi m - \delta n = 0$. Prin urmare $d^* \in$

$\in Z^1(\Omega^*, \mathcal{O})$ și conform ipotezei $H^1(V, \mathcal{O}) = 0$, $d^* = \delta \tilde{d}$, cu $\tilde{d} \in C^0(\Omega^*, \overline{\mathcal{O}})$. Pentru orice pereche de indici $(\alpha, \beta) \in A^2$, cu $\Omega_{\alpha\beta}^* \neq \emptyset$, deducem $f_{\Phi(\alpha)} e^{2\pi i \tilde{d}_\alpha} = f_{\Phi(\beta)} e^{2\pi i \tilde{d}_\beta}$ pe $\Omega_{\alpha\beta}^*$. În concluzie, $f = f_{\Phi(\alpha)} e^{2\pi i \tilde{d}_\alpha}$ pe Ω_α^* , $\alpha \in A$, este o funcție meromorfă pe V , care determină divizorul $\tilde{D}$, fiindcă $f f_j^{-1} \in \Gamma(\Omega_j, \mathcal{O}^*)$.

Din afirmația 2) a acestei teoreme rezultă

Consecința 2. În ipoteza $H^1(V, \mathcal{O}) = 0$, o condiție suficientă pentru ca problema a II-a a lui Cousin să fie rezolvabilă este ca $H^2(V, \mathbb{Z}) = 0$.

În § 9 al acestui capitol vom reveni asupra problemei a II-a a lui Cousin, stabilind legătura cu fibrările vectoriale analitice de ordinul 1.

4. Aplicații ale teoremei șirului exact de coomologie (teorema 11, cap. II, § 8, nr. 2) la problemele lui Cousin

Fie V o varietate analitică complexă paracompactă.

4.1. Problema I-a a lui Cousin. Știm că necesar și suficient pentru ca această problemă să admită soluție, este ca șirul (2) de la nr. 1 să fie exact (observația 1). Să scriem șirul exact de coomologie corespunzător lui (1)

$$0 \rightarrow \Gamma(V, \underline{\mathcal{O}}) \rightarrow \Gamma(V, \underline{\mathcal{M}}) \rightarrow \Gamma(V, \underline{\mathcal{M}}/\underline{\mathcal{O}}) \rightarrow H^1(V, \underline{\mathcal{O}}) \rightarrow \dots$$

Prin urmare $H^1(V, \underline{\mathcal{O}}) = 0$ este o condiție suficientă pentru ca problema I a lui Cousin să admită soluție pe V . Regăsim astfel un rezultat, pe care îl stabilisem mai sus prin teorema 1.

4.2. Problema a II-a a lui Cousin. După observația 3, această problemă admite soluție atunci și numai atunci când șirul (4) este exact. Șirul exact de coomologie pentru (3)

$$0 \rightarrow \underline{\mathcal{O}}^* \xrightarrow{u} \underline{\mathcal{M}}^* \xrightarrow{v} \underline{\mathcal{M}}^*/\underline{\mathcal{O}}^* \rightarrow 0$$

este

$$0 \rightarrow \Gamma(V, \underline{\mathcal{O}}^*) \xrightarrow{u^*} \Gamma(V, \underline{\mathcal{M}}^*) \xrightarrow{v^*} \Gamma(V, \underline{\mathcal{M}}^*/\underline{\mathcal{O}}^*) \xrightarrow{d^*} H^1(V, \underline{\mathcal{O}}^*) \rightarrow \dots \quad (9)$$

Se vede însă că putem stabili un morfism între $\underline{O}$ și $\underline{O}^*$:

Pentru fiecare $a \in V$, fie $f_a \in \underline{O}_a$ reprezentat de funcția f olomorfă pe o vecinătate U a lui a . Formăm funcția $e^{2\pi i f}$, care este olomorfă și inversibilă pe U în punctul a . Asociem lui f_a germelele $(e^{2\pi i f})_a \in \underline{O}_a^*$. Putem scrie deci șirul exact de fascicule de grupuri abeliene

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \underline{O} \rightarrow \underline{O}^* \rightarrow 0$$

și aceeași teoremă ne dă șirul exact de coomologie

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \Gamma(V, \mathbb{Z}) \rightarrow \dots \rightarrow H^1(V, \underline{O}) \rightarrow H^1(V, \underline{O}^*) \xrightarrow{\delta^*} \\ \rightarrow H^2(V, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(V, \underline{O}) \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Dacă $H^1(V, \underline{O}) = 0$ și $H^2(V, \mathbb{Z}) = 0$, atunci $H^1(V, \underline{O}^*) = 0$, șirul (4) este exact și problema a II-a a lui Cousin admite soluție. Regăsim astfel consecința 2.

Dacă $H^q(V, \underline{O}) = 0$, $q = 1, 2, *$ atunci $H^2(V, \mathbb{Z}) \simeq H^1(V, \underline{O}^*)$. (A se vedea cap. VI, § 6, nr. 1.)

Mai mult însă morfismele $\Gamma(V, \mathcal{M}^*/\underline{O}^*) \xrightarrow{d^*} H^1(V, \underline{O}^*)$ și $H^1(V, \underline{O}^*) \xrightarrow{\delta^*} H^2(V, \mathbb{Z})$ din șirurile (9) și (10)**) ne definesc morfismul $\chi: \Gamma(V, \mathcal{M}^*/\underline{O}^*) \rightarrow H^2(V, \mathbb{Z})$, (8) nr. 2, care asociază fiecărui divizor D clasă lui Chern corespunzătoare $\chi(D)$.

Putem demonstra acum ușor teorema lui Oka și Serre (teorema 2):
1) Dacă divizorul D este principal, $D \in \text{im } v^* = \ker d^*$, deci $\chi(D) = \{0\}$. 2) Să presupunem că $H^1(V, \underline{O}) = 0$ și că $\chi(D) = \{0\}$. Ipoteza $H^1(V, \underline{O}) = 0$ arată că δ^* este injectiv. Prin urmare $\chi(D) = \{0\}$ implică $d^*(D) = \{0\}$. Dar atunci $D \in \text{im } v^*$ și este divizor principal.

*) Menționăm că o clasă foarte importantă de varietăți analitice complexe — varietățile Stein — au proprietatea $H^q(V, \underline{O}) = 0$, $q \geq 1$, (cap. VI).

**) Se verifică ușor că aceste morfisme coincid cu $\mu = \lim_{\rightarrow} \mu_{\Omega}$ și $\lambda = \lim_{\rightarrow} \lambda_{\Omega}$ din definiția 5.

§ 2. Integrala lui Pompeiu

Rezolvarea problemei I a lui Cousin folosește ecuațiile Cauchy-Riemann neomogene $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \alpha$. Un instrument fundamental pentru rezolvarea acestor ecuații îl constituie o integrală, pe care Pompeiu a considerat-o chiar în teza sa din 1905, ([70], p. 49) și o utilizează pentru generalizarea formulei integrale a lui Cauchy și a funcțiilor olomorfe ([70] sau [85], p. 7—11). În cele ce urmează vom studia integrala lui Pompeiu în cazul mai general, în care intervin pe lângă variabila z și un număr de parametri reali sau complecși $\mu_1, \dots, \mu_m$ și $\lambda_1, \dots, \lambda_l$.

Lema 1. (*Lema despre integrala lui Pompeiu.*) Fie U un deschis din planul z , care conține dreptunghiul închis $\Delta = \{z \mid |x| \leq a, |y| \leq b, a \text{ și } b > 0\}$, fie W un deschis din $\mathbb{C}^l$ și Ω un deschis din $\mathbb{R}^m$, l și m numere naturale*). Vom nota cu $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ resp. cu $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ un punct oarecare din $\mathbb{C}^l$ resp. $\mathbb{R}^m$. Dacă $\alpha : U \times W \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ este o funcție diferențiabilă de clasă C^∞ în $U \times W \times \Omega$, olomorfă în raport cu λ în W , pentru z și μ fixați arbitrar în U resp. Ω , atunci există „integrala lui Pompeiu”

$$f(z, \lambda, \mu) = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\Delta} \frac{\alpha(\zeta, \lambda, \mu)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \quad (1)$$

pentru orice $(z, \lambda, \mu) \in \mathbb{C} \times W \times \Omega$; funcția f este diferențiabilă de clasă C^∞ în raport cu toate variabilele z, λ și μ , este olomorfă în λ pentru z și μ fixați arbitrar și

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \alpha \text{ resp. } 0 \quad (2)$$

pentru $(z, \lambda, \mu) \in \dot{\Delta} \times W \times \Omega$ resp. $(z, \lambda, \mu) \in (\text{ext } \Delta) \times W \times \Omega$.

*) Lema se aplică și atunci când Ω este un deschis din $\mathbb{C}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}$ cu $2m_1 + m_2 = m$, conform omeomorfismului $\tau^{m_1} : \mathbb{C}^{m_1} \rightarrow \mathbb{R}^{2m_1}$ (cap. I, §1, nr. 1), sau atunci când Ω resp. W sînt mulțimi vide.

1) Se verifică ușor că integrala (1) există. Într-adevăr dacă $z \in \Delta$, fie $\zeta - z = re^{i\theta}$. Atunci

$$d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = -2i d\xi \wedge d\eta = -2id\xi d\eta = -2irdrd\theta, \quad (3)$$

iar (1) devine

$$f(z, \lambda, \mu) = -\frac{1}{\pi} \iint \alpha(z + re^{i\theta}, \lambda, \mu) e^{-i\theta} dr d\theta, \quad (4)$$

unde integrala din (4) este extinsă pe domeniul de variație a lui r și θ corespunzător lui $\zeta \in \Delta$.

2) Conform propoziției 2', consecinței 1 și propoziției 3 din cap. I, § 4, nr. 2, funcția $f(z, \lambda, \mu)$ este diferențiabilă de clasă C^∞ în $(\mathring{\Delta} \cup \text{ext } \Delta) \times W \times \Omega$, diferențiabilă de clasă C^∞ în $(\lambda, \mu) \in W \times \Omega$ pentru z fixat în $\mathbb{C}$, olomorfă în $\lambda \in W$ pentru (z, μ) fixat în $\mathbb{C} \times \Omega$ și olomorfă în $z \in \text{ext } \Delta$ pentru (λ, μ) fixat în $W \times \Omega$.

Integrala (1) tinde la 0 când $z \rightarrow \infty$, λ și μ rămânând fixați, astfel încît f se poate defini pe $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \times W \times \Omega$, prin relația $f(\infty, \lambda, \mu) = 0$. Cum f este o funcție olomorfă de z în $\text{ext } \Delta \subset \mathbb{C}$, ea este olomorfă și în punctul $z = \infty$.

3) Pentru a demonstra că $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \alpha$ în $\mathring{\Delta} \times W \times \Omega$, vom fixa un punct arbitrar $z \in \mathring{\Delta}$ și vom considera două dreptunghiuri închise δ și δ_1 cu centrul în origine, astfel încît $z \in \delta$, $\delta \subset \delta_1$ și $\delta_1 \subset \mathring{\Delta}$. Vom lua o funcție $\beta: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^∞ în $\mathbb{C}$, care să îndeplinească condițiile

$$\beta = 1 \text{ în } \delta \text{ și } \beta = 0 \text{ în } \text{ext } \delta_1$$

și vom defini funcțiile următoare $\alpha_1 = \alpha\beta$, $\alpha_2 = \alpha(1 - \beta)$ și

$$f_k(z, \lambda, \mu) = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\Delta} \frac{\alpha_k(\zeta, \lambda, \mu)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}, \quad (k = 1, 2).$$

Evident, $f = f_1 + f_2$.

Repetînd procedeul de mai sus, deducem că în $\mathring{\delta} \times W \times \Omega$ funcția f_2 este diferențiabilă de clasă C^∞ în raport cu toate variabilele z , λ și μ și olomorfă în raport cu z și λ , pentru μ fixat arbitrar.

Deoarece $\alpha_1 = 0$ în $[(\text{ext } \delta_1) \cap U] \times W \times \Omega$, vom prelunge α_1 la $(\text{ext } \delta_1) \times W \times \Omega$ luînd $\alpha_1 = 0$. Putem scrie deci

$$f_1(z, \lambda, \mu) = \frac{1}{2\pi i} \iint_C \frac{\alpha_1(\zeta, \lambda, \mu)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$$

sau, efectuînd schimbarea de variabilă $\zeta - z = u$,

$$f_1(z, \lambda, \mu) = \frac{1}{2\pi i} \iint_C \frac{\alpha_1(u + z, \lambda, \mu)}{u} du \wedge d\bar{u}.$$

Prin acest artificiu ([64], p. 55), integrandul a devenit o funcție diferențiabilă de clasă C^∞ în raport cu z, λ și μ , deci $f_1(z, \lambda, \mu)$ este o funcție diferențiabilă de clasă C^∞ în raport cu z, λ și μ , iar derivatele ei parțiale se calculează derivînd sub semnul integral. În particular, f_1 este olomorfă în λ și

$$\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}}(z, \lambda, \mu) = \frac{1}{2\pi i} \iint_C \frac{\partial \alpha_1(u + z, \lambda, \mu)}{\partial \bar{z}} \frac{1}{u} du \wedge d\bar{u}.$$

Cum $\frac{\partial \alpha_1(u + z, \lambda, \mu)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \alpha_1(u + z, \lambda, \mu)}{\partial \bar{u}}$, putem scrie

$$\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}}(z, \lambda, \mu) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{|u| \geq \varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{u}} \left[\frac{\alpha_1(u + z, \lambda, \mu)}{u} \right] du \wedge d\bar{u}.$$

Aplicînd formula Green-Riemann *), obținem

$$\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}}(z, \lambda, \mu) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|u|=\varepsilon} \frac{\alpha_1(u + z, \lambda, \mu)}{u} du = \alpha_1(z, \lambda, \mu),$$

*) Fie G un domeniu din planul z , limitat de un număr finit de curbe jordanice rectificabile și fie ∂G frontiera lui G , orientată în sens direct relativ la G . Dacă P_k și Q_k , $k = 1, 2$, sînt funcții continue în $\bar{G}$, cu derivate parțiale integrabile pe G , formula Green-Riemann ne dă pentru funcțiile $P = P_1 + iP_2$ și $Q = Q_1 + iQ_2$,

egalitatea $\int_{\partial G} P dx + Q dy = \iint_G (Q_x - P_y) dx dy$, de unde trecînd la operatorii $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ și la diferențialele dz , $d\bar{z}$ și notînd $\Phi = P + iQ$ și $F = P - iQ$

deducem $\int_{\partial G} F dz + \Phi d\bar{z} = \iint_G (\Phi_{\bar{z}} - F_z) dz \wedge d\bar{z}$. Aplicăm această formulă pentru domeniul $G: \{u | \varepsilon < |u| < R\}$, cu R suficient de mare ca cercul $|\zeta - z| = R$ să fie cuprins în $\text{ext } \delta_1$, și pentru funcțiile $F = -\frac{\alpha_1(u + z, \lambda, \mu)}{u}$ și $\Phi = 0$.

deoarece

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} [\alpha_1(z + \varepsilon e^{i\theta}, \lambda, \mu) - \alpha_1(z, \lambda, \mu)] d\theta = 0.$$

Prin urmare, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}} = \alpha$ în $\Delta \times W \times \Omega$.

4) Pentru a demonstra că f este diferențiabilă de clasă C^∞ și holomorfă în λ pe $(\partial\Delta) \times W \times \Omega$ rămâne să arătăm că f are derivate parțiale de orice ordin în raport cu x și cu y în orice punct $(z^0, \lambda, \mu) \in (\partial\Delta) \times W \times \Omega$. În acest scop reluăm transformarea $\zeta - z = u$. Notînd cu $\mathcal{D}$ transformatul dreptunghiului Δ și cu $\mathcal{D}_\varepsilon = \mathcal{D} \cap \{u \mid |u| \geq \varepsilon\}$, folosim aproximarea lui f cu funcțiile

$$f_\varepsilon(z, \lambda, \mu) = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathcal{D}_\varepsilon} \frac{\alpha(u + z, \lambda, \mu)}{u} du \wedge d\bar{u}.$$

Fie D operatorul de derivare parțială în raport cu una dintre variabilele x, y , pe care pentru simplificarea expunerii o vom nota cu τ . Avem

$$Df_\varepsilon(z, \lambda, \mu) = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathcal{D}_\varepsilon} \frac{D\alpha(u + z, \lambda, \mu)}{u} du \wedge d\bar{u}.$$

Cînd $\varepsilon \rightarrow 0$ funcțiile f_ε și Df_ε converg uniform pe un interval închis de variație a lui τ , care cuprinde și valoarea τ corespunzătoare punctului z^0 . Cum $f_\varepsilon \rightarrow f$ pe acest interval rezultă că există Df și că $Df_\varepsilon \rightarrow Df$ ([67], vol. II, cap. XVII, § 8, p. 347). Repetînd raționamentul deducem existența derivatelor parțiale de orice ordin în raport cu x și y în punctul (z^0, λ, μ) ales.

- § 3. Teorema lui Grothendieck despre trivialitatea d'' -coomologiei cubului

1. Lema despre integrala lui Pompeiu ne va permite să demonstrăm în acest paragraf un rezultat deosebit de important datorat lui Grothendieck, cu ajutorul căruia vom obține în § 4 rezolvarea problemei I a lui Cousin pentru cub.

Vom considera forme diferențiale exterioare și operatorul d'' , introdus în cap. I, § 2, nr. 5.

Definiția 1. O formă diferențială ω definită pe un deschis din $\mathbb{C}^n$ se numește d'' -închisă, dacă $d''\omega = 0$. Analog se definesc formele d' -resp. d -închise.

Teorema 1. (Grothendieck) Fie $K = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |x_j| \leq a_j, |y_j| \leq b_j; a_j, b_j > 0, j = 1, \dots, n\}$ un cub închis din $\mathbb{C}^n$ și ω o formă diferențială de tip (p, q) , $q \geq 1$, definită într-o vecinătate a lui K și d'' -închisă. Există o vecinătate U a lui K și o formă diferențială π de tip $(p, q-1)$ definită pe U , astfel încât $d''\pi = \omega$ în U .

1) Vom demonstra mai întâi teorema pentru forme ω de tip $(0, 1)$. În acest scop stabilim prin inducție relativ la numărul întreg $k \geq 0$, următoarea afirmație:

Dacă ω este o formă de tip $(0, 1)$, definită într-o vecinătate a lui K , $d''\omega = 0$ și coeficienții termenilor în $d\bar{z}_{k+1}, \dots, d\bar{z}_n$ din ω sînt nuli, atunci există o funcție f definită într-o vecinătate a lui K , de clasă C^∞ , astfel încât $d''f = \omega$.

Această propoziție este evident adevărată pentru $k = 0$, deoarece dacă $\omega = \sum_{j=1}^n a_j d\bar{z}_j$ are coeficienții $a_j = 0$, putem lua $f = 0$.

Vom presupune propoziția adevărată pentru $k-1$ și o vom demonstra pentru k .

Prin ipoteză, $\omega = \sum_{j=1}^k a_j d\bar{z}_j$ și $d''\omega = 0$, de unde $\frac{\partial a_j}{\partial \bar{z}_l} = 0$, $j = 1, \dots, k, l = k+1, \dots, n^*$). Vom reduce problema la cazul $k-1$, scriind $\omega = \sum_{j=1}^{k-1} a_j d\bar{z}_j + a_k d\bar{z}_k$ și determinind cu ajutorul integralei lui Pompeiu (lema 1 din § 2) o funcție Φ diferențiabilă de clasă C^∞ într-o vecinătate a cubului K , olomorfă în raport cu

*) Într-adevăr, $d''\omega = \sum_{j,l} \frac{\partial a_j}{\partial \bar{z}_l} d\bar{z}_l \wedge d\bar{z}_j$ și pentru $j = 1, \dots, k, l = k+1, \dots, n$, forma $d''\omega$ conține un singur termen în $d\bar{z}_l \wedge d\bar{z}_j$.

variabilele $z_{k+1}, \dots, z_n$ și astfel încît $\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}_k} = a_k^*$). Forma $\omega_1 = \omega - d''\Phi = \sum_{j=1}^{k-1} b_j d\bar{z}_j$, $b_j = a_j - \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}_j}$, satisface ipoteza inducției.

Prin urmare, există o funcție Φ_1 de clasa C^∞ într-o vecinătate a lui K , astfel încît $d''\Phi_1 = \omega_1$. Atunci $\omega = d''f$ cu $f = \Phi + \Phi_1$ într-o vecinătate U a lui K .

Propoziția va fi adevărată și pentru $k = n$. Am obținut deci teorema lui Grothendieck pentru forme de tip $(0,1)$.

2) În cazul formelor de tip (p, q) , $q \geq 1$, p arbitrar, vom demonstra prin inducție relativ la numărul întreg $k \geq 0$, afirmația:

Dacă ω este o formă de tip (p, q) , $q \geq 1$, definită într-o vecinătate a lui K , în care $d''\omega = 0$ și coeficienții termenilor, ce cuprind cel puțin una dintre diferențialele $d\bar{z}_{k+1}, \dots, d\bar{z}_n$, sînt nuli, atunci există o formă π de tip $(p, q-1)$ într-o vecinătate a lui K , cu $d''\pi = \omega$.

Din nou, afirmația este evidentă pentru $k = 0, \dots, q-1$, fiindcă $\omega = 0$ și putem lua $\pi = 0$. O vom presupune adevărată pentru $k-1$, $k \geq q$. Fie

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p, j_1 < \dots < j_q} a_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}.$$

Prin ipoteză $a_{i_1 \dots j_q} = 0$, îndată ce unul dintre indicii $j_1, \dots, j_q \geq k+1$ și deoarece $d''\omega = 0$; toți coeficienții $a_{i_1 \dots j_q}$ sînt funcții olomorfe de $z_{k+1}, \dots, z_n$ în vecinătatea lui K .

Pentru a reduce problema la cazul $k-1$ vom scrie $\omega = d\bar{z}_k \wedge \alpha + \beta$ unde formele α și β , de tip $(p, q-1)$ resp. (p, q) , au coeficienții termenilor ce cuprind diferențialele $d\bar{z}_k, \dots, d\bar{z}_n$ nuli. Cu ajutorul lemei 1 din § 2, formăm o diferențială Φ de tip $(p, q-1)$ într-o vecinătate a lui K , astfel încît $\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}_k} = \alpha$, Φ să fie olomorfă,

*) Rolul variabilelor z ; λ și μ este jucat de z_k ; $z_{k+1}, \dots, z_n$ și $\operatorname{Re} z_1, \dots, \operatorname{Im} z_{k-1}$ respectiv, iar Δ este un dreptunghi, ce include în interior dreptunghiul $\{z_k \in \mathbb{C} \mid |x_k| < a_k, |y_k| \leq b_k\}$.

în $z_{k+1}, \dots, z_n$, iar coeficienții termenilor din Φ , care conțin cel puțin una dintre diferențialele $d\bar{z}_k, \dots, d\bar{z}_n$ să fie nuli. Într-adevăr, dacă

$$\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_p, j_1 < \dots < j_{q-1} < k} b_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_{q-1}} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{q-1}},$$

luăm

$$\Phi = \sum_{i_1 < \dots < i_p, j_1 < \dots < j_{q-1} < k} c_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_{q-1}} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{q-1}},$$

fiecare coeficient $c_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_{q-1}}$ — funcție de clasă C^∞ într-o vecinătate a lui K , olomorfă în $z_{k+1}, \dots, z_n$ și satisfăcând ecuația

$$\frac{\partial c_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_{q-1}}}{\partial \bar{z}_k} = b_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_{q-1}}$$

— fiind dat de integrala lui Pompeiu.

Forma $\omega_1 = \omega - d''\Phi = \beta - \sum_{j=1}^{k-1} d\bar{z}_j \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}_j}$ satisface ipotezele inducției. Există deci o formă diferențială Φ_1 de tip $(p, q-1)$, astfel încît $\omega_1 = d''\Phi_1$ într-o vecinătate a lui K , iar forma $\pi = \Phi + \Phi_1$, pentru care $d''\pi = \omega$ într-o vecinătate convenabilă U a lui K , demonstrează că afirmația auxiliară este adevărată pentru orice k . În cazul $k = n$, această afirmație constituie însă tocmai teorema lui Grothendieck.

Observația 1. Printr-un proces de trecere la limită teorema lui Grothendieck se demonstrează pentru cuburi și poldiscuri deschise. Ea se va obține însă din teoria varietăților Stein (cap. VI, § 1, ex. 1).

2. Teorema lui Grothendieck se mai numește și *teorema de trivialitate a d'' -coomologiei cubului*, deoarece admite următoarea interpretare:

În cap. I, § 2, nr. 5, am văzut că formele diferențiale exterioare de tip (p, q) , p și $q \geq 0$, într-un deschis $D \subset \mathbb{C}^n$ formează un

$\mathcal{C}^\infty(D)$ -modul notat $\mathcal{E}^{(p,q)}(D)$. Pentru fiecare p fixat, operatorul complex d'' definește un complex de grupuri abeliene

$$0 \rightarrow \mathcal{O}^{(p,0)} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{E}^{(p,0)} \xrightarrow{d''_{(p,0)}} \mathcal{E}^{(p,1)} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{E}^{(p,q)} \xrightarrow{d''_{(p,q)}} \mathcal{E}^{(p,q+1)} \rightarrow \quad (1)$$

unde pentru simplificarea scrierii am notat $\mathcal{E}^{(p,q)}$ în loc de $\mathcal{E}^{(p,q)}(D)$, iar $\mathcal{O}^{(p,0)} = \mathcal{O}^{(p,0)}(D) = \ker d''_{(p,0)}$, ε fiind aplicația de incluziune.

Definiția 2. Se numește formă *diferențială olomorfă* o formă diferențială de tip $(p, 0)$ și d'' -închisă.

Ținând seama de propoziția 4 din cap. I, § 4, nr. 3, funcțiile olomorfe sînt forme diferențiale olomorfe de tip $(0,0)$, iar condiția necesară și suficientă pentru ca o formă diferențială de tip $(p, 0)$ să fie olomorfă este ca toți coeficienții acestei forme să fie funcții olomorfe.

Evident $\mathcal{O}^{(p,0)}(D)$ este grupul formelor olomorfe de tip $(p, 0)$ peste D și formează un $\mathcal{O}(D)$ -modul, iar $\mathcal{O}^{(0,0)}(D) = \mathcal{O}(D)$.

Complexului (1) îi corespund *grupurile de d'' -coomologie* ale lui D relativ la p

$$H^q(D; d'', p) = \ker d''_{(p,q)} / \operatorname{im} d''_{(p,q-1)}, \quad q \geq 1$$

și

$$H^0(D; d'', p) = \mathcal{O}^{(p,0)}(D).$$

Definiția 3. O formă diferențială exterioară d'' -închisă se numește și d'' -cociclu, iar o formă diferențială de tip (p, q) , care este d'' -imaginea unei forme diferențiale de tip $(p, q-1)$ se numește d'' -exactă sau d'' -cofrontieră. Denumiri analoge se folosesc în cazul operatorilor d' și d .

Grupul d'' -cociclenilor de tip (p, q) pe D este $Z^q(D; d'', p) = \ker d''_{(p,q)}$, iar grupul d'' -cofrontierelor de tip $(p, q-1)$ este $B^q(D; d'', p) = \operatorname{im} d''_{(p,q-1)}$.

În cazul unui închis $K \subset \mathbb{C}^n$ (în particular în cazul cubului), vom considera mulțimea vecinătăților D ale lui K , care formează sistem filtrant inductiv față de relația de incluziune și, folosind operația de restricție a formelor diferențiale exterioare, vom defini

prin trecere la limită inductivă *grupurile de d'' -coomologie ale lui K*

$$H^q(K; d'', p) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ D}} H^q(D; d'', p). \quad (3)$$

Teorema lui Grothendieck arată că în cazul cubului K oricare ar fi d'' -cociclul $\omega^{(p, q)}$, $q \geq 1$, $p \geq 0$, definit pe o vecinătate a lui K , restricția sa la o vecinătate convenabilă a lui K este o d'' -cofrontieră. Prin urmare, teorema lui Grothendieck se enunță sub forma echivalentă:

Teorema 1' (*Trivialitatea d'' -coomologiei cubului.*) *Oricare ar fi $p \geq 0$ și $q \geq 1$, grupul de d'' -coomologie al unui cub K , $H^q(K; d'', p) = 0$.*

Teorema lui Grothendieck constituie un analog complex al teoremei lui Poincaré de trivialitate a d -coomologiei lui $\mathbb{R}^n$ sau a unei bile din $\mathbb{R}^n$:

Teorema 2 (*Poincaré.*) *Dacă B este o bilă deschisă din $\mathbb{R}^n$, eventual $B = \mathbb{R}^n$, și ω este o formă diferențială exterioară de grad p în B și d -închisă, atunci există o formă π de grad $p - 1$ în B , astfel încât $\omega = d\pi$ ([84], p. 270).*

§ 4. Problema I-a a lui Cousin generalizată în cazul cubului

În acest paragraf vom demonstra

Teorema 1. *Problema I a lui Cousin este rezolvabilă în cazul cubului.*

Fie $K = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |x_h| \leq a_h, |y_h| \leq b_h, a_h \text{ și } b_h > 0, h = 1, \dots, n\}$ un cub închis din $\mathbb{C}^n$ și $\{\Omega_i, c_{ij}\}_I$ un sistem de date pentru problema I Cousin generalizată, unde $\bigcup_{i \in I} \Omega_i \supset K$. Există o vecinătate U a lui K și pentru fiecare $i \in I$ o funcție $c_i \in \mathcal{O}(U \cap \Omega_i)$, astfel încât $c_i - c_j = c_{ij}$ pe $U \cap \Omega_{ij}$, ori de câte ori $U \cap \Omega_{ij} \neq \emptyset^*$.

*) Problemele lui Cousin în cazul unui închis se formulează relativ la vecinătatea sa.

1) Să analizăm mai întâi cazul unei acoperiri $\{\Omega_i\}_{i \in I}$ finite. Fie $\{\mu_i\}_{i \in I}$ o partiție a unității subordonată acoperirii $\{\Omega_i\}_{i \in I}$ a unei vecinătăți U^* a lui K : presupunem $\mu_i \in \mathcal{C}^\infty(\bigcup_{i \in I} \Omega_i)$ cu valori în intervalul $[0, 1]$, cu suportul închis în Ω_i și $\sum_i \mu_i = 1$ pe U^* , (cap. III, § 1, nr. 4, teorema 2).

1.1) *O soluție a problemei I a lui Cousin generalizată în clasa C^∞ :* Definim funcțiile de clasă C^∞ în $\Omega_i \cap U^*$ (presupus $\neq \emptyset$)

$$\gamma_i = \sum_{j \neq i} \mu_j c_{ij}, \quad (1)$$

unde pentru $z^0 \in (\Omega_i \cap U^*) - \Omega_i$ luăm $\mu_j(z^0) c_{ij}(z^0) = 0$, deoarece $\mu_j(z) = 0$ într-o vecinătate a lui z^0 . În $U^* \cap \Omega_{ij} \neq \emptyset$ avem

$$\gamma_i - \gamma_j = \sum_{k \neq i, j} \mu_k (c_{ik} - c_{jk}) + \mu_j c_{ij} - \mu_i c_{ji} = \sum_k \mu_k c_{ij} = c_{ij}, \quad (2)$$

prin urmare funcțiile γ_i constituie o soluție a problemei în clasa C^∞ .

1.2) *Soluția problemei I a lui Cousin generalizate:* În U^* putem defini o formă diferențială α de tip $(0,1)$ punînd

$$\alpha = d'' \gamma_i \quad (3)$$

în $U^* \cap \Omega_i$ deoarece din relația (2) deducem că $d'' \gamma_i = d'' \gamma_j$ în $U^* \cap \Omega_{ij} \neq \emptyset$. Prin construcție, $d'' \alpha = 0$. Teorema lui Grothendieck din § 3 ne asigură existența unei funcții $\beta \in \mathcal{C}^\infty(U)$, unde U este o vecinătate a lui K inclusă în U^* , astfel încît

$$\alpha = d'' \beta. \quad (4)$$

Din (3) și (4) rezultă că în $U \cap \Omega_i$ (presupus $\neq \emptyset$) funcția

$$c_i = \gamma_i - \beta$$

este olomorfă. Totodată (2) implică $c_i - c_j = c_{ij}$ în $U \cap \Omega_{ij} \neq \emptyset$, deci funcțiile c_i rezolvă problema propusă.

2) În cazul cînd acoperirea $\{\Omega_i\}_{i \in I}$ a lui K nu este finită, putem extrage din ea o acoperire finită a lui K , pe care o vom nota $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ schimbînd convenabil indicii. Fie $I_0 = \{1, \dots, N\}$. Problema I a lui Cousin generalizată, cu datele $\{\Omega_i, c_{ij}\}_{i \in I_0}$ admite după punctul 1) o soluție: $c_i \in \mathcal{O}(\Omega_i \cap U)$, $i \in I_0$. Vom lua pentru fiecare $j \in I - I_0$,

$$c_j = c_{ji} + c_i \quad (5)$$

în $U \cap \Omega_{ij} \neq \emptyset$, $i \in I_0$. Funcția c_j este bine determinată în $U \cap \Omega_j$. Într-adevăr, $U \cap \Omega_j \subset \bigcup_{i \in I_0} \Omega_i$ și dacă $z \in U \cap \Omega_{jih}$, $i, h \in I_0$, atunci $c_{ji} + c_i = c_{jh} + c_h$ fiindcă $c_i - c_h = c_{ih}$. Totodată se verifică ușor că, oricare ar fi indicii j și l din I , $c_j - c_l = c_{jl}$ în $\Omega_{jl} \neq \emptyset$. Am obținut deci o soluție a problemei cu datele $\{\Omega_i, c_{ij}\}_{i \in I}$.*)

§ 5. Teoreme de aproximare

1. Pentru a rezolva problema a II-a a lui Cousin în cazul cubului, vom stabili în §§ 5—8 o serie de teoreme, care prezintă numeroase aplicații. Începem prin a generaliza teorema lui Runge, unul dintre rezultatele fundamentale ale teoriei aproximării funcțiilor analitice. Această teoremă arată că o funcție olomorfă într-un domeniu Ω din planul $\mathbb{C}$ poate fi aproximată uniform pe orice compact din Ω cu funcții raționale, care nu au poli în Ω , simpla conexiune a lui Ω fiind necesară și suficientă pentru aproximarea cu polinoame ([7], p. 245 și 563).

Vom stabili mai întîi, adaptînd convenabil procedeul clasic, următoarea generalizare a teoremei lui Runge:

Teorema 1. *Fie A un compact simplu conex**) din planul variabilei z , B un compact din $\mathbb{C}^p$ și C un compact din $\mathbb{R}^q$. Notăm cu $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ resp. $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_q)$ un punct variabil din spațiul*

*) Procedeul (1.1) a fost aplicat într-o formă generală pe spații paracompacte pentru a demonstra teorema 14 din cap. II, § 8, nr. 4.

**) Un compact $A \subset \mathbb{C}$ este simplu conex dacă $\mathbb{C} - A$ este conex.

$\mathbb{C}^p$ resp. $\mathbb{R}^q$. Fie $K = A \times B \times C$ din $\mathbb{C}^{1+p} \times \mathbb{R}$. Orice funcție complexă f definită într-o vecinătate a lui K , diferențiabilă de clasă C^∞ în raport cu toate variabilele z, λ, μ și olomorfă în variabilele z și λ , se poate aproxima uniform pe K prin pseudopolinoame în variabila z cu coeficienți funcții diferențiabile de clasă C^∞ în λ și μ , olomorfe în λ într-o vecinătate a lui $B \times C$.*)

Fie U, V și W —vecinătăți ale lui A, B resp. C , astfel încît pe $U \times V \times W$ funcția f să fie diferențiabilă de clasă C^∞ , iar pentru μ fixat în W funcția f să fie olomorfă de z și λ pe $U \times V$. Alegem în U o curbă Jordan rectificabilă Γ , al cărei interior Δ include pe A și este inclus în U . Oricare ar fi punctul $(z, \lambda, \mu) \in \Delta \times V \times W$, avem

$$f(z, \lambda, \mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta, \lambda, \mu)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (1)$$

Vom exprima acum integrala (1) cu sumele Riemann. Dacă Γ este definită prin aplicația continuă $z = z(t)$, $t \in [0, 1]$, fie $\{t_j\}$, $j = 0, 1, \dots, N$, o diviziune a intervalului $[0, 1]$ de normă δ și $\zeta_j = z(t_j)$, $\zeta_0 = \zeta_N$. Suma corespunzătoare acestei diviziuni este

$$S(z, \lambda, \mu) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{f(\zeta_j, \lambda, \mu)}{\zeta_j - z} (\zeta_{j+1} - \zeta_j) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{f_j(\lambda, \mu)}{\zeta_j - z}, \quad (2)$$

unde $f_j(\lambda, \mu)$ sînt funcții diferențiabile de clasă C^∞ pe $V \times W$, olomorfe în λ pe V pentru μ fixat în W .

Considerînd un șir de diviziuni $\{t_j^{(n)}\}$ de normă $\delta^{(n)} \rightarrow 0$, sumele $S^{(n)}$ aproximează uniform pe K funcția f , ([81], vol. I, cap. III, III).

Rămîne să arătăm**) că $\frac{1}{\zeta - z}$, unde $z \in A$, iar ζ este un punct

*) Enunțul teoremei 1 se simplifică în cazul $q = 0$: f este olomorfă într-o vecinătate a lui $K = A \times B \subset \mathbb{C}^{1+p}$ și se aproximează uniform pe K prin pseudopolinoame în variabila z cu coeficienți olomorfi într-o vecinătate a lui B .

**) În cursul acestei demonstrații folosim mereu observația: Dacă un șir de funcții f_n , $n = 1, 2, \dots$ aproximează uniform funcția f și dacă pentru fiecare n șirul f_{nv} , $v = 1, 2, \dots$ aproximează uniform pe f_n , există un șir f_{nv_n} , care aproximează uniform pe f .

fixat arbitrar în $\mathbb{C} - A$, se aproximează uniform pe A cu polinoame în z .

Fie Λ un drum continuu din $\mathbb{C} - A$ definit de aplicația continuă $Z = g(t)$, $t \in [0, 1]$, avînd originea $\zeta = g(0)$ și extremitatea $\zeta^* = g(1)$ cu $|\zeta^*| > r_0 = \max_{z \in A} |z|$.

Să notăm cu M mulțimea punctelor $Z \in \Lambda$ cu proprietatea că $\frac{1}{Z-z}$ este limită uniformă pe A de polinoame în z . Mulțimea M este nevidă, deoarece oricare ar fi Z cu $|Z| > r_0$, avem

$$\frac{1}{Z-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{Z^{n+1}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{z^n}{Z^{n+1}}$$

uniform pentru $z \in A$. Mulțimea M este închisă: Într-adevăr, dacă $Z_n \in M$ și $Z_n \rightarrow Z_0$, atunci $\frac{1}{Z_0-z} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{Z_n-z}$ uniform pe A , iar

$\frac{1}{Z_n-z}$ este limită uniformă pe A de polinoame în z . Mulțimea M este deschisă relativ la Λ : Fie $Z_0 \in M$ și $r < d(Z_0, A)$. Pentru $|Z - Z_0| < r$, avem $\frac{1}{Z-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Z_0-Z)^n}{(Z_0-z)^{n+1}}$ uniform pe A , prin urmare $\frac{1}{Z-z}$ se aproximează uniform pe A cu polinoame în

$\frac{1}{Z_0-z}$ și cum $\frac{1}{Z_0-z}$ se aproximează uniform pe A cu polinoame în z , rezultă că $M \supset \{Z \in \Lambda \mid |Z - Z_0| < r\}$. În concluzie $M = \Lambda$ și $\frac{1}{\zeta-z}$ se aproximează uniform pe A cu polinoame în z .

Observația 1. Dacă f este dată pe $U \times V \times W$, pseudopolinoamele în z cu care aproximăm f au coeficienți funcții diferențiabile de clasă C^∞ pe $\bar{V} \times W$, olomorfe pe V pentru μ fixat în W .

2. Definiția 1. Vom numi *polidomeniu simplu conex* un domeniu $D = D_1 \times \dots \times D_n \subset \mathbb{C}^n$, unde D_j este un domeniu simplu conex din plan oricare ar fi $j = 1, 2, \dots, n$.

Cu ajutorul teoremei 1 obținem o generalizare mai profundă a teoremei lui Runge:

Teorema 2. Fie $D = D_1 \times \dots \times D_n$ un polidomeniu simplu conex din $\mathbb{C}^n$ și W un deschis din $\mathbb{R}^q$. Notăm cu $z = (z_1, \dots, z_n)$ un punct arbitrar din $\mathbb{C}^n$ și cu $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_q)$ un punct arbitrar din $\mathbb{R}^q$. Orice funcție $f: D \times W \rightarrow \mathbb{C}$, diferențiabilă de clasă C^∞ pe $D \times W$ și olomorfă în raport cu z (pentru μ fixat), se aproximează uniform pe orice compact K din $D \times W$ prin pseudopolinoame în z cu coeficienți funcții diferențiabile de clasă C^∞ pe W .

Vom demonstra teorema 2 prin inducție relativ la numărul variabilelor complexe.

În cazul $n = 1$, teorema 2 rezultă din teorema 1 luând $K = K_1 \times C$, cu K_1 un compact simplu conex din D_1 și C un compact din W ,*) ($K_1 = A$, $p = 0$).

Vom presupune teorema 2 adevărată pentru $n - 1$ variabile complexe și q variabile reale. Fie $K = K_1 \times \dots \times K_n \times C$ cu K_j compact simplu conex din D_j ($j = 1, \dots, n$) și C compact din W .

Aplicăm teorema 1 pentru $A = K_1$ și $B = K_2 \times \dots \times K_n$. Oricare ar fi numărul $\varepsilon > 0$, există un pseudopolinom în z_1 cu coeficienți funcții diferențiabile de clasă C^∞ pe $D_2 \times \dots \times D_n \times W$ și olomorfe pe $D_2 \times \dots \times D_n$ pentru μ fixat în W , $F(z, \mu) = \sum_{j=0}^N f_j(z_2, \dots, z_n, \mu) z_1^j$, astfel încît $\|f - F\|_K < \varepsilon/2$.

Conform ipotezei inducției aplicate fiecărei funcții f_j , pentru orice $\varepsilon_0 > 0$ există un pseudopolinom P_j în $z_2, \dots, z_n$ cu coeficienți diferențiabili de clasă C^∞ în W , astfel încît $\|f_j - P_j\|_{K_2 \times \dots \times K_n \times C} < \varepsilon_0$.

Fie $P(z, \mu) = \sum_{j=0}^N P_j(z_2, \dots, z_n, \mu) z_1^j$. Atunci $\|f - P\|_K \leq \varepsilon/2 + \varepsilon_0 \sum_{j=0}^N \|z_1\|_{K_1}^j$. Dacă $k = \max(1, \|z_1\|_{K_1})$ și ε_0 este ales astfel încît $\varepsilon_0(N+1)k^N < \varepsilon/2$, deducem $\|f - P\|_K < \varepsilon$, ceea ce demonstrează teorema.

*) Acest procedeu va fi folosit și mai jos pentru cazul general n . El nu constituie o limitare: Dat un compact $K \subset D \times W$, fie $\tilde{K}_j = \text{pr}_j K \subset D_j$ și $\hat{K}_j$ un compact simplu conex, astfel încît $\tilde{K}_j \subset \hat{K}_j \subset D_j$, $j = 1, \dots, n$; fie C proiecția lui K în W . Cum $K \subset \hat{K} = \hat{K}_1 \times \dots \times \hat{K}_n \times C$, dacă teorema 2 este adevărată pentru $\hat{K}$, ea rezultă și pentru K .

În încheiere dăm și enunțul acestei teoreme în cazul $q = 0$.

Teorema 2'. Dacă $D = D_1 \times \dots \times D_n$ este un polidomeniu simplu conex din $\mathbb{C}^n$, atunci polinoamele formează o submulțime densă în $O(D)$ (i. e. oricare ar fi funcția $f \in O(D)$, compactul $K \subset D$ și numărul $\varepsilon > 0$, există un polinom P , astfel încît $\|f - P\|_K < \varepsilon$).

§ 6. Funcții matriciale

Vom considera aplicații definite pe diferite spații X cu valori în $\mathbb{C}$ -algebra matricilor $M(m, \mathbb{C})$ (cap. II, § 10, nr. 1). În general vom numi aceste aplicații *funcții matriciale*, iar atunci cînd prescurtarea nu conduce la nici o ambiguitate, *matrici* (de exemplu în loc de funcție matricială olomorfă, vom scrie matrice olomorfă).

1. Începem prin a studia cîteva aplicații $M(m, \mathbb{C}) \rightarrow M(m, \mathbb{C})$.

Definiția 1. Numim *funcție matricială exponențială* aplicația

$$\exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n, \quad A \in M(m, \mathbb{C}). \quad (1)$$

Această definiție este justificată de convergența în normă a seriei (1): Dacă $\|A\| = a$, atunci $\left\| \frac{1}{n!} A^n \right\| \leq \frac{a^n}{n!}$.

Componentele matricii $\exp A$ sînt funcții olomorfe de componentele a_{hk} ale lui A : Într-adevăr, fie $\|A\| \leq a_0$. Sumele $S_N = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} A^n = (s_{hk}^N)$ au drept componente s_{hk}^N polinoame în a_{ij} , $i, j = 1, \dots, m$. Cum șirul $\{s_{hk}^N\}_{N \in \mathbb{N}}$ converge uniform pentru $\|A\| \leq a_0$, limita sa va fi o funcție olomorfă de a_{ij} (conform teoremei lui Weierstrass, cap. I, § 6, nr. 2, aplicată în spațiul $\mathbb{C}^m$ al componentelor a_{ij}).

Definiția 2. Numim *funcție matricială logaritmică* funcția definită pentru matricile $A \in M(m, \mathbb{C})$, pentru care $\|\mathfrak{I} - A\| < 1$,

prin egalitatea

$$\log A = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\mathfrak{I} - A)^n, \quad (2)$$

unde $\mathfrak{I} = (\delta_{hk})$ este matricea unitate.

Definiția 2 are sens, deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} A^n$ converge în normă pentru $\|A\| < 1$.

Componentele matricii $\log A$ sînt funcții olomorfe de componentele a_{hk} ale lui A .

Se verifică imediat *) relațiile

$$\exp A \cdot \exp (-A) = \mathfrak{I} \quad (3)$$

oricare ar fi $A \in M(m, \mathbb{C})$ și

$$\exp \log A = A \quad (4)$$

dacă $\|\mathfrak{I} - A\| < 1$.

Din (4) rezultă că pentru orice matrice A cu $\|\mathfrak{I} - A\| < 1$, notînd $B = \log A$ avem $\exp B = A$.

Fie $GL(m, \mathbb{C})$ grupul liniar general al matricilor nesingulare din $M(m, \mathbb{C})$ (cap. II, § 10, nr. 1). Relațiile (3) și (4) implică pentru orice $A \in M(m, \mathbb{C})$

1° $\exp A \in GL(m, \mathbb{C})$ resp.

2° dacă $\|\mathfrak{I} - A\| < 1$, $A \in GL(m, \mathbb{C})$.

În cele ce urmează vom folosi

Observația 1. Există o constantă $P > 0$, astfel încît oricare ar fi matricile A și B din $M(m, \mathbb{C})$ cu $\|A\| \leq \frac{1}{2}$ și $\|B\| \leq \frac{1}{2}$, matricea C definită prin egalitatea

$$(\mathfrak{I} + A)(\mathfrak{I} + C)(\mathfrak{I} + B) = \mathfrak{I} + A + B \quad (5)$$

*) Se poate folosi calculul cu serii de puteri formale, ținînd seama că matricile $\mathfrak{I}$ și A^n comută între ele. Pentru relația (4) se va nota $\mathfrak{I} - A = \tilde{A}$ și verifica egalitatea $\exp \log (\mathfrak{I} - \tilde{A}) = \mathfrak{I} - \tilde{A}$, pentru $\|\tilde{A}\| < 1$.

să verifice inegalitatea

$$\|C\| \leq P \|A\| \|B\|. \quad (6)$$

Intr-adevăr, matricile $\mathfrak{F} + A$ și $\mathfrak{F} + B$ fiind nesingulare, din (5) deducem

$$\begin{aligned} C &= (\mathfrak{F} + A)^{-1} [(\mathfrak{F} + A + B) - (\mathfrak{F} + A)(\mathfrak{F} + B)] (\mathfrak{F} + B)^{-1} = \\ &= (\mathfrak{F} + A)^{-1} (-AB)(\mathfrak{F} + B)^{-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Aplicația care asociază fiecărei matrici $A \in M(m, \mathbb{C})$ cu $\|A\| < 1$ matricea $(\mathfrak{F} + A)^{-1}$ este continuă, deci mărginită pe compactul $\|A\| \leq \frac{1}{2}$ din $M(m, \mathbb{C})$. Notind cu $\sqrt{P} = \sup_{\|A\| \leq 1/2} \|(\mathfrak{F} + A)^{-1}\|$, relația (7) implică (6).

2. Fie X un spațiu topologic.

Definiția 3. Numim *funcție matricială (matrice) continuă* resp. *continuă nesingulară* pe X o aplicație continuă a lui X în $M(m, \mathbb{C})$, resp. în $GL(m, \mathbb{C})$ și notăm cu $\mathcal{C}(X; M(m, \mathbb{C}))$ resp. $\mathcal{C}(X; GL(m, \mathbb{C}))$ mulțimea acestor aplicații.

$\mathcal{C}(X; M(m, \mathbb{C}))$ se organizează în mod natural ca o $\mathbb{C}$ -algebră, iar $\mathcal{C}(X; GL(m, \mathbb{C}))$ formează un subgrup multiplicativ al ei, având ca element neutru aplicația constantă $\mathfrak{F}$.

Fie $X = V$ o varietate analitică complexă și F o funcție matricială pe V . Ea determină m^2 funcții complexe f_{hk} pe V , pe care le vom numi componentele lui F : dacă $p \in V$, atunci $F(p) = (f_{hk}(p))$.

Definiția 4. Numim *funcție matricială (matrice) olomorfă* resp. *olomorfă nesingulară* pe V o aplicație $F: V \rightarrow M(m, \mathbb{C})$ resp. $V \rightarrow GL(m, \mathbb{C})$ de componente f_{hk} olomorfe pe V și notăm mulțimile acestor funcții $\mathcal{O}(V; M(m, \mathbb{C}))$ resp. $\mathcal{O}(V; GL(m, \mathbb{C}))$. *)

$\mathcal{O}(V; M(m, \mathbb{C}))$ formează o $\mathcal{O}(V)$ -algebră, iar $\mathcal{O}(V; GL(m, \mathbb{C}))$ un subgrup multiplicativ.

*) Definiția corespunde organizării lui $M(m, \mathbb{C})$ ca varietate analitică izomorfă cu $\mathbb{C}^{m^2}$, prin bijectia Θ (cap. II, §10, nr. 1).

Analog se pot defini pe o varietate diferențiabilă funcțiile matriciale diferențiabile resp. diferențiabile nesarabile de o anumită clasă.

În general, K fiind un compact din spațiul topologic X și F o matrice din $\mathcal{O}(X; M(m, \mathbb{C}))$ vom nota

$$\|F\|_K = \sup_{p \in K} \|F(p)\|. \quad (8)$$

Dacă V este o varietate analitică conexă, pentru fiecare compact $K \subset V$ cu $K \neq \emptyset$, putem defini o normă pe $\mathcal{O}(V; M(m, \mathbb{C}))$ punind

$$\|F\| = \|F\|_K. \quad (9)$$

Într-adevăr conform principiului prelungirii analitice (cap. III, § 1, nr. 5), din $\|F\| = 0$ rezultă $F = 0$. Se verifică imediat că $\mathcal{O}(V; M(m, \mathbb{C}))$ devine o algebră normată și în topologia indusă, $\mathcal{O}(V; GL(m, \mathbb{C}))$ formează un grup topologic.

3. Având în vedere stabilirea unor teoreme de aproximare, vom presupune $V = D$ un *polidomeniu simplu conex* din $\mathbb{C}^n$ și vom nota pentru prescurtare $\mathfrak{M} = \mathcal{O}(D; M(m, \mathbb{C}))$ și $\mathfrak{G} = \mathcal{O}(D; GL(m, \mathbb{C}))$.

Propoziția 1. $\mathfrak{G}$ este un grup topologic conex.

Demonstrația se bazează pe observația că matricile constante din $\mathfrak{G}$ formează un subgrup topologic izomorf cu $GL(m, \mathbb{C})$, care este conex (teorema 1 din cap. II, § 10, nr. 1). Pentru fiecare $F \in \mathfrak{G}$ vom construi însă un drum continuu pe $\mathfrak{G}$, de parametru $t \in [0, 1]$, care unește F cu funcția matricială constantă $F(z_0)$, unde z_0 este un punct din D .

După teorema lui Riemann de reprezentare conformă putem forma un izomorfism analitic f al lui D pe un polidisc $U_R(0)$ din $\mathbb{C}^n$. Într-adevăr, $D = D_1 \times \dots \times D_n$ cu D_j domeniu simplu conex din planul z_j . Dacă f_j este o reprezentare conformă a lui D_j pe $|Z_j| < R_j$, $0 < R_j \leq +\infty$, $j = 1, \dots, n$, putem lua izomorfismul analitic $f: D \rightarrow U_R(0)$ de componente f_j . Printr-o omotetie: $Z \rightarrow tZ$, $t \in [0, 1]$, polidiscul $U_R(0)$ se deformează în origine, iar prin aplicația $\Phi: D \times [0, 1] \rightarrow D$, definită de egalitatea $\Phi(z, t) = f^{-1}[tf(z)]$, D este deformat continuu în punctul $z_0 = f^{-1}(0)$. Pentru fiecare

$t \in [0, 1]$, notăm $F_t(z) = F[\Phi(z, t)]$. Evident $F_t \in \mathfrak{G}$, iar aplicația $t \rightarrow F_t$ ne dă un drum continuu pe $\mathfrak{G}$, care unește $F(z_0)$ cu F .

Am demonstrat propoziția 1, deoarece astfel vom putea aplica lui $\mathfrak{G}$

Propoziția 2. *Un grup topologic conex este generat de orice vecinătate a elementului său neutru.*

Fie G un grup topologic conex, e elementul neutru și U o vecinătate deschisă a lui e . Vom arăta că $G = \bigcup_{v=1}^{\infty} U^v$, unde pentru două submulțimi A și B din G , notăm cu $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$. Mulțimea $\bigcup_v U^v$ este nevidă și deschisă. Va fi suficient să arătăm că este și închisă. Fie $a \in \overline{\bigcup_v U^v}$. Atunci orice vecinătate a lui a intersectează $\bigcup_v U^v$. Să alegem vecinătatea aU . Există deci un element $b \in aU \cap (\bigcup_v U^v)$ și un indice v , astfel încît $b \in U^v$. Atunci $b = au_0 = u_1 u_2 \dots u_v$ cu $u_j \in U$, $j = 0, \dots, v$, ceea ce arată că $a \in U^{v+1}$.

Propoziția 3. *Dacă $F \in \mathfrak{G}$, oricare ar fi compactul $K \subset D$, există un număr finit de matrici $F_1, \dots, F_N \in \mathfrak{G}$, astfel încît $F = F_1 \dots F_N$ pe D și $\|F_j - \mathfrak{F}\|_K < 1$, $j = 1, \dots, N$.*

Intr-adevăr, fie K^* un compact din D cu $K^* \neq \emptyset$ și $K \subset K^*$. Topologizăm $\mathfrak{G}$ conform relației (9) aplicată lui K^* , i. e. $\|F\| = \|F\|_{K^*}$. Din propozițiile 1 și 2 rezultă că $\mathfrak{G}$ este generat de vecinătatea elementului său neutru $\mathfrak{F}$ dată de $\{\tilde{F} \in \mathfrak{G} \mid \|\tilde{F} - \mathfrak{F}\| < 1\}$. Prin urmare există un număr finit de funcții matriciale $F_j \in \mathfrak{G}$, $j = 1, \dots, N$, astfel încît $\|F_j - \mathfrak{F}\| < 1$ și $F = F_1 \dots F_N$. Însă $\|F_j - \mathfrak{F}\| < 1$ implică $\|F_j - \mathfrak{F}\|_K < 1$.

4. După această pregătire putem stabili unele rezultate privind aproximarea funcțiilor matriciale din $\mathfrak{M}$ și $\mathfrak{G}$.

Aplicînd teorema lui Runge (teorema 2', §5, nr. 2) fiecărei componente a unei funcții matriciale din $\mathfrak{M}$ și ținînd seama de inegalitățile (2), cap. II, §10, deducem imediat

Teorema 1. *Dacă $F \in \mathfrak{M}$, oricare ar fi compactul $K \subset D$ și numărul $\varepsilon > 0$, există o matrice polinomială P (i. e. o matrice*

ale cărei componente p_{hk} sînt polinoame în z), astfel încît $\|F - P\|_K < \varepsilon$.

Vom avea însă nevoie să aproximăm funcții matriciale olomorfe nesingulare cu funcții matriciale de același fel și în acest scop vom demonstra

Teorema 2 (Teorema de aproximare.) Oricare ar fi $F \in \mathfrak{G}$, compactul $K \subset D$ și numărul $\varepsilon > 0$, există o matrice G nesingulară olomorfă pe C^n , astfel încît $\|F - G\|_K < \varepsilon$.

Conform propoziției 3, există matricile $F_j \in \mathfrak{G}$, $j = 1, \dots, N$, astfel încît $F = F_1 \dots F_N$ și $\|F_j - \mathfrak{F}\|_K < 1$. După 2°, nr. 1, ultima relație asigură existența funcției matriciale $H_j = \log F_j$, care aparține lui $\mathfrak{M}$, deoarece fiecare componentă a ei este funcție olomorfă de componentele lui F_j . Teorema 1 arată că pentru orice $\eta > 0$ și pentru fiecare indice j , există o matrice P_j polinomială în z , astfel încît $\|H_j - P_j\|_K < \eta$. Vom nota cu $G_j = \exp P_j$ și cu $G = G_1 \dots G_N$. Conform 1°, nr. 1, matricile G_j sînt nesingulare. Deoarece fiecare componentă a lui G_j este o funcție olomorfă de componentele lui P_j , matricea G_j este olomorfă pe C^n . Datorită continuității aplicației exponențiale, dacă η este suficient de mic, $\|F_j - G_j\|_K < \varepsilon_0$, unde $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ va fi ales în cele ce urmează. Fie $M > 0$ un număr, astfel încît $\|F_j\|_K < M - 1$, deci atît $\|F_j\|_K$ cît și $\|G_j\|_K$ să fie majorat de M . Putem scrie

$$\begin{aligned} \|F - G\|_K &\leq \|F_1 \dots F_{N-1} F_N - F_1 \dots F_{N-1} G_N\|_K + \\ &+ \|F_1 \dots F_{N-2} F_{N-1} G_N - F_1 \dots F_{N-2} G_{N-1} G_N\|_K + \dots \\ &\dots + \|F_1 G_2 \dots G_N - G_1 G_2 \dots G_N\|_K < NM^{N-1} \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Luînd $\varepsilon_0 < \varepsilon / NM^{N-1}$ și η corespunzător, obținem succesiv P_j , G_j și G . Funcția matricială G satisface condițiilor cerute în enunț.

Observația 2. În legătură cu diferite aplicații, teorema 1 se extinde pentru funcții matriciale F definite pe $D \times W$ — cu W un deschis din $\mathbb{R}^q$ — funcții diferentiabile de clasă C^∞ pe $D \times W$ și olomorfe pe D pentru $\mu \in W$ arbitrar, dar fixat. Propozițiile de la nr. 3 și teorema 2 se transpun și ele ușor, dacă presupunem că pentru orice compact $K^* \subset D$, $\|F\|_{K^* \times W} < +\infty$ (pentru a putea defini o topologie pe mulțimea acestor funcții matriciale) și că W admite o deformare continuă $\Psi: W \times [0, 1] \rightarrow W$, $\Psi(\mu, 0) = \mu_0 \in W$,

$\Psi(\mu, 1) = \mu$, $\Psi(\mu, t)$ —funcție de clasă C^∞ pe W pentru t fixat arbitrar în $[0, 1]$ (de exemplu, dacă W este un interval deschis q -dimensional din $\mathbb{R}^q$).

5. Dăm acum un alt rezultat auxiliar, care se referă la produse infinite de funcții matriciale. Vom relua $\mathfrak{M}$ și $\mathfrak{G}$ de mai sus cu deosebirea că în acest caz D poate fi un *deschis oarecare din $\mathbb{C}^n$* .

Propoziția 4. Fie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ o serie convergentă de numere pozitive, iar $\{F_k\}_k$ un șir de matrici din $\mathfrak{M}$, astfel încît $\|F_k\|_D < a_k$, $k = 1, 2, \dots$

1) Șirul $P_h = \prod_{k=1}^h (\mathfrak{F} + F_k)$ converge la o matrice $P \in \mathfrak{M}$, pe care o vom nota $P = \prod_{k=1}^{\infty} (\mathfrak{F} + F_k)$.

2) Dacă $\mathfrak{F} + F_k \in \mathfrak{G}$, atunci $P \in \mathfrak{G}$.

Deoarece $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k)$ converge *) și fie a limita sa. Evident, $\|P_h\|_D < \prod_{k=1}^h (1 + a_k) < a$, iar inegalitatea $\|P_{h+1} - P_h\|_D = \|P_h F_{h+1}\|_D < a a_{h+1}$ arată că șirul $\{P_h\}_h$ este convergent. Limita sa $P \in \mathfrak{M}$, datorită convergenței uniforme pe D a șirurilor de funcții componente.

2) Avem $\det P = \lim_{h \rightarrow \infty} \det P_h = \lim_{h \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^h \det (\mathfrak{F} + F_k)$, iar $\det (\mathfrak{F} + F_k) = 1 + p_k$, unde p_k este un polinom în componentele f_{st}^k ale funcției matriciale F_k , ($s, t = 1, \dots, m$), care cuprinde un număr finit N de monoame de grad ≥ 1 . Cum $\|f_{st}^k\|_D \leq a_k$ și cum pentru $k > k_0$ — un anumit indice depinzînd de N — numărul $a_k < 1/N$, avem $\|p_k\|_D \leq N a_k$, deci $|\det [\mathfrak{F} + F_k(z)]| \geq 1 - N a_k > 0$, oricare ar fi $z \in D$. Produsul infinit $\prod_{k=k_0}^{\infty} (1 - N a_k)$ este conver-

*) A se vedea [67], vol I, p. 320.

gent *) deci $\prod_{k=k_0}^{\infty} |\det [\mathfrak{F} + F_k(z)]| > \prod_{k=k_0}^{\infty} (1 - Na_k) > 0$, prin urmare $\det P(z) \neq 0$ pentru orice $z \in D$.

§ 7. Teorema lui H. Cartan despre matricile olomorfe nesarabile

Un instrument deosebit de important, atit în teoria fibratelor analitice cît și în teoria fasciculelor analitice coerente, îl constituie o teoremă (numită uneori leamă datorită multiplelor ei aplicații) stabilită de H. Cartan în 1940 [18], pe care o vom demonstra sub următoarea formulare ([44], cap VI, E):

Teorema 1 (*Teorema lui Cartan despre matricile olomorfe nesarabile*). Fie numerele reale $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ și $b_1 < b_2$, iar în planul variabilei z_1 dreptunghiurile închise:

$$K_1 = \{z_1 \mid a_2 \leq x_1 \leq a_3, \quad b_1 \leq y_1 \leq b_2\}$$

$$K'_1 = \{z_1 \mid a_1 \leq x_1 \leq a_3, \quad b_1 \leq y_1 \leq b_2\}$$

$$K''_1 = \{z_1 \mid a_2 \leq x_1 \leq a_4, \quad b_1 \leq y_1 \leq b_2\}.$$

Fie $K_2, \dots, K_n$ dreptunghiuri închise din planele variabilelor $z_2, \dots, z_n$ respectiv, iar $K = K_1 \times K_2 \times \dots \times K_n$, $K' = K'_1 \times K_2 \times \dots \times K_n$ și $K'' = K''_1 \times K_2 \times \dots \times K_n$ mulțimi din $\mathbb{C}^n$. Dacă F este o funcție matricială olomorfă nesarabilă într-o vecinătate a lui K , atunci există funcțiile matriciale olomorfe nesarabile F' și F'' într-o vecinătate a lui K' resp. K'' , astfel încît $F = F'F''$ în vecinătatea lui K .

Convenim să notăm pentru o mulțime $M \subset \mathbb{C}$ și pentru un număr $\delta > 0$ cu $M(\delta) = \{p \mid p \in \mathbb{C}, \quad d(p, M) < \delta\}$. Fie $K(\delta) = K_1(\delta) \times K_2(\delta) \times \dots \times K_n(\delta)$, $K'(\delta) = K'_1(\delta) \times K_2(\delta) \times \dots \times K_n(\delta)$ și $K''(\delta) = K''_1(\delta) \times K_2(\delta) \times \dots \times K_n(\delta)$. Evident $K(\delta) = K'(\delta) \cap K''(\delta)$. Alegem $\delta > 0$ suficient de mic, pentru ca F să fie definit

*) A se vedea nota de la pagina precedentă.

pe $K(2\delta)$, notăm cu L lungimea curbei frontieră a lui $K_1(\delta)$ și considerăm șirul de vecinătăți ale lui K , K' resp. K'' :

$$U_h = K(\delta_h), U'_h = K'(\delta_h) \text{ și } U''_h = K''(\delta_h) \text{ cu } \delta_h = \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2^h}, \quad h = 1, 2, \dots$$

1) Demonstrăm mai întâi teorema lui Cartan în ipoteza:

$$\|F - \mathfrak{F}\|_{\bar{U}_1} < \rho/4, \quad (1)$$

unde ρ este o constantă pozitivă, pe care o vom alege în cele ce urmează.

În acest scop vom construi prin inducție după h șirurile de matrici olomorfe G_h , G'_h și G''_h astfel încît:

$$(i) \quad G_1 = F - \mathfrak{F}.$$

(ii) G_h este olomorfă într-o vecinătate a lui $\bar{U}_h$ și $\|G_h\|_{\bar{U}_h} \leq \leq \rho/4^h$.

(iii) G'_h este olomorfă în U'_h și $\|G'_h\|_{\bar{U}_{h+1}} \leq L\rho/2^h\pi\delta$. O condiție analogă are loc pentru G''_h .

$$(iv) \quad G_h = G'_h + G''_h \text{ în } U_h.$$

(v) $(\mathfrak{F} + G'_h)(\mathfrak{F} + G'_{h+1})(\mathfrak{F} + G''_h) = \mathfrak{F} + G_h$ într-o vecinătate a lui $\bar{U}_{h+1}$.

Presupunem G_h construit cu proprietatea (ii) și formăm G'_h și G''_h , cu proprietățile (iii) și (iv).

Vom nota cu γ_h curba frontieră a lui $K_1(\delta_h)$ și vom aplica formula integrală a lui Cauchy. Pentru orice $z \in U_h$,

$$G_h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_h} \frac{G_h(\zeta_1, z_2, \dots, z_n)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1. \quad (2)$$

Fie a un număr real, $a_2 < a < a_3$. Dreapta $x_1 = a$ împarte γ_h în două arce γ'_h de pe frontiera lui $K'_1(\delta_h)$ și γ''_h de pe frontiera

lui $K''_1(\delta_h)$. Funcțiile

$$\begin{aligned} G'_h(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'_h} \frac{G_h(\zeta_1, z_2, \dots, z_n)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1 \text{ și} \\ G''_h(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma''_h} \frac{G_h(\zeta_1, z_2, \dots, z_n)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1 \end{aligned} \quad (3)$$

sînt olomorfe în U'_h resp. U''_h , iar dacă $z \in \bar{U}'_{h+1}$ resp. $\bar{U}''_{h+1}$, atunci $|\zeta_1 - z_1| \geq \delta/2^{h+1}$, în timp ce lungimea lui γ'_h și cea a lui γ''_h sînt $< L$, astfel încît $\|G'_h\|_{\bar{U}'_{h+1}}, \|G''_h\|_{\bar{U}''_{h+1}} \leq L\rho/2^h\pi\delta$. Evident $G'_h + G''_h = G_h$ în U_h .

Vom pune condiția ca

$$\rho < \pi\delta L^{-1} \quad (4)$$

pentru a obține $\|G'_h\|_{\bar{U}'_{h+1}}, \|G''_h\|_{\bar{U}''_{h+1}} \leq \frac{1}{2}$. Din considerații de continuitate rezultă existența unei vecinătăți a lui $\bar{U}'_{h+1}$, resp. $\bar{U}''_{h+1}$, în care $\|G'_h(z)\|$ resp. $\|G''_h(z)\| < 1$, prin urmare $\mathfrak{F} + G'_h$ și $\mathfrak{F} + G''_h$ sînt nesingulare, (2°, § 6, nr. 1). Relația (v) definește deci într-o vecinătate a lui $\bar{U}_{h+1}$ matricea olomorfă G_{h+1} . Totodată, dacă P este constanta din observația 1, § 6, nr 1, rezultă $\|G_{h+1}\|_{\bar{U}_{h+1}} \leq PL^2\rho^24^{-h}\pi^{-2}\delta^{-2}$. Pentru a verifica condiția (ii): $\|G_{h+1}\|_{\bar{U}_{h+1}} \leq \rho 4^{-(h+1)}$, vom alege ρ astfel încît să avem îndeplinită și inegalitatea

$$\rho < 4^{-1} \pi^2 \delta^2 L^{-2} P^{-1}. \quad (5)$$

Matricile $F_h = \mathfrak{F} + G_h$, $F'_h = \mathfrak{F} + G'_h$ și $F''_h = \mathfrak{F} + G''_h$ sînt olomorfe și nesingulare în $K\left(\frac{\delta}{2}\right)$, $K'\left(\frac{\delta}{2}\right)$ resp. $K''\left(\frac{\delta}{2}\right)$, dacă adăugăm la condițiile (4) și (5) de mai sus relative la ρ și inegalitatea $\rho < 4^2$. Într-adevăr, această inegalitate implică $\|G_h\|_{\bar{U}_h} < 1$ pentru $h = 2, 3, \dots$, de unde rezultă F_h matrice nesingulară; pentru $h = 1$ condiția nu este necesară, deoarece $F_1 = F$ este nesingulară prin ipoteză.

Relația (v) arată că în $K\left(\frac{\delta}{2}\right)$ avem

$$F = F'_1 F'_2 F''_1 = \dots = (F'_1 F'_2 \dots F'_h) F_{h+1} (F''_h \dots F''_2 F''_1). \quad (6)$$

Aplicînd propoziția 4, din § 6, nr. 5, deducem că $F' = \lim_{h \rightarrow \infty} F'_1 F'_2 \dots F'_h$ este o matrice olomorfă nesingulară în $K'\left(\frac{\delta}{2}\right)$ și analog $F'' = \lim_{h \rightarrow \infty} F''_h \dots F''_2 F''_1$ în $K''\left(\frac{\delta}{2}\right)$, în timp ce în $K\left(\frac{\delta}{2}\right)$ avem $\lim_{h \rightarrow \infty} F_h = \mathfrak{F}$. Prin urmare din (6) rezultă $F = F' F''$ în $K\left(\frac{\delta}{2}\right)$, ceea ce demonstrează teorema lui Cartan în cazul (1).

Observația 1. Să remarcăm că în ipoteza (1) un raționament analog stabilește pentru F o descompunere $F = \Phi'' \Phi'$ în vecinătatea lui K , unde Φ' și Φ'' sint matrici olomorfe nesingulare în vecinătatea lui K' resp. K'' .

2) Vom reduce acum cazul general la cel analizat mai sus, presupunînd mereu că ρ satisface inegalitățile (4), (5), și $\rho < 4^2$. Dată o matrice olomorfă nesingulară oarecare F într-o vecinătate a lui K , de exemplu în $K(2\delta)$, fie $\|F^{-1}\|_{\bar{U}_1} = C$. După teorema de aproximare 2 din § 6, nr. 4, există o matrice H olomorfă nesingulară în $\mathbb{C}^n$, cu proprietatea $\|F - H\|_{\bar{U}_1} < \varepsilon$, unde $\varepsilon > 0$ va fi determinat, astfel încît $\|F^{-1}H - \mathfrak{F}\|_{\bar{U}_1} = \|F^{-1}(H - F)\|_{\bar{U}_1} \leq C\varepsilon < \rho/4$, prin urmare $\varepsilon < \rho/4C$. Matricea $F^{-1}H$ satisface condiția (1), deci conform punctului 1) de mai sus, există matricile olomorfe nesingulare H' și H'' în vecinătatea lui K' resp. K'' , astfel încît $F^{-1}H = H''H'$ în vecinătatea lui K . Dăr de aici rezultă $F = F'F''$ în vecinătatea lui K , pentru $F' = HH'^{-1}$ și $F'' = H''^{-1}$ funcții matriciale olomorfe, nesingulare în vecinătatea lui K' resp. K'' .

Observația 1 se păstrează și acum.

Observația 2. Evident teorema lui Cartan se stabilește în mod analog și în cazul în care K_j , $j = 2, \dots, n$, sint compacte simplu conexe din planele z_j , astfel încît $K_j(\delta)$ să fie domenii simplu conexe, pentru δ suficient de mic.

Observația 3. În § 8 și în cap. V, § 4, teorema lui Cartan va fi aplicată sub forma în care $a_2 = a_3 = a$. Notăm K'_1, K', K''_1, K'' ca mai sus, $H_1 = \{z_1 \mid x = a, b_1 \leq y \leq b_2\}$ și $H = H_1 \times \dots \times K_n$.

Prin ipoteză F este o matrice olomorfă nesaringulară în vecinătatea lui H . Atunci există matricile olomorfe nesaringulară F' și F'' în vecinătatea lui K' resp. K'' , astfel încît $F = F'F''$ pe o vecinătate a lui H .

Observația 4. Teorema lui Cartan se demonstrează însă în condiții mult mai generale: Fie K un dreptunghi din planul $z : K = \{z \mid a_1 \leq x \leq a_2, b_1 \leq y \leq b_2, a_1 < a_2 \text{ și } b_1 < b_2\}$, $H = \{z \mid x = a, b_1 \leq y \leq b_2, a \in (a_1, a_2)\}$, $K' = \{z \mid a_1 \leq x \leq a, b_1 \leq y \leq b_2\}$ și $K'' = \{z \mid a \leq x \leq a_2, b_1 \leq y \leq b_2\}$; L și M compacte din $\mathbb{C}'$ resp. $\mathbb{R}^m$; λ resp. μ puncte arbitrare din $\mathbb{C}'$ resp. $\mathbb{R}^m$. Dacă F este o matrice nesaringulară diferențiaribilă de clasă C^∞ în vecinătatea lui $H \times L \times M$ și olomorfă în z și λ , pentru μ fixat, atunci există matricile nesaringulară F' și F'' în vecinătățile lui $K' \times L \times M$ resp. $K'' \times L \times M$, care verifică aceleași condiții de regularitate ca și F , și astfel încît $F = F'F''$ într-o vecinătate a lui $H \times L \times M$ ([64], p. 68).

§ 8. Fibrat analitice complexe

1. În cap. II, § 9 și § 10, am studiat fibrat (local triviale) și fibrat vectoriale peste un spațiu topologic X . Pentru aplicațiile noastre va fi important ca fibratelor considerate, care vor fi definite pe varietăți analitice complexe, să fie înzestrate cu o structură analitică complexă.

Fie $X = V$ și F două varietăți analitice complexe, iar G un grup Lie complex, care operează efectiv și analitic (olomorf) asupra lui F .

Definiția 1. Un grup Lie complex G este o varietate analitică complexă, între elementele căreia este definită o lege de compunere, în raport cu care G formează un grup și astfel încît operațiile

grupale: $G \times G \rightarrow G$, $(g_1, g_2) \rightarrow g_1 g_2$, și $G \rightarrow G$, $g \rightarrow g^{-1}$ sînt aplicații olomorfe.

Definiția 2. G operează *analitic* asupra lui F , dacă aplicația $G \times F \rightarrow F$, $(g, y) \rightarrow gy$ este olomorfă. În particular, fiecare $g \in G$ fixat determină un automorfism analitic: $F \rightarrow F$.

Definiția 3. Un fibrat E , $\{U_i, c_{ij}\}_I$ peste V cu fibra F și grupul G (definiția 5, cap. II, § 9, nr. 1) este un *fibrat analitic complex*, dacă aplicațiile $c_{ij}: U_{ij} \rightarrow G$ sînt analitice.

Propoziția 1. Un fibrat analitic complex E se înzestrează cu o structură de varietate analitică complexă, iar proiecția p devine o aplicație analitică.

Într-adevăr, putem lua o acoperire $\{U_i\}_{i \in I}$ a lui V , unde $\{U_i, \psi_i\}_{i \in I}$ formează un atlas complex pe V și totodată există omeomorfismele $h_i: p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$ (propoziția 1, cap. II, § 9, nr. 1), unde h_{ji} este un izomorfism analitic ($U_i \times F$ fiind varietăți analitice produs, cap. III, § 1, nr. 3), care se exprimă cu ajutorul aplicațiilor analitice c_{ij} . (Dacă va fi necesar se va folosi o rafinare a acoperirii ce definește fibratul E .) Fie $\{V_s\}_{s \in S}$ o acoperire a lui F , unde $\{V_s, \chi_s\}_{s \in S}$ formează un atlas F . Definim un atlas pe E : $\{W_{(i,s)} = h_i^{-1}(U_i \times V_s), (\psi_i, \chi_s) \circ h_i\}_{I \times S}$. Aplicațiile $(\psi_j, \chi_t) \circ h_{ji} \circ (\psi_i, \chi_s)^{-1}$, acolo unde sînt definite, sînt izomorfisme analitice. În acest mod, aplicațiile h_i devin izomorfisme analitice, iar propoziția 1 din cap. II, § 9, nr. 1, se păstrează cu enunțul completat în mod corespunzător.

Se obține de asemenea un rezultat analog propoziției 2 din același capitol II, § 9.

Vom introduce acum *echivalența* a două fibrate analitice complexe, luînd ca punct de plecare echivalența fibratelor topologice, dată prin definiția 7, cap. II, § 9, nr. 3.

Definiția 4. Două fibrate analitice complexe E și E^* de aceeași bază V , fibră F și grup de structură G se numesc *echivalente*, dacă există un izomorfism analitic $f: E \rightarrow E^*$, care invariază fibrele (diagrama (2), cap. II, § 9) și are următoarea proprietate: Pentru fiecare $a \in V$, există o vecinătate U astfel încît restricția $f|_{p^{-1}(U)}$ determină (conform diagramei comutative (3), cap. II, § 9)

un izomorfism analitic γ_U , care se exprimă cu ajutorul unei aplicații analitice $c_U: U \rightarrow G$.

Criteriul de echivalență dat de propoziția 4, cap. II, § 9, nr. 3, se păstrează pentru fibrare analitice complexe cu modificarea evidentă, că aplicațiile c_i de la operația 2° sînt analitice. Analog se păstrează propoziția 3 și consecința 1, cap. II, § 9.

Să remarcăm că fibratul $V \times F$ este în acest caz analitic complex și că putem defini *clasa fibrelor analitice complexe triviale*.

Rezultatele din cap. II, § 9, consecința 2 și observația 1 rămîn evident valabile, iar observația 2 se demonstrează fără modificare. De asemenea se păstrează definițiile 6 și 10.

Observația 1. Înlocuind în toate considerațiile dezvoltate în acest paragraf la nr. 1 cuvintele analitic complex prin *diferențiabil* (de clasă C^∞) *real*, obținem definiția și proprietăți ale fibrelor diferențiabile reale pe o varietate diferențiabilă reală V , cu fibra F varietate diferențiabilă reală și cu grupul de structură G un grup Lie real (i. e. o varietate diferențiabilă reală, care formează grup față de o lege de compunere, astfel încît operațiile de compunere și inversare să fie aplicații diferențiabile — a se vedea definiția 1).

2. Fibrare vectoriale analitice complexe. Ca și în capitolul II în cadrul topologic, putem considera acum pe varietăți analitice complexe, fibrare analitice complexe cu structură algebrică. Ne vom opri însă numai asupra fibrelor vectoriale analitice complexe.

În acest scop să remarcăm că $\mathbb{C}^m$ nu este numai spațiu vectorial topologic, ci și varietate analitică complexă. De asemenea $GL(m, \mathbb{C})$ este o varietate analitică complexă pe baza aplicației injective în $\mathbb{C}^{m^2}$, restricția bijecției Θ din cap. II, § 10, observația 1. Dacă U este un deschis din varietatea analitică complexă V , o aplicație olomorfă $c: U \rightarrow GL(m, \mathbb{C})$ este o funcție matricială nesingulară olomorfă $c = (c_{st})$ pe U , caracterizată prin proprietatea că funcțiile componente $c_{st}: U \rightarrow \mathbb{C}$ sînt olomorfe (§ 6, nr. 2, definiția 4).

Definiția 5. Se numește un *fibrat vectorial analitic complex* pe V un fibrat vectorial complex pe V (deci un fibrat de fibră $F = \mathbb{C}^m$

și grup $G = GL(m, \mathbb{C})$, cap. II, § 10, definiția 1), pentru care aplicațiile $c_{ij} : U_{ij} \rightarrow GL(m, \mathbb{C})$ sînt olomorfe.

Rezultatele din cap. II, § 10 se păstrează cu completările necesare, care sînt evidente. De exemplu, aplicațiile h_U sînt acum izomorfisme analitice, iar în definiția echivalenței a două fibrate E și E^* se cere ca $f : E \rightarrow E^*$ să fie de asemenea un izomorfism analitic cu proprietățile 1°, 2°, 3°, γ_U fiind un izomorfism analitic, iar c_U o aplicație analitică.

3. Definiția 6. Fie E un fibrat analitic complex pe V de proiecție p și U o submulțime deschisă a lui V . Vom numi *secțiune* a lui E pe U o aplicație olomorfă $s : U \rightarrow E$ astfel încît $p \circ s = 1_U$.

Vom nota din nou fascicolul germenilor de secțiuni în E cu $\mathcal{F}(V, E)$ sau prescurtat cu $\mathcal{F}$ și cu $\mathcal{O}(V)$ sau $\mathcal{O}$ fascicolul germenilor de funcții olomorfe pe V .

În cazul fibratelor vectoriale analitice complexe se obțin propoziții analoge cu propozițiile 1 și 2 și observația 2 din cap. II, § 10, nr. 3, și anume

Propoziția 2. *Fascicolul $\mathcal{F}$ al germenilor de secțiuni în fibratul vectorial analitic complex E de ordinul m pe V este un fascicol analitic local izomorf cu $\mathcal{O}^m$, deci local liber de rang m .*

Propoziția 3. *Orice fascicol $\mathcal{G}$ analitic pe V local izomorf cu $\mathcal{O}^m$ este izomorf cu fascicolul $\mathcal{F}$ al germenilor secțiunilor unui fibrat vectorial analitic complex E pe V de ordinul m .*

Ținînd seama că la fibrare echivalente corespund fascicule de germeni de secțiuni izomorfe, putem formula analogul teoremei 2:

Teorema 1. *Există o corespondență biunivocă între clasele de fibrare vectoriale analitice complexe echivalente și clasele de fascicule analitice local libere de un rang oarecare izomorfe.*

Observația 2. Aplicînd procedeul indicat în observația 1 pentru definițiile și rezultatele dezvoltate la nr. 2, și nr. 3, obținem fibrarele vectoriale diferențiabile și proprietăți ale acestor fibrare. Rolul fascicolului $\mathcal{O}$ este luat acum de fascicolul germenilor de funcții diferențiabile pe V .

4. Din teorema 1 de mai sus rezultă

Consecința 1. Fascicolul $\mathcal{F}$ al germenilor secțiunilor într-un fibrat vectorial analitic complex E de ordinul m este izomorf cu O^m atunci și numai atunci când E este trivial.

Consecința 2. Fascicolul $\mathcal{F}$ al germenilor secțiunilor într-un fibrat vectorial analitic complex este analitic coerent (definiția 2, cap. III, § 7, nr. 3).

5. Rezultatul principal din teoria fibratelor analitice, pe care îl vom folosi în legătură cu problema a doua a lui Cousin, este dat de

Teorema 2. Orice fibrat vectorial analitic complex E peste o vecinătate a unui cub $K \subset \mathbb{C}^n$ este trivial peste o vecinătate a lui K .

Fie E definit prin $\{U_i, c_{ij}\}_I$, unde $U = \bigcup_{i \in I} U_i \supset K$. Împărțim cubul K prin fețe paralele la hiperplanele de coordonate în cuburi K_i suficient de mici, încît după o eventuală schimbare de numerotare a indicilor, cubul K_i să fie inclus într-un deschis U_i , unde i descrie o mulțime finită de indici $I_1 \subset I$.

Vom nota cu E_1 fibratul definit de $\{U_i, c_{ij}\}_{I_1}$ și cu $U^1 = \bigcup_{i \in I_1} U_i$. Conform consecinței 1, din cap. II, § 9, nr. 3,*) E_1 este echivalent cu restricția $E|_{U^1}$ (definită de $\{U_i \cap U^1, c_{ij}\}_{I_1}$).

Să alegem două cuburi K_i adiacente: fie $K_1 = k_1 \times L$ și $K_2 = k_2 \times L$, unde k_1 și k_2 sînt dreptunghiuri din planul z_1 , $k_1 = \{z_1 \mid a_1 \leq x_1 \leq a, b_1 \leq y_1 \leq b_2\}$ și $k_2 = \{z_1 \mid a \leq x_1 \leq a_2, b_1 \leq y_1 \leq b_2\}$, adiacente în lungul segmentului $h = \{z_1 \mid x_1 = a, b_1 \leq y_1 \leq b_2\}$ și L este un cub $(n-1)$ -dimensional, în variabilele $z_2, \dots, z_n$ (**). Cum $K_1 \subset U_1$ și $K_2 \subset U_2$, iar $K_1 \cap K_2 = h \times L \subset U_{12}$, în vecinătatea U_{12} a lui $h \times L$ este definită aplicația olomorfă $c_{12}: U_{12} \rightarrow GL(m, \mathbb{C})$. Folosind teorema lui Cartan (teorema 1, § 7),

*) În cuprinsul acestei demonstrații cităm rezultate stabilite în cap. II, § 9, care, după cum s-a menționat la nr. 1 al acestui paragraf, sînt valabile și pentru cazul analitic.

**) Evident printr-o transformare liniară de variabile putem realiza acest caz.

vom construi un fibrat vectorial E_1^* peste o vecinătate a lui K , care este echivalent cu E_1 restrîns la acea vecinătate și este trivial peste anumite vecinătăți W_1 a lui K_1 și W_2 a lui K_2 (definiția 9 din cap. II, § 9, nr. 3): Într-adevăr, după această teoremă, există aplicațiile olomorfe $c_j: V_j \rightarrow GL(m, \mathbb{C})$, unde V_j este o vecinătate a lui K_j , pe care o putem presupune inclusă în U_j , $j = 1, 2$, astfel încît $c_{12} = c_1 c_2^{-1}$ într-o vecinătate W a lui $h \times L$. Aplicînd lema 1 din cap. II, § 6, nr. 4, deducem că există mulțimile deschise W_j , $K_j \subset W_j \subset V_j$, $j = 1, 2$, astfel încît $W = W_{12}$. Fie E_1^* fibratul $\{W_i, d_{ij}\}_{I_1}$, unde $W_i = U_i$ pentru $i \in J_1 = I_1 - \{1, 2\}$, iar $d_{ij} = c_{ij}|_{W_{ij}}$. Se verifică imediat că E_1^* este echivalent cu restricția $E|_{U^2}$, unde $U^2 = \bigcup_{i \in I_1} W_i$ (constituie o rafinare).

Cum E_1^* este trivial peste W_1 și W_2 , după observația 2 din cap. I, § 9, nr. 3 rezultă că E_1^* este echivalent cu un fibrat vectorial E_2 definit de o acoperire $W_1 \cup W_2$, W_i cu $i \in J_1$, ce cuprinde o mulțime mai puțin decît $\{U_i\}_{I_1}$ și corespunde tot la o împărțire a lui K în cuburi, fiecare inclus într-unul din deschisele acoperirii ($K_1 \cup K_2 \subset W_1 \cup W_2$). Repetînd procedeul de un număr finit de ori obținem un fibrat E_N trivial peste o vecinătate a lui K și echivalent cu E restrîns la această vecinătate. Conform definiției 10 din cap. II, § 9, nr. 3, putem spune că E este trivial peste o vecinătate a lui K .

§ 9. Legătura dintre problema a II-a a lui Cousin și fibratele vectoriale analitice. Cazul cubului

Comparînd enunțul problemei a II-a a lui Cousin generalizate cu definițiile 5 și 1 din cap. II, § 9, nr. 1, resp. § 10, nr. 1 și cu consecința 2 din cap. II, § 9, nr. 3, rezultă imediat

Teorema 1. *Datele unei probleme a II-a a lui Cousin generalizate $\{\Omega_i, c_{ij}\}_I$ pe o varietate analitică complexă V definesc pe această varietate un fibrat vectorial analitic complex de ordinul $m = 1$ și reciproc. Condiția necesară și suficientă pentru ca pe varietatea V problema a II-a a lui Cousin generalizată să admită soluție este ca orice fibrat analitic vectorial de ordinul 1 pe V să fie trivial.*

Teorema 2 din § 8, nr. 5 arată însă că orice fibrat vectorial analitic complex, definit pe o vecinătate a unui cub din $\mathbb{C}^n$, este trivial. În concluzie, putem formula

T e o r e m a 2. *Problema a II-a a lui Cousin generalizată admite soluție în cazul cubului.*

Fie K un cub din $\mathbb{C}^n$ și $\{\Omega_i, c_{ij}\}_I$ un sistem de date pentru problema a II-a a lui Cousin generalizată, unde $K \subset \bigcup_{i \in I} \Omega_i$.

Există o vecinătate U a lui K și, pentru fiecare $i \in I$ pentru care $U \cap \Omega_i \neq \emptyset$, o funcție c_i olomorfă pe $U \cap \Omega_i$, astfel încît $c_{ij} = c_i c_j^{-1}$ în $U \cap \Omega_{ij}$, dacă i și $j \in I$ iar $U \cap \Omega_{ij} \neq \emptyset$.

V COOMOLOGIE PE VARIETĂȚI ANALITICE COMPLEXE

Grupăm în acest capitol rezultate relative la varietățile analitice complexe, care se obțin cu ajutorul teoriei coomologiei cu coeficienți într-un fascicol și în special cu ajutorul teoremei abstracte a lui de Rahm (cap. II, §§ 7 și 9).

§ 1. Fascicole de germeni de forme diferențiale exterioare

1. Fie V o varietate analitică complexă.

Definiția 1. O formă diferențială ω de tip (p, q) pe V , p și q întregi ≥ 0 , este o aplicație care asociază fiecărei hărți (U, φ) a lui V de coordonate $z \in \mathbb{C}^n$ o formă diferențială de tip (p, q) pe $\varphi(U)$

$$\sum_{\substack{0 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n \\ 0 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n}} a_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}, \quad (1)$$

astfel încît pentru orice pereche de hărți (U, φ) și (U^*, φ^*) , pentru care $U \cap U^* \neq \emptyset$, avem satisfăcută legea de invarianță

$$\sum a_{i_1 \dots j_q} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q} = \sum a^*_{i_1 \dots j_q} dz^*_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^*_{j_q}. \quad (2)$$

Formele diferențiale de tip (p, q) pe V formează un modul $\mathcal{L}^{(p, q)}(V)$ peste $\mathbb{C}$ -algebra $\mathcal{O}^\infty(V)$ a funcțiilor complexe diferențiabile de clasă C^∞ pe V .

Suma directă a modulelor $\mathcal{L}^{(p, q)}(V)$ pentru $p + q = r \geq 0$ formează modulul $\mathcal{L}^{(r)}(V)$ al formelor diferențiale exterioare de

grad r , iar suma directă a modulelor $\mathcal{E}^{(r)}(V)$ pentru $r \geq 0$ formează modulul $\mathcal{E}(V)$ al tuturor formelor diferențiale exterioare, care se organizează și ca $\mathcal{O}^\infty(V)$ -algebră (cap. I, § 2, nr. 5).

Pe $\mathcal{E}(V)$ se definesc operatorii d, d' și d'' , dintre care d'' prezintă pentru noi un interes deosebit datorită legăturii sale cu ologomorfia. De exemplu, dacă $\omega \in \mathcal{E}^{(p, q)}(V)$, atunci $d''\omega$ este forma din $\mathcal{E}^{(p, q+1)}(V)$, care pe orice hartă (U, φ) , unde ω are reprezentarea (1), este dată de

$$\sum_{\substack{0 < i_1 < \dots < i_p \leq n \\ 0 < j_1 < \dots < j_q \leq n}} d'' a_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} \wedge dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}, \quad (3)$$

conform formulei (16) din cap. I, § 2, nr. 5. Observația 1 din cap. I, § 5 asigură că aplicația, care asociază hărții (U, φ) forma (3), satisface condiția (2), prin urmare această aplicație definește efectiv o formă pe V —forma $d''\omega$.

De asemenea definițiile 1—3 din cap. IV, § 3, nr. 2 se extind imediat și cu ajutorul lui d'' se scrie complexul (1) din acel paragraf, unde pentru simplificarea notației înlocuim $\mathcal{E}^{(p, q)}(V)$ cu $\mathcal{E}^{(p, q)}$ și $p \geq 0$ este arbitrar:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}^{(p, 0)} \rightarrow \mathcal{E}^{(p, 0)} \xrightarrow{d'_{(p, 0)}} \mathcal{E}^{(p, 1)} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{E}^{(p, q)} \xrightarrow{d'_{(p, q)}} \mathcal{E}^{(p, q+1)} \rightarrow \dots \quad (4)$$

Se introduc din nou pentru $q \geq 1$

$$Z^q(V; d'', p) = \ker d''_{(p, q)}, \quad B^q(V; d'', p) = \operatorname{im} d''_{(p, q-1)}$$

și se definesc grupurile de d'' -coomologie ale lui V relativ la p

$$H^q(V; d'', p) = \ker d''_{(p, q)} / \operatorname{im} d''_{(p, q-1)} \quad (5)$$

și

$$H^0(V; d'', p) = \mathcal{O}^{(p, 0)}(V).$$

2. Considerînd forme diferențiale de tip (p, q) , resp. de grad r pe deschise din V și repetînd procedeul din cap. II, § 3, vom defini *germeni de forme diferențiale de tip (p, q) , resp. de grad r* și apoi *fascicolul de germeni de forme diferențiale*, pe care îl vom

nota $\mathcal{E}^{(p,q)}(V)$ resp. $\mathcal{E}^{(r)}(V)$ sau, atunci cînd varietatea V este fixată $\mathcal{E}^{(p,q)}$ resp. $\mathcal{E}^{(r)}$. Fascicolul $\mathcal{E}^{(0,0)} = \mathcal{E}^{(0)}$ coincide cu $\mathcal{C}^\infty = \mathcal{C}^\infty(V)$, fascicolul germeilor de funcții diferentiabile de clasă C^∞ cu valori complexe. Fascicolul $\mathcal{C}^\infty$ este un fascicol de $\mathbb{C}$ -algebre, iar fascicolele $\mathcal{E}^{(p,q)}$ sau $\mathcal{E}^{(r)}$ sînt fascicole de $\mathcal{C}^\infty$ -module.

O formă diferențială exterioară de tip (p, q) pe V poate fi definită ca o secțiune din $\Gamma(V, \mathcal{E}^{(p,q)})$ și vom identifica $\Gamma(V, \mathcal{E}^{(p,q)})$ cu $\mathcal{E}^{(p,q)}$. Analog $\Gamma(V, \mathcal{E}^{(r)}) = \mathcal{E}^{(r)}$ și $\Gamma(V, \mathcal{C}^\infty) = \mathcal{C}^\infty$.

Să fixăm $p \geq 0$. Pentru fiecare $q \geq 0$, operatorul d'' induce un morfism de fascicole de grupuri $\mathcal{E}^{(p,q)} \rightarrow \mathcal{E}^{(p,q+1)}$, pe care îl vom nota tot $d''_{(p,q)}$ sau prescurtat d'' . Dacă $a \in V$ și $\omega_a \in \mathcal{E}_a^{(p,2)}$, ω_a fiind reprezentat de ω o formă diferențială definită pe o vecinătate U a lui a , atunci $d''(\omega_a) = (d''\omega)_a$, germenele în punctul a al formei $d''\omega$ definită pe U . Vom nota acest germene, care aparține lui $\mathcal{E}_a^{(p,q+1)}$, cu $d''\omega_a$.

Obținem astfel *complexul de fascicole de grupuri abeliene*

$$0 \rightarrow \mathcal{O}^{(p,0)} \rightarrow \mathcal{E}^{(p,0)} \xrightarrow{d''_{(p,0)}} \mathcal{E}^{(p,1)} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{E}^{(p,q)} \xrightarrow{d''_{(p,q)}} \mathcal{E}^{(p,q+1)} \rightarrow \dots \quad (6)$$

deoarece $d''_{(p,q)} \circ d''_{(p,q-1)} = 0$, iar $\ker d''_{(p,0)}$ este fascicolul germeilor de forme diferențiale olomorfe de tip $(p, 0)$, pe care îl vom nota $\mathcal{O}^{(p,0)}$. El nu este fascicol de $\mathcal{C}^\infty$ -module, ci un fascicol analitic pe V . Evident $\mathcal{O}^{(0,0)} = \mathcal{O}(V)$.

Propoziția 1. *Șirul (6) este exact.*

Trebuie să verificăm numai relația

$$(\ker d''_{(p,q)})_a \subset (\operatorname{im} d''_{(p,q-1)})_a$$

pentru fiecare punct $a \in V$. Fie $\omega_a \in (\ker d''_{(p,q)})_a$, germenele unei forme ω definită într-o vecinătate u a lui a , vecinătate inclusă în suportul unei hărți (U, φ) . Cum germenele formei $d''\omega$ în punctul a este nul, există o vecinătate v a lui a , inclusă în u , pe care $d''\omega = 0$. Vom alege un cub $K \subset \varphi(v)$ și aplicînd

teorema lui Grothendieck (teorema 1 din cap. IV, § 3, nr. 1) formeii ω , vom deduce existența unei forme π într-o vecinătate w a lui a , $K \subset \varphi(w) \subset \varphi(v)$, pentru care $d''\pi = \omega$ în w . Prin urmare $\omega_a = d''\pi_a \in (\text{im } d''_{(p, q-1)})_a$.

3. Vom adăuga acum ipoteza că varietatea V este *paracompactă*.

Propoziția 2. *Pe o varietate analitică complexă V paracompactă, fasciculele de germeni de forme diferențiale exterioare $\mathcal{E}^{(p, q)}(V)$, p și $q \geq 0$ sînt fine. În particular, fascicolul $\mathcal{O}^\infty(V)$ este fin.*

Conform definiției 5 din cap. II, § 8, nr. 4, să arătăm că oricare ar fi acoperirea local finită $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ a lui V , fascicolul $\mathcal{E}^{(p, q)}$ admite o partiție a unității subordonată ei. În acest scop reluăm procedeul cu ajutorul căruia am arătat în cap. II, § 8, nr. 4, că fascicolul germenilor de funcții continue $\mathcal{O}(X)$ pe un spațiu topologic X paracompact este fin, cu deosebirea că acum vom folosi o partiție a unității $\{\mu_i\}_{i \in I}$ subordonată acoperirii $\mathcal{U}$ de clasă C^∞ , deoarece $\mathcal{E}^{(p, q)}$ este fascicol de $\mathcal{O}^\infty$ -module. Teorema 2 din cap. III, § 1, nr. 4 asigură existența unei astfel de partiții. Vom lua atunci morfismele $\varphi_i: \mathcal{E}^{(p, q)} \rightarrow \mathcal{E}^{(p, q)}$ din definiția 4, cap. II, § 8, nr. 4, determinate de înmulțirea cu germenii funcțiilor μ_i : Pentru $a \in V$ și $\omega_a \in \mathcal{E}_a^{(p, q)}$, vom pune $\varphi_i(\omega_a) = \mu_{ia}\omega_a$.

După teorema 14 din cap. II, § 8, nr. 4, putem formula

Consecința 1. *Dacă varietatea analitică complexă V este paracompactă, grupurile de coomologie cu coeficienți în fascicolul $\mathcal{E}^{(p, q)}$, $H^k(V, \mathcal{E}^{(p, q)}) = 0$ pentru orice $k \geq 1$.*

4. Propoziția 1 și consecința 1 arată că toate condițiile necesare pentru a putea aplica șirului (6) teorema abstractă a lui de Rham (teorema 12 din cap. II, § 8, nr. 3) sînt îndeplinite. Fiindcă șirul secțiunilor asociat lui (6) este tocmai șirul (4), această teoremă ne dă izomorfismul

$$H^q(V, \mathcal{O}^{(p, 0)}) \simeq H^q(V; d'', p), \quad (7)$$

rezultat care constituie teorema lui Dolbeault:

Teorema 1 (Dolbeault.) *Grupul de coomologie de dimensiune $q \geq 1$ al unei varietăți analitice complexe paracompacte V ,*

cu coeficienți în fascicolul $\mathcal{O}^{(p, 0)}(V)$ al germenilor de forme diferențiale olomorfe de tip $(p, 0)$ pe V , este izomorf cu grupul de d'' -coomologie de dimensiune q al lui V relativ la p (7) sau ținând seama de (5)

$$H^q(V, \mathcal{O}^{(p, 0)}) \simeq \frac{\text{Grupul formelor diferențiale de tip } (p, q) \text{ } d''\text{-închise}}{\text{Grupul formelor diferențiale de tip } (p, q) \text{ } d''\text{-exacte}} \quad (7')$$

Deosebit de important este cazul $p = 0$:

Consecința 2. Grupul de coomologie de dimensiune $q \geq 1$, al unei varietăți analitice complexe paracompacte V , cu coeficienți în fascicolul $\mathcal{O}(V)$ al germenilor de funcții olomorfe pe V , este dat de grupul de d'' -coomologie de dimensiune q al lui V relativ la $p = 0$

$$\begin{aligned} H^q(V, \mathcal{O}) &\simeq H^q(V; d'', 0) = \\ &= \frac{\text{Grupul formelor diferențiale de tip } (0, q) \text{ } d''\text{-închise}}{\text{Grupul formelor diferențiale de tip } (0, q) \text{ } d''\text{-exacte}}. \end{aligned} \quad (8)$$

5. Teorema lui Dolbeault corespunde în cazul varietăților analitice complexe și operatorului d'' teoremei lui de Rahm privitoare la varietăți diferențiabile paracompacte reale și la operatorul d ([84] p. 268, [51] p. 238). Dăm această teoremă în cazul formelor diferențiale cu valori complexe:

Teorema 2 (de Rham.) Fie V o varietate diferențiabilă paracompactă, $\mathcal{L}^{(r)}$ fascicolul germenilor de forme diferențiale complexe de grad r pe V , ($\mathcal{L}^{(0)} = \mathcal{C}^\infty(V)$), și $\mathcal{C}$ fascicolul constant de fibră $\mathbb{C}$. Atunci grupul de coomologie de dimensiune $q \geq 1$ al lui V cu coeficienți în $\mathcal{C}$ este izomorf cu grupul de d -coomologie pe V de dimensiune q :

$$\begin{aligned} H^q(V, \mathbb{C}) &\simeq H^q(V) = \\ &= \frac{\text{Grupul } q\text{-formelor diferențiale complexe închise}}{\text{Grupul } q\text{-formelor diferențiale complexe exacte}}. \end{aligned} \quad (9)$$

În relația (9) am numit prescurtat q -formă o formă de grad q și formă închisă resp. exactă o formă d -închisă resp. d -exactă.

Pe varietatea V avem complexul de fascicule de grupuri abeliene

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{E}^{(0)} \xrightarrow{d_0} \mathcal{E}^{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{E}^{(q)} \xrightarrow{d_q} \mathcal{E}^{(q+1)} \rightarrow \dots \quad (10)$$

Folosind teorema lui Poincaré (teorema 2 din cap. IV, § 3, nr. 2) și procedînd ca în cazul propoziției 1 de mai sus, arătăm că șirul (10) este exact. Pe de altă parte se obține, ca și în propoziția 2 că fasciculele $\mathcal{E}^{(q)}$ sînt fine. Teorema abstractă a lui de Rham ne dă atunci izomorfismele (9).

Vom nota cu $Z^q(V)$ resp. $B^q(V)$ grupul q -formelor diferențiale complexe pe V închise resp. exacte și cu $H^q(V) = Z^q(V)/B^q(V)$ grupul de d -coomologie (complexă) de dimensiunea $q \geq 1$, corespunzător complexului

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{E}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{E}^1 \rightarrow \dots \quad (11)$$

Pentru $q = 0$, vom lua $H^0(V) = \mathbb{C}$.

§ 2. Coomologia cubului cu coeficienți în fascicolul germenilor de funcții olomorfe

Fie K un cub închis din $\mathbb{C}^n$, $K = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |x_j| \leq a_j, |y_j| \leq b_j, j = 1, 2, \dots, n\}$, unde a_j și $b_j \geq 0$, $\mathcal{O}$ fascicolul germenilor de funcții olomorfe pe $\mathbb{C}^n$ și $\mathcal{E}^{(p,q)}$ fascicolul germenilor de forme diferențiale de tip (p, q) pe $\mathbb{C}^n$.

Teorema 1. $H^p(K, \mathcal{O}) = 0, *$ pentru $p \geq 1$.

Reluăm procedeul aplicat la demonstrarea teoremei lui Dolbeault (teorema 1 din § 1, nr. 4). Șirul (6) din § 1, nr. 2 pentru $V = \mathbb{C}^n$, restrîns la K , ne dă șirul exact de fascicule de grupuri abeliene pe K

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_K \rightarrow \mathcal{E}_K^{(0,0)} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{E}_K^{(0,p)} \xrightarrow{d_{(0,p)}} \dots \quad (1)$$

Totodată $H^k(K, \mathcal{E}_K^{(0,p)}) = 0, *$ pentru $p \geq 0$ și $k \geq 1$, după cum rezultă verificînd direct că fascicolul $\mathcal{E}_K^{(0,p)}$ este fin. Într-adevăr

*) Conform convenției din cap. II, § 8, nr. 5
 $H^p(K, \mathcal{O}) = H^p(K, \mathcal{O}_K)$ și $H^p(K, \mathcal{E}_K^{(0,q)}) = H^p(K, \mathcal{E}_K^{(0,q)})$.

orice acoperire local finită a lui K este restricția la K a unei acoperiri local finite a unei vecinătăți a lui K . Luăm o partiție a unității de clasă C^∞ subordonată acestei ultime acoperiri, cu proprietățile indicate în cap. IV, § 4, 1). Procedînd ca în demonstrația propoziției 2 din § 1, nr. 3 și aplicînd apoi o restricție la K , formăm morfismele unei partiții a unității subordonate acoperirii inițiale și admise de $\mathcal{E}_K^{(0,p)}$.

Putem aplica deci teorema lui de Rham (teorema 12, cap. II, § 8, nr. 3) și obținem pentru $p \geq 1$

$$H^p(K, \underline{O}) \simeq \frac{\text{Grupul formelor diferențiale de tip } (0,p) \text{ } d''\text{-încchise}}{\text{Grupul formelor diferențiale de tip } (0,p) d''\text{-exacte}}. \quad (2)$$

Fie $\alpha^{(0,p)}$ o formă d'' -încchisă pe K . Ea este o secțiune peste K în fascicolul $\mathcal{E}^{(0,p)}$ și după propoziția 2 din cap. II, § 8, nr. 4, există o vecinătate U_1 a lui K și o secțiune $\alpha_1 \in \Gamma(U_1, \mathcal{E}^{(0,p)})$ care prelungește α la U_1 . Cum $d''\alpha_1$ și secțiunea nulă coincid pe K , există o vecinătate $U_2 \subset U_1$ a lui K , pe care $d''\alpha_1 = 0$. Prin urmare $\alpha_2 = \alpha_1|_{U_2}$ este o formă diferențială de tip $(0,p)$ pe U_2 , d'' -încchisă. Aplicînd teorema lui Grothendieck din cap. IV, § 3, nr. 1 (care rămîne valabilă chiar dacă $a_j, b_j \geq 0$), deducem că există o formă β_3 de tip $(0, p-1)$ pe o vecinătate $U_3 \subset U_2$ a lui K , pentru care $d''\beta_3 = \alpha_2$ pe U_3 . Vom lua $\beta = \beta_3|_K$. Evident $d''\beta = \alpha$ și conform (2), $H^p(K, \underline{O}) = 0$ pentru $p \geq 1$.

Din această teoremă și din propoziția 9, cap. II, § 7, nr. 6 rezultă

Consecința 1. Dacă p și $q \geq 1$, atunci $H^p(K, \underline{O}^q) = 0$.

§ 3. Teoremele A și B ale lui H. Cartan

1. Teoria fasciculelor analitice coerente pe varietăți analitice complexe este dominată de cele două teoreme fundamentale ale lui Cartan, teoremele A și B, care includ problemele lui Cousin

și problema lui Poincaré drept consecințe, dovedind în mod strălucit utilitatea coomologiei în studiul funcțiilor analitice de mai multe variabile complexe. În cap. VI vom aprofunda o clasă deosebit de importantă de varietăți — varietățile Stein — pe care teoremele A și B sînt valabile.

Fie V o varietate analitică complexă și $\mathcal{O}$ fascicolul germenilor de funcții olomorfe pe V .

Formularea 1. Vom spune că teorema A resp. teorema B a lui Cartan este adevărată pe V , dacă oricare ar fi fascicolul analitic coerent $\mathcal{F}$ pe V ,

A. $H^0(V, \mathcal{F}) = \Gamma(V, \mathcal{F})$ generează $\mathcal{F}$ ca fascicol de $\mathcal{O}$ -module (i.e. oricare ar fi $a \in V$, secțiunile globale ale lui $\mathcal{F}$ peste V , luate în punctul a , generează $\mathcal{F}_a$ ca $\mathcal{O}_a$ -modul).

resp.

B. $H^p(V, \mathcal{F}) = 0$, pentru orice $p \geq 1$ *).

Aceste teoreme admit și o formulare importantă pentru compacte ale unei varietăți analitice complexe.

Fie K un compact din varietatea analitică complexă V . Știm că un fascicol analitic coerent $\mathcal{F}$ pe K este un fascicol de $\mathcal{O}_K$ -module și este local izomorf cu un cît al unui fascicol $\mathcal{O}_K^N$ (cap. III, § 7, nr. 3).

Formularea 2. Vom spune că teorema A resp. teorema B este valabilă pe K , dacă oricare ar fi fascicolul analitic coerent $\mathcal{F}$ pe K ,

A. $\mathcal{F}$ este (global pe K) un cît al unui fascicol $\mathcal{O}_K^N$,

resp.

B. $H^p(K, \mathcal{F}) = 0$, pentru orice $p \geq 1$.

Evident A. admite enunțul echivalent:

Există N secțiuni globale $f_1, \dots, f_N \in \Gamma(K, \mathcal{F})$, care $\mathcal{O}$ -generează fascicolul $\mathcal{F}$ (i.e. oricare ar fi $a \in K$, $\mathcal{F}_a$ este $\mathcal{O}_a$ -generat de $f_1(a), \dots, f_N(a)$).

*) Teorema A și teorema B în cazul $p = 1$ au fost demonstrate de H. Cartan în 1950, [20], pentru anume domenii de olomorfie și subfascicole analitice coerente ale lui $\mathcal{O}^q$, printr-un raționament ce se extinde la varietățile Stein. Cazul $p > 1$ a fost considerat de Serre [21]. Uneori teoremele A și B sînt formulate împreună sub numele de teorema fundamentală a lui Oka, Cartan și Serre [64].

Se arată ușor că pentru K compact formularea 2 a teoremei A dată mai sus este echivalentă și cu formularea mai generală 1: $H^0(K, \underline{\mathcal{F}})$ generează $\underline{\mathcal{F}}$ peste $\underline{O}$.

Într-adevăr, să admitem formularea 1. Deoarece fascicolul $\underline{\mathcal{F}}$ este analitic coerent, orice punct $a \in K$ are o vecinătate U în K , astfel încît $\underline{\mathcal{F}}_U$ este generat de un număr finit de secțiuni $f_1, \dots, f_{N_a} \in \Gamma(U, \underline{\mathcal{F}})$. Prin ipoteză $\underline{\mathcal{F}}_a$ este $\underline{O}_a$ -generat de $H^0(K, \underline{\mathcal{F}})$, deci fiecare $f_j(a)$ este combinație liniară, cu coeficienți germeni de funcții olomorfe în a , de un număr finit de secțiuni globale ale lui $\underline{\mathcal{F}}$ pe K , secțiuni luate în punctul a . În concluzie, există un număr finit de secțiuni $F_1, \dots, F_{M_a} \in \Gamma(K, \underline{\mathcal{F}})$ astfel încît $f_j(a) = \sum_{k=1}^{M_a} \lambda_{jka} F_k(a)$, $\lambda_{jka} \in \underline{O}_a$, $j = 1, \dots, N_a$. Există atunci o vecinătate u a lui a în K , $u \subset U$, astfel încît

$$f_j = \sum_{k=1}^{M_a} \lambda_{jk} F_k, \quad j = 1, \dots, N_a \quad \text{și} \quad \lambda_{jk} \in \Gamma(u, \underline{O}).$$

Compactul K se acoperă cu un număr finit de vecinătăți u și se verifică imediat că secțiunile F_k — în număr finit — corespundătoare acestor vecinătăți u , generează $\underline{\mathcal{F}}$.

2. Propoziția 1. Fie X — o varietate analitică complexă paracompactă V resp. — un compact dintr-o varietate analitică complexă. Presupunem teorema B adevărată pentru X .

Dacă secțiunile $f_1, \dots, f_N$ din $\Gamma(X, \underline{\mathcal{F}})$ generează fascicolul analitic coerent $\underline{\mathcal{F}}$ peste X ca fascicol de $\underline{O}$ -module, atunci $f_1, \dots, f_N$ generează $\Gamma(X, \underline{\mathcal{F}})$ ca $\Gamma(X, \underline{O})$ -modul, (i.e. oricare ar fi secțiunea $f \in \Gamma(X, \underline{\mathcal{F}})$ există funcțiile $h_1, \dots, h_N$ olomorfe pe X , astfel încît $f = \sum_{j=1}^N h_j f_j$).

Fie u morfismul $\underline{O}^N \rightarrow \underline{\mathcal{F}}$ determinat de secțiunile f_j , $j = 1, \dots, N$. Notînd cu $\underline{Q} = \ker u$, putem scrie șirul exact

$$0 \rightarrow \underline{Q} \rightarrow \underline{O}^N \xrightarrow{u} \underline{\mathcal{F}} \rightarrow 0,$$

de unde aplicând teorema 11 din cap. II, § 8, nr. 2, obținem șirul exact de coomologie

$$\rightarrow \Gamma(X, \underline{O}^N) \xrightarrow{\tilde{u}} \Gamma(X, \underline{\mathcal{F}}) \rightarrow H^1(X, \underline{Q}) \rightarrow \dots$$

Cum fascicolul $\underline{Q}$ este analitic coerent după teorema lui Serre (teorema 3, cap. II, § 5, nr. 8), din teorema B rezultă $H^1(X, \underline{Q}) = 0$. Prin urmare $\tilde{u}$ este surjectiv. Dar $\tilde{u}$ asociază fiecărei secțiuni $h = (h_1, \dots, h_N) \in \Gamma(X, \underline{O}^N)$ secțiunea $\sum_{j=1}^N h_j f_j \in \Gamma(X, \underline{\mathcal{F}})$, ceea ce demonstrează afirmația noastră *).

Propoziția 2. Fie X — o varietate analitică complexă V paracompactă de dimensiune $\leq n$ în fiecare punct al ei resp. — un compact K dintr-o varietate analitică complexă V .

Dacă pe X este valabilă teorema A în formularea 2, i. e. pentru orice fascicol analitic coerent $\underline{\mathcal{F}}$ pe X există un șir exact

$$\underline{O}_X^N \xrightarrow{u_1} \underline{\mathcal{F}} \rightarrow 0 \quad (1)$$

și dacă $H^p(X, \underline{O}) = 0$, pentru $p \geq 1$, atunci teorema B este valabilă pentru X : $\bar{H}^p(X, \underline{\mathcal{F}}) = 0$.

Se demonstrează în teoria dimensiunii ([32], p. 60, teorema 6.1) că un spațiu topologic metrizabil și separabil de dimensiune reală $\leq n$ are următoarea proprietate: orice acoperire $\tilde{\mathcal{U}}$ a sa admite o rafinare $\mathcal{U}$, astfel încât intersecția a $n + 2$ mulțimi diferite arbitrare din $\mathcal{U}$ este întotdeauna vidă. Rezultatul se aplică spațiului X din enunț. După observația 6 din cap. II, § 7, nr. 5, oricare ar fi fascicolul $\underline{\mathcal{K}}$ de grupuri abeliene pe X avem

$$H^q(X, \underline{\mathcal{K}}) = 0, \quad (2)$$

pentru $q \geq m$ și $m = 2n + 1$.

*) Se vede că rezultatul este valabil pentru orice spațiu X paracompact, pe care s-a dat un fascicol de inele $\underline{\mathcal{A}}$ coerent și astfel încât pentru orice $\underline{\mathcal{F}}$ fascicol coerent de $\underline{\mathcal{A}}$ -module să avem A) o surjecție $u : \underline{\mathcal{A}}^N \rightarrow \underline{\mathcal{F}}$ și B) $H^1(X, \underline{\mathcal{F}}) = 0$.

Șirul (1) se poate completa cu fascicolul $\underline{Q}_1 = \ker u_1$. Notînd $\underline{Q}_0 = \underline{\mathcal{F}}$, vom scrie șirul exact

$$0 \rightarrow \underline{Q}_1 \rightarrow \underline{O}_X^{N_1} \xrightarrow{u_1} \underline{Q}_0 \rightarrow 0.$$

Deoarece $\underline{Q}_1$ este de asemenea un fascicol analitic coerent pe X , el este prin ipoteză citul unui fascicol $\underline{O}_X^{N_1}$, astfel încît repetînd procedeul formăm șirurile exacte

$$0 \rightarrow \underline{Q}_k \rightarrow \underline{O}_X^{N_k} \xrightarrow{u_k} \underline{Q}_{k-1} \rightarrow 0,$$

unde $\underline{Q}_k = \ker u_k$, $k = 1, 2, \dots$

Teorema șirului exact de coomologie și ipoteza $H^p(X, \underline{O}) = 0$, $p \geq 1$, din care rezultă $H^p(X, \underline{O}^q) = 0$, $p \geq 1$ și $q \geq 0$ (după propoziția 9 din cap. II, § 7, nr. 6), implică deci izomorfismele

$$H^p(X, \underline{Q}_{k-1}) \simeq H^{p+1}(X, \underline{Q}_k),$$

pentru $p \geq 1$ și $k \geq 1$. Prin urmare,

$$H^p(X, \underline{\mathcal{F}}) \simeq H^{p+m}(X, \underline{Q}_m)$$

și conform (2), $H^p(X, \underline{\mathcal{F}}) = 0^*$.

§ 4. Teoremele A și B pentru unele compacte din $\mathbb{C}^n$

Vom demonstra mai întîi teoremele A și B în cîteva cazuri particulare, pe care ne vom baza în cap. VI.

*) Propoziția 2 poate fi formulată pentru un spațiu topologic X paracompact, cu proprietatea i) din observația 6, cap. II, § 7, nr. 5. Dacă $\underline{\mathcal{A}}$ este un fascicol de inele coerent pe X , astfel încît $H^p(X, \underline{\mathcal{A}}) = 0$, $p \geq 1$ și dacă pentru orice fascicol de $\underline{\mathcal{A}}$ -module $\underline{\mathcal{F}}$ coerent pe X există un șir exact $\underline{\mathcal{A}}^{N_1} \xrightarrow{u_1} \underline{\mathcal{F}} \rightarrow 0$, atunci $H^p(X, \underline{\mathcal{F}}) = 0$, $p \geq 1$.

1. Teoremele A și B pentru cub.

Teorema 1. (Teorema fundamentală a lui Oka, Cartan și Serre.) Teoremele A și B sînt valabile pentru un cub K din $\mathbb{C}^n$.

Conform teoremei 1 din § 2 și propoziției 2 din § 3 va fi suficient să demonstrăm teorema A. În acest scop vom folosi o inducție după dimensiunea reală p a lui K .

Dacă $p = 0$, cubul K se reduce la un punct, iar teorema A este verificată ca o consecință a însăși definiției fasciculelor analitice coerente.

Presupunem teorema A adevărată pentru cuburile din $\mathbb{C}^n$ de dimensiune p . Conform teoremei 1 din § 2 și propoziției 2 din § 3, teorema B este de asemenea adevărată pentru aceste cuburi și prin urmare, propoziția 1 din § 3 este și ea valabilă pentru ele.

Fie atunci K un cub de dimensiune $p + 1$ și $\mathcal{F}$ un fascicol analitic coerent pe K .

Vom alege un hiperplan de coordonate, astfel încît intersecția lui K cu un hiperplan paralel cu acesta să fie un cub k de dimensiune p sau mulțimea vidă. Restricția lui $\mathcal{F}$ la k este un fascicol analitic coerent și după ipoteza inducției există un șir exact

$$\mathcal{O}_k^N \xrightarrow{u_k} \mathcal{F}_k \rightarrow 0.$$

Conform propoziției 1 și teoremelor 2 și 3 din cap. II, § 6, există o vecinătate U a lui k în $\mathbb{C}^n$, astfel încît:

$\mathcal{F}_k$ se prelungește la un fascicol analitic coerent pe U , izomorf cu $\mathcal{F}$ pe $K \cap U$, morfismul u_k se prelungește la $K \cap U$ printr-un morfism, care va fi notat tot cu u , și avem încă șirul exact

$\mathcal{O}_{K \cap U}^N \xrightarrow{u} \mathcal{F}_{K \cap U} \rightarrow 0$. După lema Borel-Lebesgue putem descompune deci K într-un număr finit de cuburi K_j de dimensiune $p + 1$, $j = 1, \dots, m$, prin hiperplane paralele cu hiperplanul de mai sus, astfel încît fiecare K_j să se găsească într-o vecinătate U de tipul de mai sus, deci pentru fiecare j să avem un șir exact $\mathcal{O}_{-K_j}^N \rightarrow \mathcal{F}_{K_j} \rightarrow 0$, iar $K_j \cap K_{j+1} = k_{j,j+1}$ să fie un cub p -dimensional, $j = 1, \dots, m - 1$.

Teorema A se va obține aplicînd de un număr finit de ori

Propoziția 1. Fie K' și K'' două cuburi de dimensiune $p + 1$, astfel încît $k = K' \cap K''$ să fie un cub de dimensiune p . Dacă $\mathcal{F}$ este un fascicol analitic coerent pe $K' \cup K''$ și dacă $\mathcal{F}$ este cît al unui fascicol $\mathcal{O}^{N'}$ pe K' și al unui fascicol $\mathcal{O}^{N''}$ pe K'' atunci $\mathcal{F}$ este cît al fascicolului $\mathcal{O}^{N'+N''}$ pe $K' \cup K''$.

Să notăm cu $f_1, \dots, f_{N'}$ secțiunile din $\Gamma(K', \mathcal{F})$, și cu $g_1, \dots, g_{N''}$ secțiunile din $\Gamma(K'', \mathcal{F})$, care determină morfismele surjective

$$\mathcal{O}_{K'}^{N'} \rightarrow \mathcal{F}_{K'} \text{ resp. } \mathcal{O}_{K''}^{N''} \rightarrow \mathcal{F}_{K''}. \text{ Vom folosi scrierea } f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{N'} \end{pmatrix} \text{ și } g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{N''} \end{pmatrix}.$$

Pe cubul k fascicolul $\mathcal{F}$ este generat atît de $f_j|_k$, $j = 1, \dots, N'$, cît și de $g_i|_k$, $i = 1, \dots, N''$. Conform ipotezei inducției, propoziția 1 din § 3 este valabilă pentru k și prin urmare există matricile olomorfe γ_1 și γ_2 de ordinul N' resp. N'' într-o vecinătate a lui k^*), astfel încît să avem pe k

$$\gamma_1 f = g \text{ și } \gamma_2 g = f.$$

Matricea

$$c = \begin{pmatrix} -\mathfrak{I} & \gamma_2 \\ 0 & \mathfrak{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{I} & 0 \\ \gamma_1 & \mathfrak{I} \end{pmatrix}$$

este olomorfă nesingulară într-o vecinătate a lui k .

Deoarece $\begin{pmatrix} \mathfrak{I} & 0 \\ \gamma_1 & \mathfrak{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ și $\begin{pmatrix} -\mathfrak{I} & \gamma_2 \\ 0 & \mathfrak{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$ avem pe k

$$c \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}.$$

Teorema lui Cartan despre matricile olomorfe nesingulare (teorema 1 din cap. IV, § 7) asigură însă existența matricilor

*) Se aplică prelungirea fasciculelor coerente (teorema 3, cap. II, § 6, nr. 4) și a secțiunilor (propoziția 2, cap. II, § 8, nr. 4).

olomorfe nesingulare c' pe o vecinătate a lui K' și c'' pe o vecinătate a lui K'' , astfel încît $c = c''^{-1} c'$ pe cubul k .*)

Pe acest cub,

$$c' \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} = c'' \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix},$$

deci putem defini secțiunile $F_1, \dots, F_{N'+N''}$ din $\Gamma(K' \cup K'', \mathcal{F})$,

astfel încît pentru $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_{N'+N''} \end{pmatrix}$ să avem $F = c' \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$ pe K' și

$$F = c'' \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} \text{ pe } K''.$$

Morfismul $\mathcal{O}_{K' \cup K''}^{N'+N''} \rightarrow \mathcal{F}$ determinat de secțiunile $F_1, \dots, F_{N'+N''}$ este surjectiv. Într-adevăr dacă $a \in K'$ și $\alpha_a = (\alpha_{1a}, \dots, \alpha_{N'a}) \in \mathcal{O}_a^{N'}$, există $\beta_a = (\beta_{1a}, \dots, \beta_{N'+N'',a}) \in \mathcal{O}_a^{N'+N''}$, astfel încît $\beta_a c'(a) = (\alpha_a, 0)$. Analog se procedează pentru $a \in K''$. Teorema A pentru cub este astfel demonstrată.

Observația 1. Uneori se consideră următoarea formă care generalizează teorema A pentru un compact K :

A'. Orice fascicol analitic coerent $\mathcal{F}$ pe K este cîtul unui fascicol analitic coerent $\mathcal{Q}$ pe K , care este local izomorf cu $\mathcal{O}^N$.

Folosind fibratele analitice se arată ușor că teorema A' este echivalentă în cazul cubului cu teorema A. Într-adevăr, fascicolul $\mathcal{Q}$ este izomorf cu fascicolul germenilor de secțiuni într-un fibrat analitic vectorial de ordinul N pe K (propoziția 3, cap. IV, § 8, nr. 3). Dar acesta este trivial (teorema 2, cap. IV, § 8, nr. 5) și prin urmare $\mathcal{Q}$ este izomorf cu $\mathcal{O}^N$ **).

*) Prin ipoteză $K' = I' \times k$ și $K'' = I'' \times k$, unde $I = I' \cup I''$, I' și I'' sînt intervale 1-dimensionale, iar $I' \cap I''$ — un punct din k . Completăm k la un cub $(n-1)$ -dimensional de forma $k \times x$ (x cub $(n-p-1)$ -dimensional convenabil ales), care să fie inclus în vecinătatea lui k , în care c este o matrice olomorfă nesingulară. Aplicăm teorema lui Cartan pentru $K' \times x$ și $K'' \times x$ cu intersecția $k \times x$, rolul lui x_1 fiind luat de variabila de pe intervalul I .

**) Evident, raționamentul a fost efectuat pe o vecinătate a lui K , unde putem prelungi $\mathcal{Q}$.

2. Teoremele A și B pentru polidiscul închis

Teorema 2. *Teoremele A și B sînt adevărate pentru orice polidisc închis P din $\mathbb{C}^n$.*

1) În acest scop, să stabilim mai întîi

Propoziția 2. *Un polidisc închis P are un sistem fundamental de vecinătăți închise L , fiecare izomorfă analitic cu un cub.*

Într-adevăr P are un sistem fundamental de vecinătăți π polidiscuri (deschise). Fiecare polidisc π este izomorf analitic cu un cub deschis $\tilde{K}$, deoarece π este produs cartezian de n discuri și fiecare este conform echivalent cu un pătrat deschis. Notînd cu φ acest izomorfism analitic, $\varphi: \pi \rightarrow \tilde{K}$, dacă $\pi \supset P$ atunci $\tilde{K} \supset \varphi(P)$, care este un compact, prin urmare există un cub K^* , astfel încît $\varphi(P) \subset K^*$ și $K^* \subset \tilde{K}$. Mulțimea $\varphi^{-1}(K^*) = L$ este o vecinătate închisă a lui P , inclusă în π și izomorfă analitic cu un cub. Atunci cînd π descrie sistemul fundamental format de polidiscurile ce includ P , L formează un sistem fundamental de vecinătăți închise ale lui P , izomorfe analitic cu cuburi.

2) Să revenim acum la demonstrația teoremei 2.

Deoarece teoremele A și B sînt adevărate pentru cuburi, ele rămîn valabile și pentru fiecare L pe baza izomorfismului analitic φ .

Dat un fascicol analitic coerent $\mathcal{F}$ pe polidiscul P , el se prelungește la un fascicol analitic coerent $\mathcal{Q}$ pe o vecinătate U a lui P . Fie $L \subset U$. Din teorema A pentru L , deducem că există un morfism surjectiv: $\mathcal{O}_L^N \rightarrow \mathcal{Q}_L$, care restrîns la P ne dă un șir exact $\mathcal{O}_P^N \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$, deci teorema A este valabilă și pentru P . După teorema B pentru fiecare $L \subset U$ avem $H^p(L, \mathcal{Q}) = 0$, $p \geq 1$. Aplicînd însă propoziția 5 din cap. II, § 8, nr. 5, deducem $H^p(P, \mathcal{F}) = \varinjlim H^p(L, \mathcal{Q}) = 0$, ceea ce demonstrează teorema B pentru P .

Raționamentul de mai sus se aplică în condiții mai generale:

Propoziția 3. *Fie P un compact dintr-o varietate analitică complexă V , avînd un sistem fundamental de vecinătăți compacte L pentru care A și B sînt adevărate. Atunci aceste teoreme sînt valabile și pentru P .*

Să remarcăm că în ipoteza V paracompact, L pot fi numai închise.

3. Teorema 3. Fie P un polidisc închis din $\mathbb{C}^n$, π un polidisc deschis, care include polidiscul P și W o varietate analitică, care este subvarietate a lui π . Atunci teoremele A și B sînt adevărate pentru $W \cap P$, considerat ca o submulțime a lui W .

Vom aplica rezultate demonstrate în cap. III, § 8, în cazul particular în care varietatea analitică complexă $V = \pi^*$, subvarietatea ei este W , submulțimea $X = P$, iar $Y = W \cap P$.

Fie $\underline{\mathcal{F}}$ un fascicol analitic coerent de $\underline{\mathcal{O}}(W)$ -module pe $W \cap P$. Să notăm cu $\widetilde{\underline{\mathcal{F}}}$ extensia sa trivială la P . Conform propoziției 12 din cap. III, § 8, nr. 4, $\widetilde{\underline{\mathcal{F}}}$ este un fascicol coerent de $\underline{\mathcal{O}}(V)$ -module pe P .

Deoarece teorema A este adevărată pentru P , există un șir exact

$$\underline{\mathcal{O}}(V)_P^N \rightarrow \widetilde{\underline{\mathcal{F}}} \rightarrow 0$$

pe P . Prin restricție la $W \cap P$, obținem deci un șir exact

$$\underline{\mathcal{O}}(V)_{W \cap P}^N \xrightarrow{\psi} \underline{\mathcal{F}} \rightarrow 0$$

pe $W \cap P$, unde $\underline{\mathcal{F}}$ este interpretat ca fascicol de $\underline{\mathcal{O}}(V)$ -module. Reamintim: dacă $a \in W \cap P$ și $f \in \underline{\mathcal{F}}_a$, oricare ar fi $\alpha_a \in \underline{\mathcal{O}}(V)_a$, prin definiție

$$\alpha_a f = \alpha_a \psi f, \quad (1)$$

unde $\alpha_a \psi = \tau_W(\alpha_a)$ (cap. III, § 8, nr. 3 și nr. 4, (6)).

Fie $f_1, \dots, f_N \in \Gamma(W \cap P, \underline{\mathcal{F}})$ secțiunile care determină morfismul ψ . Ele determină și un morfism

$$\underline{\mathcal{O}}(W)_{W \cap P}^N \xrightarrow{\psi} \underline{\mathcal{F}},$$

care este de asemenea surjectiv. Într-adevăr, oricare ar fi $f_a \in \underline{\mathcal{F}}_a$, există $\alpha_{ja} \in \underline{\mathcal{O}}(V)_a$, $j = 1, \dots, N$, astfel încît $\psi(\alpha_{1a}, \dots, \alpha_{Na}) =$

$$= \sum_{j=1}^N \alpha_{ja} f_j(a) = f_a.$$

*) Evident $\underline{\mathcal{O}}(V) = \underline{\mathcal{O}}_V$, unde $\underline{\mathcal{O}} = \underline{\mathcal{O}}(\mathbb{C}^n)$.

Însă după (1) putem scrie $\sum_{j=1}^N \alpha_{ja} f_j(a) = \sum_{j=1}^N \alpha_{jaW} f_j(a)$, deci $\chi(\alpha_{1aW}, \dots, \alpha_{NaW}) = f_a$. În concluzie, teorema A este valabilă pe $W \cap P$.

Teorema B pentru $W \cap P$ rezultă însă imediat din propoziția 8, cap. II, § 7, nr. 6, după care $H^p(W \cap P, \underline{\mathcal{F}}) = H^p(P, \widetilde{\mathcal{F}})$ și din faptul că teorema B este adevărată pentru P .

VI TEORIA FUNCȚIILOR ANALITICE PE VARIETĂȚI STEIN

§ 1. Varietăți Stein

Vom studia în acest capitol o clasă deosebit de importantă de varietăți analitice complexe, varietățile Stein. Ele au fost introduse de K. Stein în 1951 și denumite de el varietăți olomorf complete [80]. Aceste varietăți au constituit un cadru adecvat dezvoltării teoriei funcțiilor analitice de mai multe variabile complexe, suficient de general pentru a cuprinde o serie de exemple importante și în același timp suficient de bogat în proprietăți. Pe o varietate Stein sînt adevărate teoremele fundamentale A și B ale lui Cartan, deci și consecințele lor în legătură cu problemele Cousin sau cu alte aspecte ale teoriei. Multe rezultate relative la suprafețele riemanniene deschise se generalizează pentru varietățile Stein [5], [6].

Definiția 1. O varietate analitică complexă V de dimensiune n , numerabilă la infinit, se numește o *varietate Stein*, dacă V este

- (α) olomorf convexă (cap. III, § 5, nr. 6, definiția 6)
- (β) olomorf separată (cap. III, § 5, nr. 6, definiția 5) și
- (γ) oricare ar fi punctul $a \in V$, există n funcții olomorfe pe V , care formează un sistem de coordonate locale în punctul a (cap. III, § 1, nr. 3, definiția 27).

Menționăm — fără demonstrații — unele rezultate, care nu vor fi aplicate în paragrafele următoare.

Axiomele de definiție ale unei varietăți Stein pot fi simplificate. Astfel, H. Grauert a demonstrat că existența unei baze numerabile pentru deschise rezultă din condițiile (α), (β) și (γ) [38].

Mai mult s-a demonstrat [6], că o varietate Stein poate fi definită ca o varietate analitică complexă V , care satisface următoarele două axiome:

(α) V este olomorfe convexă și

(δ) V este K -completă, i. e. pentru orice punct $a \in V$ există un număr finit de funcții $F_1, \dots, F_k \in \mathcal{O}(V)$ și o vecinătate U a lui a , astfel încât aplicația $F: V \rightarrow \mathbb{C}^k$ de componente $F_1, \dots, F_k$ să fie „aproape biunivocă” pe U^*). Menționăm că aplicația F se numește *aproape biunivocă* pe U , dacă pentru orice punct $Z \in \mathbb{C}^k$, mulțimea $F^{-1}(Z) \cap U$ este formată din puncte izolate.

Axiomele (α)—(γ) arată că pe varietățile Stein există suficient de multe funcții olomorfe. În cazul 1-dimensional se disting două posibilități: 1) Suprafețele riemanniene compacte nu sînt varietăți Stein, deoarece singurele funcții olomorfe pe o astfel de suprafață sînt constantele. 2) Suprafețele riemanniene necompacte, în particular deschisele din $\mathbb{C}$, sînt varietăți Stein, după cum au arătat H. Behnke și K. Stein [8]. În cazul $n > 1$, pe lângă varietățile analitice complexe compacte, există și varietăți analitice complexe necompacte, omeomorfe cu $\mathbb{R}^{2n}$, pe care singurele funcții olomorfe sînt constantele. Un exemplu îl constituie varietățile construite de E. Calabi și B. Eckmann ([14] sau [35], p. 282).**)

Indicăm cîteva exemple de varietăți Stein:

1) Domeniile de olomorfie etalate în $\mathbb{C}^n$ (cap. III, § 5), în particular domeniile de olomorfie din $\mathbb{C}^n$. (Conform rezultatelor din cap. III, § 5, nr. 5 și nr. 6, acestea coincid cu domeniile din $\mathbb{C}^n$, care sînt varietăți Stein).

2) Subvarietățile analitice închise ale unei varietăți Stein (cap. III, § 8, nr. 2), în particular subvarietățile analitice închise din $\mathbb{C}^n$.

3) Produsul direct a două varietăți Stein, în particular deschisele $D_1 \times \dots \times D_n \subset \mathbb{C}^n$ cu $D_j \subset \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, n$.

4) Mulțimea $W = \{a \mid a \in V, f(a) \neq 0\}$, unde V este o varietate Stein și $f \in \mathcal{O}(V)$, în particular varietatea $GL(m, \mathbb{C})$.

*) Se arată că se poate lua $k = n$, dimensiunea lui V în a .

**) Pentru $n = 1$, spațiul euclidian $\mathbb{R}^2$ se poate organiza ca varietate analitică complexă, numai în două moduri diferite obținînd planul resp. cercul, pe cînd $\mathbb{R}^{2n}$, $n > 1$, admite o infinitate nenumerabilă de structuri analitice complexe ([5], C; [6], p. 28).

Teorema lui R. Remmert ([6], p. 33) și R. Narasimhan [65] arată că orice varietate Stein de dimensiune n se poate realiza global ca o subvarietate analitică închisă a lui $\mathbb{C}^{2n+1}$.

§ 2. Teoremele A și B pentru unele compacte dintr-o varietate Stein

În acest paragraf vom considera compacte K dintr-o varietate Stein V , care coincid cu $O(V)$ -înfașurătoarea lor $\hat{K}_{O(V)}$ (cap. III, § 5, nr. 2, definiția 3), și vom nota prescurtat $\hat{K}_{O(V)} = \hat{K}$. Vom stabili teoremele A și B pentru aceste compacte construind un sistem fundamental de vecinătăți izomorfe analitic cu compactele $Y = P \cap W$ din teorema 3, cap. V, § 4, nr. 3 și apoi aplicând propoziția 3, cap. V, § 4, nr. 2.

Propoziția 1. *Un compact K dintr-o varietate Stein V , pentru care $\hat{K} = K$, are un sistem fundamental de vecinătăți compacte L , cu următoarele proprietăți: Fiecărui compact L îi corespunde un deschis $\Lambda \supset L$, un polidisc deschis $\Pi \subset \mathbb{C}^N$, un polidisc închis $P \subset \Pi$ și N funcții $f_j \in O(V)$, $j = 1, \dots, N$, astfel încât aplicația $\Phi: V \rightarrow \mathbb{C}^N$ de componente f_j reprezintă Λ pe o subvarietate analitică $\Phi(\Lambda)$ a lui Π și $\Phi(L) = \Phi(\Lambda) \cap P$.*

1) Fie Ω un deschis relativ compact din V , care include K . Vom construi Λ în Ω : Cum $\hat{K} = K$, oricare ar fi punctul $a \in \partial\Omega$ există o funcție $f \in O(V)$, cu $\|f\|_K < 1$ și $|f(a)| > 1$ și, deoarece f este continuă, $|f(b)| > 1$ pentru b dintr-o vecinătate v a lui a . Să remarcăm însă că $\partial\Omega$ este un compact din V . Prin urmare, putem acoperi $\partial\Omega$ cu un număr finit N' de vecinătăți v și avem N' funcții $f_1, \dots, f_{N'} \in O(V)$, astfel încât $\|f_j\|_K < 1$, $j = 1, \dots, N'$, iar $\max |f_j(a)| > 1$ oricare ar fi $a \in \partial\Omega$. Vom lua $\Lambda = \{a \mid a \in \Omega, |f_j(a)| < 1, j = 1, \dots, N'\}$. Evident Λ este un deschis relativ compact din V , $K \subset \Lambda$ și $\bar{\Lambda} \cap \partial\Omega = \emptyset$.

2) Fie θ un număr ales astfel încât $\|f_j\|_K < \theta$, $j = 1, \dots, N'$ și $\theta < 1$. Pentru fiecare $\rho \in (\theta, 1)$, notăm cu $M = \{a \mid a \in \Omega,$

$|f_j(a)| \leq \rho$, $j = 1, \dots, N'$. Evident, $K \subset M_\rho \subset \Lambda$ și M_ρ este compact.

Să notăm polidiscul $U_r, \dots, (0)$ din $\mathbb{C}^{N'}$ de centru 0 și poliraza $(r, \dots, r)$ cu $U_r^{N'}(0)$. Aplicația $\Phi': V \rightarrow \mathbb{C}^{N'}$ de componente f_j , $j = 1, \dots, N'$, duce Λ într-o mulțime $\Phi'(\Lambda) \subset U_1^{N'}(0)$. Vom însemna tot cu Φ' aplicația $\Lambda \rightarrow U_1^{N'}(0)$ obținută prin restricție și corestricție din Φ' . Această aplicație este *proprie*. Într-adevăr, oricare ar fi compactul $k \subset U_1^{N'}(0)$, există un număr $\rho \in (0, 1)$, astfel încît $k \subset \bar{U}_\rho^{N'}(0)$. Rezultă că $\Phi'^{-1}(k)$ este o mulțime închisă din M_ρ , prin urmare ea este compactă.

3) În cele ce urmează vom completa aplicația Φ' printr-o aplicație $\Psi: \Lambda \rightarrow U_R^{N-N'}(0)$ de componente $f_{N'+1}, \dots, f_N$, (R o constantă ce va fi aleasă mai jos), astfel încît aplicația $\Phi = (\Phi', \Psi): \Lambda \rightarrow \Pi = U_1^{N'}(0) \times U_R^{N-N'}(0)$, de componente $f_1, \dots, f_N$, să aibă rangul n și să fie injectivă, cu scopul de a aplica propoziția 6 din cap. III, § 8, nr.2. Să remarcăm că prin această completare Φ rămîne *proprie*. Într-adevăr, dacă x este un compact din $U_1^{N'}(0) \times U_R^{N-N'}(0)$ există polirazele ρ și r , astfel încît $x \subset \bar{U}_\rho^{N'}(0) \times \bar{U}_r^{N-N'}(0)$. Prin urmare $\Phi^{-1}(x) \subset M_\rho \cap \Psi^{-1}[\bar{U}_r^{N-N'}(0)]$ și este compact.

4) Vom completa mai întîi Φ' pentru a realiza condiția relativă la rangul n . În acest scop folosim condiția (γ) din definiția varietății Stein: Oricare ar fi punctul $a \in V$, există o vecinătate u a lui a și n funcții $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n \in \mathcal{O}(V)$, astfel încît aplicația $\tilde{F}: u \rightarrow \mathbb{C}^n$ de componente $\tilde{f}_j$ este un izomorfism analitic al lui u pe un deschis din $\mathbb{C}^n$. Pentru fiecare punct $a \in \bar{\Lambda}$, avem astfel o vecinătate u , pe care o vom presupune relativ compactă. Cu un număr finit de vecinătăți u^v , $v = 1, \dots, N_0$, acoperim $\bar{\Lambda}$. Fie $\tilde{f}_j^v$ componentele izomorfismului $\tilde{F}$ corespunzător lui $u = u^v$. Aplicația Φ'' de componente $(f_1, \dots, f_{N''}) = (f_1, \dots, f_{N'}, \tilde{f}_1^1, \dots, \tilde{f}_n^1, \dots, \tilde{f}_1^{N_0}, \dots, \tilde{f}_n^{N_0})$, $N'' = N' + nN_0$, omomorfă pe Λ cu valori în $\mathbb{C}^{N''}$, are rangul n în fiecare punct din Λ .

5) Vom completa acum aplicația Φ'' pentru a obține o aplicație injectivă. Conform condiției (β) din definiția varietății Stein pentru orice pereche de puncte a și b diferite din V există o funcție $f \in \mathcal{O}(V)$ cu proprietatea $f(a) \neq f(b)$, deci există două vecinătăți ω_a și ω_b ale acestor puncte, astfel încît $f(\omega_a) \cap f(\omega_b) = \emptyset$. Fixăm

arbitrar un punct a din $\bar{\Lambda}$. Fie $a \in u^v$. Pentru fiecare $b \in \bar{\Lambda} - u^v$ avem ω_a și ω_b . Cu un număr finit de vecinătăți ω_{b_j} acoperim $\bar{\Lambda} - u^v$ și luăm $\omega^a = \bigcap_j \omega_{a,j}$ unde cu $\omega_{a,j}$ am notat vecinătatea ω_a corespunzătoare perechii de puncte a, b_j . Cu un număr finit de vecinătăți ω^{a_h} acoperim $\bar{\Lambda}$. Am pus astfel în evidență un număr finit de puncte diferite a_h, b_{jh} , de vecinătăți ω^{a_h} și $\omega_{b_{jh}}$ și de funcții f , pe care le vom nota f_{hj} , astfel încît

$$f_{hj}(\omega^{a_h}) \cap f_{hj}(\omega_{b_{jh}}) = \emptyset. \quad (1)$$

Formăm aplicația Φ de componente $f_1, \dots, f_N$ unde $f_{N'+1}, \dots, f_N$ sint aplicațiile f_{hj} numerotate într-o ordine oarecare. Luînd $R > \max_{j=N'+1, \dots, N} \|f_j\|_{\bar{\Lambda}}$, păstrăm notația Φ pentru restricția aplicației Φ de mai sus la Λ și corestricția ei la $\Pi = U_1^{N'}(0) \times U_R^{N-N'}(0)$. Conform 3), aplicația Φ este proprie și conform 4), ea este de rang n . Să verificăm că Φ este și injectivă: Fie a și b două puncte diferite din Λ . Dacă există un indice v astfel încît $a \in u^v$ și $b \in u^v$, atunci conform 4) printre funcțiile $\tilde{f}_j^v$ există cel puțin una, astfel încît $\tilde{f}_j^v(a) \neq \tilde{f}_j^v(b)$ și $\Phi(a) \neq \Phi(b)$. Dacă nu există indicii j și h , astfel încît $a \in \omega^{a_h}$ și $b \in \omega_{b_{jh}}$, deci conform (1), deducem din nou că $\Phi(a) \neq \Phi(b)$.

În concluzie am determinat deschisul $\Lambda \supset K$ și aplicația Φ , astfel încît $\Phi(\Lambda)$ să fie o subvarietate analitică n -dimensională a unui polidisc $\pi \subset \mathbb{C}^N$.

6) Să alegem un număr A , astfel încît $\|f_j\|_K < A < R$, $j = N'+1, \dots, N$. Vom lua $P = \bar{U}_0^{N'}(0) \times \bar{U}_A^{N-N'}(0)$, unde $\rho \in (0, 1)$. Evident $\Phi(K) \subset \bar{P}$, iar $P \cap \Phi(\Lambda)$ este compact. Mulțimea $L = \Phi^{-1}[P \cap \Phi(\Lambda)] \cap \Lambda = \Phi^{-1}(P) \cap \Lambda$ este compactă, $K \subset \bar{L}$ și $\Phi(L) = P \cap \Phi(\Lambda)$. În acest fel, propoziția este demonstrată.

Teorema 1. *Teoremele A și B (în formularea 2, cap. V, § 3, nr. 1) sînt adevărate pentru orice compact K dintr-o varietate Stein V , pentru care $\hat{K} = K$.*

Compactul K admite un sistem fundamental de vecinătăți L cu proprietățile stabilite în propoziția 1. După teorema 3 din

cap. V, § 4, nr. 3, teoremele A și B sînt adevărate pentru $\Phi(L)$, iar în virtutea izomorfismului analitic Φ , ele sînt adevărate și pentru L . Aplicînd propoziția 3 din cap. V, § 4, nr. 2, deducem că teoremele A și B sînt valabile pentru K .

Teorema 2. *Dacă V este o varietate Stein și K un compact din V cu proprietatea $\hat{K} = K$, atunci orice funcție f olomorfă pe K se poate aproxima uniform pe K cu funcții olomorfe pe V .*

Reluăm notațiile din propoziția 1: există o vecinătate compactă L a lui K , astfel încît f se prelungește la o funcție olomorfă pe L , pe care o vom nota tot f . Prin izomorfismul analitic Φ acestei funcții îi corespunde funcția $F = f \circ \Phi^{-1}$ olomorfă pe $W \cap P$, unde am notat pentru prescurtare $\Phi(L) = W$. Conform cap. III, § 8, nr. 3, (4) avem pe varietatea π șirul exact

$$0 \rightarrow \underline{\mathcal{J}}(W) \rightarrow \underline{\mathcal{O}}(\pi) \rightarrow \underline{\mathcal{O}}(W) \rightarrow 0,$$

care prin restricție la P ne dă

$$0 \rightarrow \underline{\mathcal{J}}(W)_P \rightarrow \underline{\mathcal{O}}(C^n)_P \xrightarrow{\tau} \widetilde{\underline{\mathcal{O}}(W)_{W \cap P}}^P \rightarrow 0.$$

Aplicînd teorema șirului exact de coomologie (cap. II, § 8, nr. 2, teorema 11), obținem însă șirul exact

$$\Gamma(P, \underline{\mathcal{O}}(C^n)) \xrightarrow{\tilde{\tau}} \Gamma[P, \widetilde{\underline{\mathcal{O}}(W)_{W \cap P}}^P] \rightarrow H^1[P, \underline{\mathcal{J}}(W)]. \quad (2)$$

După teorema lui Cartan (cap. III, § 8, nr. 3, teorema 1), fasciculul $\underline{\mathcal{J}}(W)$ este analitic coerent și conform teoremei 2 din cap. V, § 4, nr. 2, teorema B este valabilă pentru polidiscul P . Prin urmare, $H^1[P, \underline{\mathcal{J}}(W)] = 0$. Rezultă astfel că aplicația $\tilde{\tau}$ din (2) este surjectivă. Se vede însă imediat că $\tilde{\tau}$ asociază fiecărei funcții G olomorfe pe P o funcție $\tilde{\tau}(G)$ egală cu G pe $W \cap P$ și cu 0 pe $P - W$.

Pentru secțiunea $\tilde{F} \in \Gamma[P, \widetilde{\underline{\mathcal{O}}(W)_{W \cap P}}^P]$ egală cu F pe $W \cap P$ și cu 0 pe $P - W$ există deci $G \in \mathcal{O}(P)$, astfel încît $G|_{W \cap P} = F$. Însă G se dezvoltă în serie Taylor uniform convergentă pe polidiscul închis P (cap. I, § 9, nr. 2, teorema 2), $G(Z) = \sum_{j \in \mathbb{N}^N} a_{j_1 \dots j_N} Z_1^{j_1} \dots Z_N^{j_N}$.

Polinoamele $G_v(Z) = \sum_{j \in \mathbb{N}^N, |j| \leq v} a_{j_1 \dots j_N} Z_1^{j_1} \dots Z_N^{j_N}$ formează un șir

de funcții olomorfe în $\mathbb{C}^N$ care aproximează F uniform pe $W \cap P$. Să revenim prin Φ pe varietatea V . Funcțiile $g_v = G_v \circ \Phi$ sînt polinoame în f_j , deci funcții olomorfe pe V , și converg uniform pe L la f .

§ 3. Spațiul Fréchet $H^0(V, \mathcal{F})$

1. Fie $\mathcal{F}$ un fascicol analitic coerent pe varietatea Stein V . Cu ajutorul unei familii numerabile de seminorme vom înzestra $H^0(V, \mathcal{F}) = \Gamma(V, \mathcal{F})$ cu o topologie de spațiu Fréchet (cap. I, § 7, nr. 2)*). În acest scop vom folosi o exhaustiune a lui V cu compacte K_p , avînd următoarele proprietăți: 1° $K_p \subset \overset{\circ}{K}_{p+1}$, 2° $\bigcup_{p=1}^{\infty} K_p = V$ și 3° $\widehat{K}_p = K_p$.

Propoziția 1. *Pe o varietate Stein V există un șir de compacte K_p cu proprietățile 1° — 3°.*

Într-adevăr, V fiind numerabilă la infinit, există un șir de compacte k_v , cu primele două proprietăți. Pe de altă parte, oricare ar fi compactul k , avem $\widehat{k} = \widehat{k}$ (cap. III, § 5, nr. 2, propoziția 1). Vom lua $K_1 = \widehat{k}_1$ și apoi $K_{p+1} = \widehat{k}_{v_p}$, unde v_p este indicele v minim pentru care $K_p \subset \overset{\circ}{k}_v$, $p=1, 2, \dots$.

Conform teoremei 1 din § 2 și ipotezei 3°, teoremele A și B sînt valabile pentru fiecare compact K_p .

Aplicația $H^0(K, \mathcal{O}^N) \rightarrow \mathbb{R}_+$, care asociază fiecărui $c = (c_1, \dots, c_n)$ din $H^0(K_p, \mathcal{O}^N)$

$$\|c\|_p = \max_j \|c_j\|_{K_p}, \quad (1)$$

este o normă pe $H^0(K_p, \mathcal{O}^N)**).$

*) Pentru orice $M \subset V$, considerăm $\Gamma(M, \mathcal{F})$ ca spațiu vectorial peste $\mathbb{C}$.

**) Evident, $\|c\|_p = \sup_{a \in K_p} (\max_j |c_j(a)|)$. Uneori se folosește norma echi-

valentă $\sup_{a \in K_p} \sum_{j=1}^N |c_j(a)|$.

Aplicînd teoremele A și B compactului K_p , deducem că există șirurile exacte

$$\underline{O}_{K_p}^{N_p} \xrightarrow{\varphi} \underline{\mathcal{F}}_{K_p} \rightarrow 0 \quad (2)$$

și

$$H^0(K_p, \underline{O}_{K_p}^{N_p}) \xrightarrow{\tilde{\varphi}} H^0(K_p, \underline{\mathcal{F}}) \rightarrow 0. \quad (3)$$

Introducem pe $H^0(K_p, \underline{\mathcal{F}})$ seminorma cît corespunzătoare omomorfismului $\tilde{\varphi}$. Pentru fiecare $f \in H^0(K_p, \underline{\mathcal{F}})$ definim

$$\|f\|_p = \inf_{c \in \tilde{\varphi}^{-1}(f)} \|c\|_p. \quad (4)$$

Să explicităm $\tilde{\varphi}^{-1}(f)$. Fie $f_1, \dots, f_{N_p}$ secțiunile din $H^0(K_p, \underline{\mathcal{F}})$, care determină morfismul φ (cap. II, § 5, nr. 2, propoziția 2). Atunci după propoziția 1, cap. V, § 3, nr. 2, orice $f \in H^0(K_p, \underline{\mathcal{F}})$ se poate scrie sub forma

$$f = \sum_{j=1}^{N_p} c_j f_j$$

cu $c_j \in H^0(K_p, \underline{O})$. Evident $\tilde{\varphi}^{-1}(f) = \left\{ c \mid c \in H^0(K_p, \underline{O}^{N_p}), \text{ cu } \sum_{j=1}^{N_p} c_j f_j = f \right\}$.

Propoziția 2. Două seminorme $\|\cdot\|_p$ definite pe $H^0(K_p, \underline{\mathcal{F}})$ cu ajutorul morfismelor

$$\underline{O}_{K_p}^{N'_p} \xrightarrow{\varphi'} \underline{\mathcal{F}}_{K_p} \rightarrow 0 \quad \text{resp.} \quad \underline{O}_{K_p}^{N''_p} \xrightarrow{\varphi''} \underline{\mathcal{F}}_{K_p} \rightarrow 0$$

determinate de secțiunile $f'_1, \dots, f'_{N'_p}$ resp. $f''_1, \dots, f''_{N''_p}$ din $H^0(K_p, \underline{\mathcal{F}})$ sînt echivalente.

Cum $f''_h = \sum_{j=1}^{N'_p} a_{hj} f'_j$, $h = 1, \dots, N''_p$, $a_{hj} \in H^0(K_p, \underline{O})$, orice $f \in H^0(K_p, \underline{\mathcal{F}})$ se scrie

$$f = \sum_{h=1}^{N''_p} d_h f''_h = \sum_{j=1}^{N'_p} c_j f'_j \quad \text{cu} \quad c_j = \sum_{h=1}^{N''_p} d_h a_{hj}. \quad (5)$$

Deci fiecărui $d = (d_1, \dots, d_{N_p''}) \in \tilde{\varphi}''^{-1}(f)$ îi putem asocia $c(d) \in \tilde{\varphi}'^{-1}(f)$ de componente c_j date de (5). Vom nota $\| \cdot \|_{p,1}$ resp. $\| \cdot \|_{p,2}$ seminormele definite de φ' resp. φ'' și cu $C = \max_j \sum_h \| a_{hj} \|_{K_p}$.

Atunci $\| f \|_{p,1} = \inf_{c \in \tilde{\varphi}'^{-1}(f)} \| c \|_p \leq \inf_{c(d), d \in \tilde{\varphi}''^{-1}(f)} \| c \|_p \leq C \| f \|_{p,2}$.

Analog se stabilește o inegalitate $\| f \|_{p,2} \leq C^* \| f \|_{p,1}$ cu C^* o constantă convenabilă.

În concluzie, seminormele $\| \cdot \|_p$ definesc aceeași topologie pe $H^0(K_p, \mathcal{F})$, ([31], p. 48), în care vecinătățile secțiunii 0 sînt date de

$$\mathcal{O}(p, \varepsilon) = \{f \mid f \in H^0(K_p, \mathcal{F}), \| f \|_p < \varepsilon\}. \quad (6)$$

Fie $f \in H^0(K_{p+1}, \mathcal{F})$ și $\| f \|_{p+1} = \inf_{c \in \tilde{\varphi}^{-1}(f)} \| c \|_{p+1}$, unde $\varphi: \mathcal{O}_{K_{p+1}}^{N_{p+1}} \rightarrow \mathcal{F}_{K_{p+1}}$ este un morfism surjectiv. Să definim $\| \cdot \|_p$, folosind restricția morfismului φ la K_p (i.e. la $\mathcal{O}_{K_p}^{N_{p+1}}$) și să păstrăm notația f pentru restricția la K_p . Se verifică imediat că

$$\| f \|_p \leq \| f \|_{p+1}. \quad (7)$$

Propoziția 3. *Aplicația de restricție $\rho_{p,p+1}: H^0(K_{p+1}, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(K_p, \mathcal{F})$ este continuă.*

Într-adevăr, $\rho_{p,p+1}[\mathcal{O}(p+1, \varepsilon)] \subset \mathcal{O}(p, \varepsilon)$.

Pe $H^0(K_{p+1}, \mathcal{F})$ am definit mai sus seminorma $\| \cdot \|_p$. Inegalitatea (7) arată că topologia definită de $\| \cdot \|_{p+1}$ pe $H^0(K_{p+1}, \mathcal{F})$ este mai fină decît topologia definită de $\| \cdot \|_p$.

Propoziția 4. *Spațiul $H^0(K_p, \mathcal{F})$ este local convex.*

Pentru a topologiza $H^0(V, \mathcal{F})$ vom considera aplicațiile de restricție $\rho_p: H^0(V, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(K_p, \mathcal{F})$ și vom înzestra $H^0(V, \mathcal{F})$ cu cea mai slabă topologie în care toate aceste aplicații sînt continue. Evident, $\rho_p = \rho_{p,p+1} \circ \rho_{p+1}$ și $H^0(V, \mathcal{F}) = \varprojlim H^0(K_p, \mathcal{F})$.

Se verifică imediat

Propoziția 5. Topologia lui $H^0(V, \underline{\mathcal{F}})$ este dată de familia numerabilă de seminorme, pe care le vom nota tot $\| \cdot \|_p$, definite prin relația

$$\|f\|_p = \|f|_{K_p}\|_p \quad (8)$$

pentru $f \in H^0(V, \underline{\mathcal{F}})$. Spațiul $H^0(V, \underline{\mathcal{F}})$ este local convex.

Conform (7), această familie de seminorme este dirijată. Avem sistemul fundamental de vecinătăți convexe

$$V(p, \varepsilon) = \{f \mid f \in H^0(V, \underline{\mathcal{F}}), \|f\|_p < \varepsilon\} = \rho_p^{-1}[\mathcal{O}(p, \varepsilon)], \quad (9)$$

p număr natural și $\varepsilon > 0$, arbitrari ([31], p. 52).

Consecința 1. Șirul $f_v \rightarrow 0$ în $H^0(V, \underline{\mathcal{F}})$ atunci și numai atunci, când oricare ar fi numărul natural p , șirul $\|f_v\|_p \rightarrow 0$.

2. Pentru a demonstra că $H^0(V, \underline{\mathcal{F}})$ este un spațiu Fréchet, vom stabili trei proprietăți importante ale spațiilor $H^0(K_p, \underline{\mathcal{F}})$:

Teorema 1. Dacă $f \in H^0(K_{p+1}, \underline{\mathcal{F}})$ și $\|f\|_{p+1} = 0$, atunci $f|_{K_p} = 0$.

Fie $\| \cdot \|_{p+1}$ definită cu ajutorul unui morfism

$$\mathcal{O}_{K_{p+1}}^{N_{p+1}} \rightarrow \underline{\mathcal{F}}_{K_{p+1}} \rightarrow 0 \quad (10)$$

dat de secțiunile $\Phi_1, \dots, \Phi_{N_{p+1}}$ din $H^0(K_{p+1}, \underline{\mathcal{F}})$; avem

$$f = \sum_{j=1}^{N_{p+1}} c_j \Phi_j \quad (11)$$

cu $c = (c_1, \dots, c_{N_{p+1}})$ și $c_j \in H^0(K_{p+1}, \underline{\mathcal{O}})$.

Cum $\|f\|_{p+1} = 0$, există $c^\varepsilon = (c_1^\varepsilon, \dots, c_{N_{p+1}}^\varepsilon)$ cu $c_j^\varepsilon \in H^0(K_{p+1}, \underline{\mathcal{O}})$ și $\|c^\varepsilon\|_{p+1} < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ arbitrar. Fie $\gamma^\varepsilon = c - c^\varepsilon$. Notînd prescurtat $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\Phi_1, \dots, \Phi_{N_{p+1}})$, avem $\gamma^\varepsilon \in H^0(K_{p+1}, \mathfrak{R}) \subset H^0(K_{p+1}, \underline{\mathcal{O}}^{N_{p+1}})$ și $\gamma^\varepsilon \rightarrow c$ în topologia lui $H^0(K_{p+1}, \underline{\mathcal{O}}^{N_{p+1}})$, i.e. componentele $\gamma_j^\varepsilon \rightarrow c_j$ uniform pe K_{p+1} , cînd $\varepsilon \rightarrow 0$.

Oricare ar fi $a \in K_{p+1}$, $\mathfrak{R}_a$ este un submodul în $\mathcal{O}_a^{N_{p+1}}$, $\gamma^\varepsilon \in \mathcal{O}(K_{p+1})^{N_{p+1}}$ și converge la c în acest spațiu, iar $\gamma_a^\varepsilon \in \mathfrak{R}_a$.

Teorema 5 din cap. I, § 13, nr. 3 ne dă $c_a \in \mathfrak{R}_a$ și deci din (11) rezultă $f|_{K_p} = 0$.

Consecința 2. Spațiul $H^0(V, \underline{\mathcal{F}})$ este separat.

Într-adevăr, intersecția vecinătăților lui 0 este $\{0\}$: Dacă $f \in \cap V(p, \varepsilon)$, rezultă $\|f\|_{p+1} = 0$ și $f|_{K_p} = 0$ pentru orice p , deci $f = 0$.

Consecința 3. Spațiul $H^0(V, \underline{\mathcal{F}})$ este metrizabil.

Se aplică criteriul: un spațiu vectorial topologic local convex este metrizabil atunci și numai atunci când este separat și topologia lui este dată de o familie numerabilă de seminorme ([12], cartea V, cap. II, § 5, nr. 4, în ed. rusă p. 122, propoziția 6).

Teorema 2. Fie $f_k \in H^0(K_{p+1}, \underline{\mathcal{F}})$, astfel încît

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{p+1} < +\infty.$$

Seria $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ restrînsă la K_p converge în $H^0(K_p, \underline{\mathcal{F}})$ și restricția ei la K_{p-1} are un punct limită unic în $H^0(K_{p-1}, \underline{\mathcal{F}})$.

Reluînd morfismul (10), există $c^k \in H^0(K_{p+1}, \underline{\mathcal{O}}^{N_{p+1}})$, astfel încît $f_k = \sum_{j=1}^{N_{p+1}} c_j^k \Phi_j$ și $\sum_{k=1}^{\infty} \|c^k\|_{p+1} < +\infty$ (de exemplu putem lua c^k astfel încît $\|c^k\|_{p+1} < 2\|f_k\|_{p+1}$). Prin urmare, pentru fiecare j , seria $\sum_{k=1}^{\infty} c_j^k$ converge normal pe K_{p+1} , iar suma ei este o funcție c_j olomoră în $\dot{K}_{p+1}$.

Fie $f = \sum_{j=1}^{N_{p+1}} c_j \Phi_j \in H^0(K_p, \underline{\mathcal{F}})$. Oricare ar fi numărul $\varepsilon > 0$, există ν astfel încît $\left\| c - \sum_{k=1}^{\nu} c^k \right\|_p < \varepsilon$. Dar atunci $\left\| f - \sum_{k=1}^{\nu} f_k \right\|_p = \left\| \sum_{j=1}^{N_{p+1}} \left(c_j - \sum_{k=1}^{\nu} c_j^k \right) \Phi_j \right\|_p < \varepsilon$, deci f este o limită a seriei $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ în $H^0(K_p, \underline{\mathcal{F}})$.

Să presupunem că $\tilde{f}$ ar fi o altă limită a acestei serii în K_p . Atunci $\|f - \tilde{f}\|_{K_p} = 0$ și din teorema 1 rezultă $f = \tilde{f}$ pe K_{p-1} .

Teorema 3. Orice șir Cauchy $F_n \in H^0(V, \underline{\mathcal{F}})$, i. e. șir Cauchy în fiecare seminormă p , are o limită unică în $H^0(V, \underline{\mathcal{F}})$. Prin urmare, spațiul $H^0(V, \underline{\mathcal{F}})$ este complet.

Alegem o serie $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty$, $\varepsilon_k > 0$ și determinăm pentru fiecare k un indice N_k , astfel încît $\|F_n - F_m\|_k < \varepsilon_k$ pentru n și $m > N_k$. Luăm un șir n_k de numere naturale, crescător și verificînd inegalitatea $n_k > N_k$. Vom putea deci scrie $\|F_{n_{k+1}} - F_{n_k}\|_k < \varepsilon_k$.

Fie $f_1 = F_{n_1}$ și pentru $k \geq 2$, $f_k = F_{n_k} - F_{n_{k-1}}$. Oricare ar fi numărul natural p avem $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p < +\infty$, deoarece $\|f_k\|_p \leq \|f_k\|_k$ pentru $k \geq p$. Putem aplica deci teorema 2 pentru $p+2$, și deducem că șirul $\sum_{k=1}^N f_k = F_{n_N}$ converge în K_{p+1} la o limită F^p , cînd $N \rightarrow \infty$ și că $F^p = F^{p+1}$ în K_p . Definim $F \in H^0(V, \underline{\mathcal{F}})$, punînd $F = F^p$ în K_p . Șirul F_n converge la F în $H^0(V, \underline{\mathcal{F}})$ cînd $n \rightarrow \infty$, iar limita F este unică, deoarece $H^0(V, \underline{\mathcal{F}})$ este spațiu Hausdorff.

Ținînd seama de rezultatele de mai sus, obținem

Consecința 4. $H^0(V, \underline{\mathcal{F}})$ este un spațiu Fréchet.

§ 4. Teoreme de aproximare

1. În §2 am demonstrat teorema 2 de aproximare a funcțiilor olomorfe pe un compact K dintr-o varietate Stein cu funcții olomorfe pe V , în cazul în care $\hat{K} = K$. Vom extinde acum acest rezultat la secțiuni într-un fascicol analitic coerent $\underline{\mathcal{F}}$ pe V . Re-luăm șirul K_p din §3 și spațiile $H^0(K_p, \underline{\mathcal{F}})$ resp. $H^0(\bar{V}, \underline{\mathcal{F}})$. Evi-

dent, este suficient să demonstrăm teorema de aproximare pentru un compact K_p , $p = 1, 2, \dots$, deoarece putem construi şirul K_p luînd drept K_1 un compact oarecare K cu proprietatea $\hat{K} = K$.

Teorema 1. Date $f_p \in H^0(K_p, \underline{\mathcal{F}})$ şi $\varepsilon \geq 0$, există $f \in H^0(V, \underline{\mathcal{F}})$, astfel încît $\|f - f_p\|_p < \varepsilon$.

1) Să considerăm din nou morfismul (10), § 3, nr. 2, şi secţiunile $\Phi_j \in H^0(K_{p+1}, \underline{\mathcal{F}})$, $j = 1, \dots, N_{p+1}$, care îl determină. Prin restricţie la K_p putem folosi acest morfism pentru $\| \cdot \|_p$ şi vom scrie

$$f_p = \sum_{j=1}^{N_{p+1}} c_j \Phi_j \text{ cu } c_j \in H^0(K_p, \underline{\mathcal{O}}).^*) \quad (1)$$

2) După teorema 2, § 2, c_j se pot aproxima uniform pe K_p cu funcţii olomorfe pe V . Fie ε_1 un număr pozitiv, pe care îl vom fixa în cele ce urmează. Există $\tilde{c}_j \in H^0(V, \underline{\mathcal{O}})$, astfel încît $\|c_j - \tilde{c}_j\|_{K_p} < \varepsilon_1$. Prin urmare, notînd $\tilde{c} = (\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{N_{p+1}})$, avem $\|c - \tilde{c}\|_p < \varepsilon_1$ în $H^0(K_p, \underline{\mathcal{O}}^{N_{p+1}})$.

Definim

$$f_{p+1} = \sum_{j=1}^{N_{p+1}} \tilde{c}_j \Phi_j \in H^0(K_{p+1}, \underline{\mathcal{F}}). \quad (2)$$

Evident, $\|f_{p+1} - f_p\|_p < \varepsilon_1$.

3) Repetînd procedeul aproximăm f_{p+1} pe K_{p+1} cu $f_{p+2} \in H^0(K_{p+2}, \underline{\mathcal{F}})$, astfel încît $\|f_{p+2} - f_{p+1}\|_{p+1} < \varepsilon_2$ etc. Formăm astfel şirul $f_{p+k} \in H^0(K_{p+k}, \underline{\mathcal{F}})$ cu $\|f_{p+k+1} - f_{p+k}\|_{p+k} < \varepsilon_{k+1}$.

4) Alegem numerele $\varepsilon_k > 0$, astfel încît $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \varepsilon$. Seria

*) Pentru prescurtare notăm în §§ 4 şi 5 restricţia unei aplicaţii (morfism, secţiune, colanţ) la fel ca şi aplicaţia iniţială. De asemenea notăm secţiunile la fel ca şi 0-colanţurile, pe care le determină, conform identificării $\Gamma(V, \underline{\mathcal{F}}) = Z^0(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}})$, oricare ar fi acoperirea $\mathcal{U}$ a lui V .

$\sum_{m=k}^{\infty} \|f_{p+m+1} - f_{p+m}\|_{p+k} \leq \sum_{m=k}^{\infty} \|f_{p+m+1} - f_{p+m}\|_{p+m}$ este convergentă. După teorema 2 din §3, nr. 2, deducem că seria $f_{p+k} + \sum_{m=k}^{\infty} (f_{p+m-1} - f_{p+m})$ converge în K_{p+k-1} la o secțiune $f'_{p+k} \in H^0(K_{p+k-1}, \underline{\mathcal{F}})$, care este unic determinată în K_{p+k-2} . Pentru fiecare indice $k = 1, 2, \dots$ obținem astfel f'_{p+k} , iar $f'_{p+k+1} - f'_{p+k} = 0$ pe K_{p+k-2} , $k \geq 2$.

Definim $f \in H^0(V, \underline{\mathcal{F}})$, punînd

$$f = f'_{p+k} \text{ în } K_{p+k-2} \quad (3)$$

pentru $k \geq 2$. Putem scrie

$$\begin{aligned} \|f - f_p\|_p &= \|f'_{p+k} - f_p\|_p = \left\| \sum_{m=0}^{\infty} (f_{p+m+1} - f_{p+m}) \right\|_p \leq \\ &\leq \sum_{m=0}^{\infty} \|f_{p+m+1} - f_{p+m}\|_{p+m} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Definiția 1. Spunem că șirul $F_p \in H^0(K_p, \underline{\mathcal{F}})$ converge la $F \in H^0(V, \underline{\mathcal{F}})$, dacă $\|F_p - F\|_p \rightarrow 0$ cînd $p \rightarrow \infty$.

Cu această definiție păstrînd notațiile din demonstrația precedentă, putem scrie

$$f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{p+k}.$$

2. Vom folosi acum un procedeu analog pentru a stabili o propoziție care va fi aplicată în §5.

Fie $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ o acoperire a varietății Stein V și $\mathcal{U}_p = \{U_i \cap K_p\}_{i \in I}$, $p = 1, 2, \dots$

Definiția 2. Spunem că șirul de colanțuri $\beta_p \in C^0(\mathcal{U}_p, \underline{\mathcal{F}})$ converge la un colanț $\beta \in C^0(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}})$, dacă $\beta - \beta_p \in H^0(K_p, \underline{\mathcal{F}})$ și $\|\beta - \beta_p\|_p \rightarrow 0$ cînd $p \rightarrow \infty$.

Propoziția 1. Un șir de colanțuri $\beta_p \in C^0(\mathcal{U}_p, \underline{\mathcal{F}})$, pentru care $\beta_{p+1} - \beta_p = s_p \in H^0(K_p, \underline{\mathcal{F}})$ și $\|s_p\|_p < \varepsilon_p$ cu $\sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon_p < +\infty$,

converge la un colanț $\beta \in C^0(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}})$. Dacă $\sum_{k=p}^{\infty} \varepsilon_k < \varepsilon_p^*$, atunci $\|\beta - \beta_p\|_p < \varepsilon_p^*$.

Vom aplica teorema 2, §3, nr. 2, șirului s_{p+k} din $H^0(K_{p+q}, \underline{\mathcal{F}})$, $k = q, q+1, \dots$; $q \geq 2$. Prin urmare $\sum_{k=q}^{\infty} s_{p+k} = f_{p+q-2} \in H^0(K_{p+q-2}, \underline{\mathcal{F}})$ și avem pe K_{p+q-2} relația $f_{p+q-1} - f_{p+q-2} = -s_{p+q}$.

Definim colanțul β din $C^0(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}})$ punând

$$\beta = \beta_{p+q} + f_{p+q-2} \quad (4)$$

pe K_{p+q-2} . Aceasta este posibil, deoarece

$$\beta_{p+q+1} + f_{p+q-1} = \beta_{p+q} + f_{p+q-2} \quad (5)$$

pe K_{p+q-2} . *)

Putem scrie $\|\beta - \beta_{p+q}\|_{p+q} = \|f_{p+q} + s_{p+q} + s_{p+q+1}\|_{p+q} < \sum_{h=p+q}^{\infty} \varepsilon_h < \varepsilon_{p+q}^*$, ceea ce demonstrează că $\beta_{p+q} \rightarrow \beta$ cînd $q \rightarrow \infty$.

§ 5. Teoremele A și B pentru varietăți Stein

Cu ajutorul rezultatelor stabilite în paragrafele precedente vom demonstra acum teoremele fundamentale A și B pentru varietăți Stein.

1. Teorema 1. *Teorema A este adevărată pe o varietate Stein.*

1) Fie $\underline{\mathcal{F}}$ un fascicol analitic coerent pe o varietate Stein V .

Vom arăta că oricare ar fi punctul $a \in V$, $H^0(V, \underline{\mathcal{F}})$ generează $\mathcal{O}_a$ -modulul $\mathcal{F}_a$. În acest scop vom nota cu $\mathfrak{N}_a$ submodulul lui $\mathcal{F}_a$

*) Oricare ar fi $i \in I$, cu $U_i \cap K_{p+q-2} \neq \emptyset$ pentru un anumit q , conform (4), $\beta_i = (\beta_{p+q})_i + f_{p+q-2}$ pe $U_i \cap K_{p+q-2}$, iar (5) arată că β_i este bine determinat.

generat de $H^0(V, \underline{\mathcal{F}})$ (i. e. de valorile secțiunilor din $H^0(V, \underline{\mathcal{F}})$ în punctul a) și vom demonstra că $\mathfrak{N}_a = \underline{\mathcal{F}}_a$.

2) Reluăm șirul K_p din § 3. Fie p un indice astfel încît $a \in K_p$, și secțiunile $\Phi_j \in H^0(K_p, \underline{\mathcal{F}})$, $j = 1, \dots, N_p$, care determină un morfism surjectiv $\varphi: \underline{O}_{K_p}^{N_p} \rightarrow \underline{\mathcal{F}}_{K_p}$, cu ajutorul căruia vom defini $\|\cdot\|_p$. Orice $t \in \underline{\mathcal{F}}_a$ se poate scrie

$$t = \sum_{j=1}^{N_p} c_{ja} \Phi_j(a),$$

unde $c_a = (c_{1a}, \dots, c_{N_p a}) \in \underline{O}_a^{N_p}$.

Notăm cu $\mathfrak{M}_a = \varphi_a^{-1}(\mathfrak{N}_a)$, submodulul lui $\underline{O}_a^{N_p}$ format de germeii $c_a \in \underline{O}_a^{N_p}$, pentru care $\sum_{j=1}^{N_p} c_{ja} \Phi_j(a) \in \mathfrak{N}_a$.

Evident, $\mathfrak{M}_a = \underline{O}_a^{N_p}$ atunci și numai atunci cînd $\mathfrak{N}_a = \underline{\mathcal{F}}_a$. În acest mod am redus problema la a demonstra că $\mathfrak{M}_a = \underline{O}_a^{N_p}$, deci că $\mathfrak{M}_a$ conține elementele $e_s(a)$ cu $e_s = (\delta_{s1}, \dots, \delta_{sN_p}) \in \underline{O}^{N_p}$, $s = 1, \dots, N_p$, care generează $\underline{O}_a^{N_p}$ ca $\underline{O}_a$ -modul.

3) Fie $c = e_s$ pentru s unul dintre indicii $1, \dots, N_p$; $c = (c_1, \dots, c_{N_p})$. Vom arăta că c este limită uniformă pe K_p a unui șir $c^v \in \underline{O}(K_p)^{N_p}$ cu $c_a^v \in \mathfrak{M}_a$. Atunci, conform teoremei 5 din cap. I, § 13, nr. 3, va rezulta $c_a \in \mathfrak{M}_a$.

4) Să notăm cu $f = \sum_{j=1}^{N_p} c_j \Phi_j = \Phi, \in H^0(K_p, \underline{\mathcal{F}})$ și să aplicăm teorema 1 de aproximare din § 4 pentru f și K_p , luînd un șir descrescător de numere $\varepsilon_v \searrow 0$. Pentru fiecare v există

$$f_v \in H^0(V, \underline{\mathcal{F}}) \text{ cu } \|f - f_v\|_{K_p} < \varepsilon_v$$

și deci

$$\tilde{c}^v \in H^0(K_p, \underline{O}^{N_p}),$$

astfel încît $f - f_v = \sum_{j=1}^{N_p} \tilde{c}_j^v \Phi_j$ pe K_p și $\|\tilde{c}_j^v\|_{K_p} < \varepsilon_v, j = 1, \dots, N_p$. Fie

$c^v = c - \tilde{c}^v \in H^0(K_p, \underline{\mathcal{O}}^{N_p})$. Fiecare componentă c_j^v converge la c_j uniform pe K_p .

În concluzie c^v și $c \in H^0(K_p, \underline{\mathcal{O}}^{N_p})$, iar $c^v \rightarrow c$ uniform pe K_p . Cum $f_v \in H^0(V, \underline{\mathcal{F}})$, rezultă $\sum_{j=1}^{N_p} c_{j,a}^v \Phi_j(a) = f_v(a) \in \mathfrak{M}_a$, deci $c_a^v \in \mathfrak{M}_a$. Prin urmare, $c_a \in \mathfrak{M}_a$.

2. Teorema 2. *Teorema B este adevărată pe o varietate Stein.*

Fie din nou $\underline{\mathcal{F}}$ un fascicol analitic coerent pe varietatea Stein V , K_p un șir de exhaustiune ca mai sus și pentru fiecare acoperire $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ a lui V , $\mathcal{U}_p = \{U_i \cap K_p\}_{i \in I}$.

1) Vom demonstra mai întâi că $H^1(V, \underline{\mathcal{F}}) = 0$.

Să considerăm o acoperire $\mathcal{U}$ și un cociclu $\alpha \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}})$.

Știm că pentru orice p , $H^1(K_p, \underline{\mathcal{F}}) = 0$, deci $H^1(\mathcal{U}_p, \underline{\mathcal{F}}) = 0$ (observația 5 din cap. II, § 7, nr. 5). Prin urmare există un colanț $\beta'_p \in C^0(\mathcal{U}_p, \underline{\mathcal{F}})$, astfel încît restricția lui α la K_p *) să satisfacă relația $\alpha = \delta \beta'_p$, $p = 1, 2, \dots$

Să fixăm un p arbitrar și să notăm $\beta_p = \beta'_p$. Putem scrie $\beta'_{p+1} - \beta_p = t_p \in H^0(K_p, \underline{\mathcal{F}})$. Aplicînd teorema 1 de aproximare din § 4, nr. 1, deducem că există $g_{p+1} \in H^0(V, \underline{\mathcal{F}})$, astfel încît $\|g_{p+1} + t_p\|_p < \varepsilon_p$, ε_p fiind un număr pozitiv pe care îl vom alege ulterior. Luăm $\beta_{p+1} = \beta'_{p+1} + g_{p+1} \in C^0(\mathcal{U}_{p+1}, \underline{\mathcal{F}})$. Repetînd procedeul obținem un șir de 0-colanțuri $\beta_{p+m} \in C^0(\mathcal{U}_{p+m}, \underline{\mathcal{F}})$, unde $\|\beta_{p+m+1} - \beta_{p+m}\|_{p+m} < \varepsilon_{p+m}$. Vom alege numerele ε_k , astfel încît $\sum_{k=p}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty$ și aplicînd propoziția 1 din § 4, nr. 2, deducem că șirul β_{p+m} , pe care l-am construit, converge la un 0-colanț

*) Restricția lui α la K_p este definită pentru acoperirea $\mathcal{U}_p$, luînd $\alpha_i|_{U_i \cap K_p}$ pentru $U_i \cap K_p \neq \emptyset$ și 0 pentru $U_i \cap K_p = \emptyset$, oricare ar fi $i \in I$.

$\beta \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, iar $\beta - \beta'_{p+m} \in H^0(K_{p+m}, \mathcal{F})$, astfel încît $\delta\beta = \alpha$. Prin urmare $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ și $H^1(V, \mathcal{F}) = 0$.

2) Să demonstrăm acum cazul $H^q(V, \mathcal{F}) = 0$, $q > 1$.

2.1) *Observația 1.* Dacă o varietate analitică V admite un șir de exhaustiune cu compacte K_p : $1^\circ K_p \subset \overset{\circ}{K}_{p+1}$ și $2^\circ \bigcup_p K_p = V$, există o acoperire $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ a lui V , finită pe fiecare K_p cu următoarele proprietăți echivalente:

a) $U_i \cap K_p \neq \emptyset \Rightarrow U_i \subset \overset{\circ}{K}_{p+1}$.

b) $U_i \not\subset K_{p+1} \Rightarrow U_i \cap K_p = \emptyset$.

Luăm mai întâi o acoperire finită $\{U_i\}$, $i = 1, \dots, N_1$, a lui K_1 , astfel încît $U_i \subset \overset{\circ}{K}_2$ și apoi adăugăm succesiv pentru $p = 2, 3, \dots$ mulțimile $\{U_i\}$, $i = N_{p-1} + 1, \dots, N_p$, în modul următor: Pentru fiecare punct din $K_p - K_{p-1}$ alegem o vecinătate $u \subset \overset{\circ}{K}_{p+1} - K_{p-1}$. Mulțimile u împreună cu $\{U_i\}$, $i = 1, \dots, N_{p-1}$, formează o acoperire a lui K_p , din care vom extrage o acoperire finită. Notăm $U_{N_{p-1}+1}, \dots, U_{N_p}$ mulțimile u extrase astfel.

Orice rafinare a lui $\mathcal{U}$ păstrează proprietățile a) și b) deci orice acoperire $\tilde{\mathcal{U}}$ a lui V admite o rafinare cu aceste proprietăți.

Observația 2. În ipotezele observației 1, dacă $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ este o acoperire a lui V , $\mathcal{U}_p = \{U_i \cap K_p\}_{i \in I}$ și $\mathcal{U}_p^* = \{U_j^* \cap K_p\}_{j \in J}$ este o rafinare a lui $\mathcal{U}_p$ (unde U_j^* sînt deschise în V), atunci există o rafinare $\mathcal{O}$ a lui $\mathcal{U}$, astfel încît $\mathcal{O}_p = \mathcal{U}_p^*$. *)

Într-adevăr, avem o aplicație $\Phi: J \rightarrow I$, astfel încît $U_j^* \cap K_p \subset U_{\Phi(j)} \cap K_p$. Vom lua $V_j = U_j^* \cap U_{\Phi(j)}$ pentru $j \in J$ și $V_i = U_i - K_p$ pentru $i \in I$. Acoperirea $\mathcal{O}$ indexată după suma mulțimilor J și I are proprietățile cerute.

2.2) *Observația 3.* Fie V ca în observația 1, $\mathcal{F}$ un fascicol de grupuri abeliene pe V și $\mathcal{U}$ o acoperire a lui V cu proprietatea a). Oricare ar fi colanțul $\gamma' \in C^q(\mathcal{U}_{p+1}, \mathcal{F})$, $q \geq 0$, există un colanț $\gamma \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, astfel încît restricțiile lui γ și γ' la K_p să coincidă.

*) Două acoperiri, care diferă doar prin mulțimi vide, se consideră egale.

Definim γ în modul următor: Dacă $U_{i_0, \dots, i_q} \cap K_p \neq \emptyset$, atunci $\gamma_{i_0, \dots, i_q} = \gamma'_{i_0, \dots, i_q}$, iar dacă $U_{i_0, \dots, i_q} \cap K_p = \emptyset$, atunci $\gamma_{i_0, \dots, i_q} = 0$.

2.3) După aceste observații pregătitoare să trecem la demonstrația teoremei B în ipoteza $q > 1$.

Vom arăta că pentru orice cociclu $\alpha \in Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ există o rafinare $\mathcal{U}^*$ a lui $\mathcal{U}$ și un colanț $\beta \in C^{q-1}(\mathcal{U}^*, \mathcal{F})$, astfel încît $\rho\alpha = \delta\beta$, ρ fiind omomorfismul corespunzător rafinării (cap. II, § 7, nr. 2). Conform observației 1 putem presupune că $\mathcal{U}$ are proprietatea a).

2.3.1) Să luăm un indice $p > 1$ inițial. Deoarece $H^q(K_{p+1}, \mathcal{F}) = 0$, există o rafinare a lui $\mathcal{U}_{p+1}$, pe care o vom nota $\mathcal{U}_{p+1}^p$ și pe care după observația 2 o vom presupune restricția la K_{p+1} a unei rafinări $\mathcal{U}^p$ a lui $\mathcal{U}$ de omomorfism ρ_p , astfel încît să avem

$$\rho_p \alpha = \delta \beta_p \quad (1)$$

pentru un anumit colanț $\beta_p \in C^{q-1}(\mathcal{U}_{p+1}^p, \mathcal{F})$.

2.3.2) Vom construi acum β_{p+1} . Considerăm $\rho_p \alpha \in Z^q(\mathcal{U}_{p+1}^p, \mathcal{F})$ și obținem o rafinare $\mathcal{O}^p$ a lui $\mathcal{U}^p$ cu omomorfismul corespunzător ρ'_{p+1} , astfel încît pe K_{p+2}

$$(\rho'_{p+1} \circ \rho_p) \alpha = \delta \beta'_{p+1}, \quad (2)$$

cu $\beta'_{p+1} \in C^{q-1}(\mathcal{O}_{p+2}^p, \mathcal{F})$.

2.3.3) În K_{p+1} avem $\delta(\beta'_{p+1} - \rho'_{p+1} \beta_p) = 0$. Deci pentru o nouă rafinare $\mathcal{W}^p$ a lui $\mathcal{O}^p$, de omomorfism ρ''_{p+1} , există $\gamma_p \in C^{q-2}(\mathcal{W}_{p+1}^p, \mathcal{F})$, care satisface relația $\rho''_{p+1}(\beta'_{p+1} - \rho'_{p+1} \beta_p) = \delta \gamma_p$ în K_{p+1} . Aplicînd observația 3, deducem că există $\gamma_p \in C^{q-2}(\mathcal{W}^p, \mathcal{F})$ a cărei restricție la K_p coincide cu γ_p . Notăm $\tilde{\beta}_{p+1}$ colanțul din $C^{q-1}(\mathcal{W}_{p+2}^p, \mathcal{F})$

$$\tilde{\beta}_{p+1} = \rho''_{p+1} \beta'_{p+1} - \delta \gamma_p. \quad (3)$$

Avem în K_{p+2}

$$\delta \tilde{\beta}_{p+1} = (\rho''_{p+1} \circ \rho'_{p+1} \circ \rho_p) \alpha \quad (4)$$

și în K_p

$$\tilde{\beta}_{p+1} = (\rho''_{p+1} \circ \rho'_{p+1}) \beta_p. \quad (5)$$

2.3.4) Ne propunem să înlocuim $\tilde{\beta}_{p+1}$ cu un colanț $\beta_{p+1} \in C^{q-1}(\mathcal{U}_{p+2}^{p+1}, \mathcal{F})$ cu următoarele proprietăți: $\mathcal{U}^{p+1}$ este o rafinare a lui $\mathcal{U}^p$ și $\mathcal{U}_{p-1}^{p+1} = \mathcal{U}_{p-1}^p$. Fie ρ''_{p+1} omomorfismul corespunzător acestei rafinări și $\rho_{p+1} = \rho''_{p+1} \circ \rho_p$. În K_{p+2} avem

$$\delta \beta_{p+1} = \rho_{p+1} \alpha \quad (6)$$

iar în K_{p-1}

$$\beta_{p+1} = \beta_p. \quad (7)$$

Pentru a obține $\mathcal{U}^{p+1}$, vom nota $\mathcal{U}^p = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda^p}$ și $\mathcal{W}^p = \{W_\mu\}_{\mu \in M^p}$; $\Phi: M^p \rightarrow \Lambda^p$ aplicația corespunzătoare rafinărilor folosite mai sus și $\rho_\Phi = \rho''_{p+1} \circ \rho'_{p+1}$; $\Lambda_1^p = \{\lambda \in \Lambda^p \mid U_\lambda \cap K_{p-1} \neq \emptyset\}$, $M_1^p = \{\mu \in M^p \mid W_\mu \cap K_{p-1} \neq \emptyset\}$ și $M_2^p = M^p - M_1^p$. Luăm

$$\mathcal{U}^{p+1} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_1^p} \cup \{W_\mu\}_{\mu \in M_2^p}, \quad (8)$$

Λ^{p+1} — mulțimea sumă a lui Λ_1^p și M_2^p , $\Psi: \Lambda^{p+1} \rightarrow \Lambda^p$, unde $\Psi = 1_{\Lambda_1^p}$ pe Λ_1^p și $\Psi = \Phi$ pe M_2^p , iar $\rho''_{p+1} = \rho_\Psi$.

Definim $\beta_{p+1} \in C^{q-1}(\mathcal{U}_{p+2}^{p+1}, \mathcal{F})$ punind

$$(\beta_{p+1})_\sigma = \begin{cases} (\beta_p)_\sigma & \text{pentru } \sigma = (\lambda_0, \dots, \lambda_{q-1}) \\ (\beta_p)_{\Psi(\sigma)} & \text{pentru } \sigma = (\lambda_0, \dots, \lambda_{h-1}, \mu_h, \dots, \mu_{q-1}), h \geq 1 \\ (\tilde{\beta}_{p+1})_\sigma & \text{pentru } \sigma = (\mu_0, \dots, \mu_{q-1}), \end{cases}$$

$\lambda_j \in \Lambda_1^p$ și $\mu_h \in M_2^p$. Se verifică imediat relațiile (6) și (7).

Repetăm procedeul plecând cu colanțul β_{p+1} și scriind $\mathcal{U}^{p+1} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda^{p+1}}$, cu $U_\mu = W_\mu$ pentru $\mu \in M_2^p$. Construim astfel colanțurile $\beta_{p+m} \in C^{q-1}(\mathcal{U}_{p+m+1}^{p+m}, \mathcal{F})$, unde $\mathcal{U}_{p+m+1}^{p+m+1} = \mathcal{U}_{p+m-1}^{p+m}$,

$$\delta\beta_{p+m} = \rho_{p+m} \alpha \text{ în } K_{p+m+1} \text{ și } \beta_{p+m+1} = \beta_{p+m} \text{ în } K_{p+m-1}.$$

2.3.5) Formăm acoperirea $\mathcal{U}^* = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ a lui V , unde $\Lambda = \bigcup_{m=0}^{\infty} \Lambda_1^{p+m}$. Această acoperire este o rafinare a lui $\mathcal{U}$ cu omomorfismul $\rho = \rho_{p+m}$ pe Λ_1^{p+m} .

Putem defini colanțul $\beta \in C^{q-1}(\mathcal{U}^*, \mathcal{F})$, luând

$$\beta = \beta_{p+m}$$

în K_{p+m-1} și obținem relația $\delta\beta = \rho\alpha$.

§ 6. Aplicații ale teoremelor A și B

Vom presupune mai întâi că V este o varietate analitică complexă și vom indica câteva consecințe ale faptului că pe V este adevărată teorema A sau teorema B. Aceste rezultate vor fi evident valabile pe o varietate Stein. Cu ajutorul lor vom stabili diferite caracterizări ale acestor varietăți.

1. Pe o varietate analitică complexă V , având proprietatea că $H^1(V, \mathcal{F}) = 0$ pentru orice fascicol analitic coerent $\mathcal{F}$ definit pe V , problema I a lui Cousin admite întotdeauna soluție. Adăugind și ipoteza $H^2(V, \mathbb{Z}) = 0$, problema a II-a a lui Cousin admite de asemenea soluție și prin urmare, problema lui Poincaré în formă este rezolvabilă (cap. IV, § 1, teorema 1 de la nr. 1; consecința 2 și propoziția 4 de la nr. 2). Cu atât mai mult aceste rezultate rămân valabile pe o varietate analitică complexă V care satisface teorema B.

Păstrind notațiile din cap. IV, § 1, nr. 3 și 4, vom aprofunda acum problema a II-a a lui Cousin.

Propoziția 1. *Dacă teoremele A și B sînt valabile pentru varietatea analitică complexă paracompactă V , omomorfismul $\chi: \Gamma(V, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) \rightarrow H^2(V, \mathbb{Z})$, (cap. IV, § 1, nr. 3, (8)), este surjectiv.*

Fie $\{\bar{m}\}$ un element arbitrar din $H^2(V, \mathbb{Z})$. Deoarece după teorema B avem $H^2(V, \mathcal{O}) = 0$, din șirul exact (10), cap. IV, § 1, nr. 4, rezultă că $\delta^*: H^1(V, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^2(V, \mathbb{Z})$ este omomorfism surjectiv.*) Există deci un element $\{\bar{c}\} \in H^1(V, \mathcal{O}^*)$ astfel încît $\delta^*\{\bar{c}\} = \{\bar{m}\}$.

Putem presupune $\bar{c} \in H^1(\Omega, \mathcal{O}^*)$, unde $\Omega = \{\Omega_i\}_{i \in I}$ este o acoperire distinsă a lui V și $c \in Z^1(\Omega, \mathcal{O}^*)$ este dat de funcțiile c_{ij} olomorfe și inversibile în Ω_{ij} , ($\Omega_{ij} \neq \emptyset$, i și $j \in I$), care satisfac condițiile 1° și 2° din enunțul problemei a II-a generalizate.

Fie $\underline{\mathcal{O}}_i = \underline{\mathcal{O}}_{\Omega_i}$ fascicolul germenilor de funcții olomorfe pe Ω_i , $i \in I$. Pentru fiecare pereche de indici $i, j \in I$, pentru care $\Omega_{ij} \neq \emptyset$, definim izomorfismul de $\underline{\mathcal{O}}_{\Omega_{ij}}$ -module $\tau_{ji}: \underline{\mathcal{O}}_i|_{\Omega_{ij}} \rightarrow \underline{\mathcal{O}}_j|_{\Omega_{ij}}$ în modul următor: Dacă $p \in \Omega_{ij}$ și g_p este germenele în punctul p al unei funcții g olomorfe în vecinătatea lui p , $\tau_{ji}(g_p) = (c_{ji}g)_p$. Racordînd fasciculele $\underline{\mathcal{O}}_i$ relativ la τ_{ji} (cap. II, § 1, nr. 6 și § 4, nr. 6), obținem un fascicol analitic coerent $\underline{\mathcal{Q}}$ pe V .

După teorema A rezultă că $\Gamma(V, \underline{\mathcal{Q}})$ generează fascicolul $\underline{\mathcal{Q}}$, astfel încît există o secțiune $f \in \Gamma(V, \underline{\mathcal{Q}})$ diferită de secțiunea nulă pe orice componentă conexă a lui V . Notînd cu θ_i izomorfismul $\underline{\mathcal{Q}}_{\Omega_i} \rightarrow \underline{\mathcal{O}}_i$ dat de racordare, secțiunea f determină pentru fiecare $i \in I$ o secțiune $f_i = \theta_i \circ (f|_{\Omega_i}) \in \Gamma(\Omega_i, \underline{\mathcal{O}}_i)$, care nu este identic nulă pe Ω_i (după cum rezultă din teorema de identitate a funcțiilor olomorfe). Deoarece $\tau_{ji} = \theta_j \circ \theta_i^{-1}$, avem $f_i f_j^{-1} = c_{ij}$, ($\Omega_{ij} \neq \emptyset$, i și $j \in I$). Prin urmare $\{\Omega_i, f_i\}_{i \in I}$ definește un divizor întreg D pe V (cap. IV, § 1, nr. 2, definiția 4). Se verifică imediat că $d^*(D) = \{\bar{c}\}$, deci $\chi(D) = \{\bar{m}\}$.

Ținînd seama de propoziția 1 de mai sus, consecința 2 din cap. IV, § 1, nr. 3 se completează prin

Propoziția 2. *Dacă teoremele A și B sînt valabile pentru varietatea analitică complexă paracompactă V , condiția necesară și suficientă*

) Mai mult, δ^ este izomorfism.

pentru ca problema a II-a a lui Cousin să admită soluție este ca $H^2(V, \mathbb{Z}) = 0$.

În concluzie putem formula

Teorema 1. *Pe o varietate Stein V problema I a lui Cousin admite întotdeauna soluție, iar problema a II-a a lui Cousin admite soluție atunci și numai atunci când $H^2(V, \mathbb{Z}) = 0$.*

Propoziția 3. *Fie V o varietate analitică complexă, pe care este valabilă teorema A. Atunci problema lui Poincaré în forma slabă (cap. IV, § 1, nr. 2) este rezolvabilă pe V .*

Putem presupune varietatea V conexă. Fie din nou $\mathcal{O} = \mathcal{O}(V)$ fascicolul germenilor de funcții olomorfe pe V , $\mathcal{M}$ fascicolul germenilor de funcții meromorfe pe V și $h \in \Gamma(V, \overline{\mathcal{M}})$.

Pentru fiecare $a \in V$ notăm cu $\mathcal{J}_a$ idealul lui $\mathcal{O}_a$, format de germenii $f_a \in \mathcal{O}_a$, care au proprietatea că $f_a h_a = F_a \in \mathcal{O}_a$. Obținem astfel fascicolul analitic $\underline{\mathcal{J}} = \bigcup_{a \in V} \mathcal{J}_a$.

Oricare ar fi $a \in V$, $\mathcal{J}_a$ este un ideal principal: Într-adevăr putem scrie $h_a = \frac{\varphi_a}{\psi_a}$, unde φ_a și $\psi_a \in \mathcal{O}_a$, $\psi_a \neq 0_a$, iar φ_a și ψ_a sînt germeni relativ primi. Cum $\mathcal{O}_a$ este un inel factorial (cap. I, § 13, nr. 1, teorema 1), deducem că ψ_a divide pe f_a în $\mathcal{O}_a$. Prin urmare $\mathcal{J}_a$ este idealul (ψ_a) generat de ψ_a . Există însă o vecinătate conexă U a lui a , astfel încît germenii φ_a și ψ_a sînt reprezentați de funcții φ și ψ olomorfe în U , pentru orice $b \in U$ avem $h_b = \frac{\varphi_b}{\psi_b}$, iar φ_b și ψ_b sînt relativ primi (cap. III, § 9, nr. 1). În concluzie $\underline{\mathcal{J}}_U$ este generat de $\psi \in \Gamma(U, \underline{\mathcal{J}})$, ceea ce demonstrează că $\underline{\mathcal{J}}$ este analitic coerent (cap. III, § 7, nr. 3, definiția 3).

Conform ipotezei putem aplica teorema A și deduce că $\Gamma(V, \underline{\mathcal{J}})$ generează fascicolul $\underline{\mathcal{J}}$. Însă $\Gamma(V, \underline{\mathcal{J}})$ constă din funcțiile $g \in \mathcal{O}(\overline{V})$ cu proprietatea

$$hg = G, \quad (4)$$

pentru o funcție $G \in \mathcal{O}(V)$. Pentru orice $a \in V$, $\mathcal{I}_a \neq 0_a$ și cum germenii funcțiilor din $\Gamma(V, \mathcal{I})$ în punctul a generează $\mathcal{I}_a$ ca $\mathcal{O}_a$ -modul, există $g \in \Gamma(V, \mathcal{I})$ cu $g_a \neq 0_a$. Dar atunci din ipoteza că V este conex, deducem $g_b \neq 0_b$ oricare ar fi $b \in V$. Din relația (1) scrisă pentru această funcție g , rezultă că există $\frac{G}{g}$ în $\Gamma(V, \mathcal{M})$ și că avem $h = \frac{G}{g}$.

2. Știm că oricărei subvarietăți analitice W dintr-o varietate analitică V (cap. III, § 8, nr. 2) îi corespunde un fascicol analitic coerent de ideale pe V (cap. III, § 8, nr. 3) și că avem șirul exact de fascicule pe V

$$0 \rightarrow \mathcal{I}(W) \rightarrow \mathcal{O}(V) \xrightarrow{u} \tilde{\mathcal{O}}(W) \rightarrow 0,$$

unde $\tilde{\mathcal{O}}(W)$ este prelungirea trivială la V a fascicolului $\mathcal{O}(W)$ de germeni de funcții olomorfe pe W .

Vom presupune că V este o varietate paracompactă, spre a putea folosi teorema șirului exact de coomologie (teorema 11 din cap. II, § 8, nr. 2), și că satisface teorema B. Rezultă șirul exact

$$\Gamma(V, \mathcal{O}(V)) \xrightarrow{\tilde{u}} \Gamma(V, \tilde{\mathcal{O}}(W)) \rightarrow H^1(V, \mathcal{I}(W)) = 0. \quad (2)$$

Pe de altă parte avem izomorfismul

$$\Gamma(V, \tilde{\mathcal{O}}(W)) \simeq \Gamma(W, \mathcal{O}(W)), \quad (3)$$

dat de restricția secțiunilor din $\tilde{\mathcal{O}}(W)$ la W , al cărui invers constă în prelungirea funcțiilor olomorfe pe W cu 0 în $V - W$.

Ținând seama de (2) și (3), precum și de definiția lui u , obținem

Teorema 2. *Fie V o varietate analitică complexă paracompactă, pe care este valabilă teorema B (mai precis pentru care $H^1(V, \mathcal{I}) = 0$, oricare ar fi fascicolul de ideale $\mathcal{I}$ analitic coerent pe V). Dacă W este o subvarietate analitică a lui V , atunci orice*

funcție olomorfă pe W este restricția la W a cel puțin unei funcții olomorfe pe V .*)

Consecința 1. Fie V o varietate analitică complexă, care satisface ipotezele teoremei 2. Dacă W este o mulțime discretă (i. e. o mulțime de puncte izolate pe V fără punct de acumulare pe V), atunci există o funcție olomorfă pe V care ia în punctele lui W valori date arbitrar.

Intr-adevăr, W este o subvarietate analitică de dimensiune zero. Din consecința 1 rezultă imediat

Consecința 2. O varietate analitică complexă V , care satisface ipotezele din teorema 2, este

1) olomorf separată și

2) olomorf convexă (cap. III, § 5, nr. 6, definițiile 5 și 6).

Să demonstrăm 2) prin reducere la absurd. Dacă pentru un compact K , $O(V)$ -înfășurătoarea $\hat{K}$ nu este compactă, atunci există un șir de puncte $a_j \in \hat{K}$ fără punct de acumulare pe V . Alegem un șir de numere complexe c_j cu $|c_j| \rightarrow +\infty$. Conform consecinței 1, există o funcție $f \in O(V)$ cu $f(a_j) = c_j$. Prin ipoteză, K este compact, deci $\|f\|_K = M$ — un număr finit. Există însă un rang n_0 , astfel încît pentru $j > n_0$ să avem $|c_j| > M$. Această inegalitate arată că $a_j \notin \hat{K}$, ceea ce este contradictoriu.

Consecința 1 se poate completa: pe o mulțime discretă $W \subset V$ putem da arbitrar nu numai valorile unei funcții olomorfe, dar și dezvoltarea Taylor pînă la un anumit ordin.

Teorema 3. Fie V o varietate analitică complexă, care satisface ipotezele din teorema 2. Dacă W este o mulțime discretă de puncte din V și pentru fiecare $a \in W$ se dă un polinom $P(z)$ într-un sistem de coordonate locale z , atunci există o funcție f olomorfă pe V , astfel încît în fiecare punct $a \in W$ funcția $f - P$ să aibă ordinul $> N$, unde N este gradul lui P (cap. III, § 1, nr. 5, definiția 28).

Formăm fascicolul de ideale $\mathcal{I}$ a lui $O(V)$, luînd pentru fiecare punct $a \in W$, $\mathcal{I}_a$ egal cu idealul germenilor de funcții olomorfe în vecinătatea lui a cu ordinul $> N$ și pentru fiecare punct $a \in V - W$, $\mathcal{I}_a = O_a$.

*) Teorema 2 rămîne valabilă pentru submulțimi analitice.

Fascicolul $\mathcal{I}$ este analitic coerent. Într-adevăr dacă $a \in W$, atunci $\mathcal{I}_a$ este generat de monoamele $(z_1 - z_1^*)^{j_1} \dots (z_n - z_n^*)^{j_n}$ de grad $|j| + N = 1$, unde am notat cu z^* punctul corespunzător lui a în sistemul de coordonate locale z . Fie U o vecinătate a lui a , în care este definit sistemul de coordonate z și pentru care $U \cap W = \{a\}$. În orice punct $b \in U - \{a\}$, fiecare dintre monoamele de grad $N + 1$ determină un germene inversibil, deci generează $\mathcal{I}_b = \mathcal{O}_b$. Prin urmare $\mathcal{I}_U$ este finit generat. Dacă $a \notin W$, proprietatea este banală.

Aplicând teorema șirului exact de coomologie pentru șirul exact

$$0 \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}(V) \xrightarrow{u} \mathcal{O}(V)/\mathcal{I} \rightarrow 0$$

și ținând seama de ipoteza $H^1(V, \mathcal{I}) = 0$, obținem șirul exact

$$\Gamma(V, \mathcal{O}(V)) \xrightarrow{\tilde{u}} \Gamma(V, \mathcal{O}(V)/\mathcal{I}) \rightarrow 0.$$

Datele teoremei noastre definesc o secțiune $s \in \Gamma(V, \mathcal{O}(V)/\mathcal{I})$, și anume $s(a) = \dot{P}_a$ — clasa determinată de germenele polinomului P în a pentru $a \in W$ și $s(a) = 0_a$ pentru $a \notin W$. Deoarece $\tilde{u}$ este surjectiv, există o funcție f olomorfa pe V pentru care $\tilde{u}(f) = s$, deci $f_a - P_a \in \mathcal{I}_a$ în orice punct $a \in W$.

3. Teorema A permite să se obțină și o reprezentare globală a oricărei subvarietăți analitice W a lui V ca mulțime a zerourilor unei familii de funcții olomorfe pe V .

Teorema 4. *Fie W o subvarietate analitică a varietății analitice complexe V . Dacă teorema A este valabilă pe V , atunci funcțiile olomorfe pe V , care se anulează pe W , nu au nici un alt zero comun în $V - W$.*)*

Fascicolul $\mathcal{I}(W)$ fiind analitic coerent, el este generat în fiecare punct din V de $\Gamma[V, \mathcal{I}(W)]$. Însă $\Gamma[V, \mathcal{I}(W)]$ constă din funcțiile olomorfe pe V , care se anulează pe W . În orice punct $a \in V - W$

*) Teorema 4 este adevărată și pentru submulțimi analitice. Mai mult se demonstrează că pe varietăți analitice complexe de dimensiune n numerabile la infinit, care satisfac teoremele A și B, orice submulțime analitică este mulțimea zerourilor comune la $n + 1$ funcții olomorfe pe V .

avem $\mathcal{O}(W)_a = \mathcal{O}(V)_a$ și cum germenii funcțiilor din $\Gamma[V, \mathcal{O}(W)]$ în punctul a generează pe $\mathcal{O}(W)_a$, există $f \in \Gamma[V, \mathcal{O}(W)]$ cu $f(a) \neq 0$.

4. Rezultatele pe care le-am demonstrat în acest paragraf se aplică evident varietăților Stein. Mai mult ele ne permit să obținem ușor o caracterizare a acestor varietăți:

Teorema 5. *Fie V o varietate analitică complexă numerabilă la infinit. Următoarele două afirmații sînt echivalente:*

1° V este o varietate Stein.

2° $H^1(V, \mathcal{I}) = 0$, pentru orice fascicol de ideale $\mathcal{I}$ analitic coerent al lui $\mathcal{O}(V)$.

Să presupunem că V satisface condiția 2°. Consecința 2 arată că varietatea V este olomorf separată și olomorf convexă. Rămîne să verificăm proprietatea (γ) din definiția varietăților Stein (definiția 1, § 1).

Să notăm cu $z = (z_1, \dots, z_n)$ un sistem de coordonate locale într-un punct a arbitrar din V și să presupunem că punctului a îi corespunde $z = 0$. După teorema 3 există o funcție $f_j \in \mathcal{O}(V)$, astfel încît în sistemul de coordonate z , ordinul funcției $f_j - z_j$ să fie cel puțin 2, $j = 1, \dots, n$. Funcțiile $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}(V)$ determină un sistem de coordonate locale în punctul a .

Folosind teorema 5 se stabilește

Teorema 6. (Serre.) *Fie $\Psi: V \rightarrow \tilde{V}$ o etalare surjectivă a unei varietăți analitice complexe V pe o varietate Stein $\tilde{V}$. Dacă V este conexă și Ψ proprie, V este o varietate Stein.*

Această teoremă se aplică în demonstrația teoremei 6 din cap. III, § 5, nr. 6, deoarece varietatea $\tilde{V}$ considerată în acel caz este varietate Stein.

Demonstrarea teoremei 6 se obține stabilind succesiv următoarele rezultate:

1) Există un număr natural N , astfel încît preimaginea oricărui punct din $\tilde{V}$ constă din N puncte din V .

2) Există o acoperire $\tilde{\mathcal{U}}^* = \{\tilde{U}_\lambda^*\}_{\lambda \in \Lambda}$ a lui $\tilde{V}$ cu proprietatea:

1° $\Psi^{-1}(\tilde{U}_\lambda^*)$ constă din N deschise disjuncte $U_{\lambda,j}^*$, $j = 1, \dots, N$, iar $\Psi|_{U_{\lambda,j}^*}$ este un omeomorfism al lui $U_{\lambda,j}^*$ pe $\tilde{U}_\lambda^*$, pentru orice $\lambda \in \Lambda$ și $j = 1, \dots, N$.

Putem alege $\tilde{\mathcal{U}}^*$, astfel încît să constituie o rafinare a unei acoperiri date a lui $\tilde{V}$, iar $\mathcal{U}^* = \{U_{\lambda j}^*\}_{\Lambda \times \{1, \dots, N\}}$ o rafinare a unei acoperiri date a lui V .

Acoperirea $\tilde{\mathcal{U}}^*$ admite o rafinare $\tilde{\mathcal{U}} = \{\tilde{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$, care pe lângă proprietatea 1° satisface și următoarea condiție:

2° Fie $U_{\alpha j}$, $j = 1, \dots, N$, cele N deschise disjuncte din $\Psi^{-1}(\tilde{U}_\alpha)$, $\alpha \in A$, conform proprietății 1° și $\mathcal{U} = \{U_{\alpha j}\}_{A \times \{1, \dots, N\}}$ acoperirea lui V corespunzătoare. Dacă $\tilde{U}_\alpha \cap \tilde{U}_\beta \neq \emptyset$, există un indice λ , astfel încît $\tilde{U}_\alpha \cup \tilde{U}_\beta \subset \tilde{U}_\lambda^*$. Oricare ar fi $U_{\alpha j}$ există $U_{\beta k_j}$ și $U_{\lambda l_j}^*$, astfel încît $U_{\alpha j} \cap U_{\beta k_j} \neq \emptyset$ și $U_{\alpha j} \cup U_{\beta k_j} \subset U_{\lambda l_j}^*$, iar $U_{\alpha j} \cap U_{\beta k} = \emptyset$ pentru $k \neq k_j$.

3) Oricare ar fi fascicolul $\underline{\mathcal{F}}$ de grupuri sau inele pe V , definim fascicolul $\tilde{\mathcal{F}}$ pe $\tilde{V}$, luînd pentru fiecare $\tilde{x} \in \tilde{V}$ ca fibră $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{x}} = \mathcal{F}_{x_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{F}_{x_N}$, unde $\{x_1, \dots, x_N\} = \Psi^{-1}(\tilde{x})$, iar ordinea în care se consideră punctele $x_1, \dots, x_N$ este arbitrară.

Un element din $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{x}}$ va fi un sistem $(a_1, \dots, a_N) \in \mathcal{F}_{x_1} \times \dots \times \mathcal{F}_{x_N}$, iar două sisteme, ce diferă printr-o permutare a elementelor a_j , se consideră identice. Suma și, atunci cînd $\underline{\mathcal{F}}$ este un fascicol de inele, produsul sînt definite prin egalitățile: $(a_1, \dots, a_N) + (b_1, \dots, b_N) = (a_1 + b_1, \dots, a_N + b_N)$ resp. $(a_1, \dots, a_N) \cdot (b_1, \dots, b_N) = (a_1 b_1, \dots, a_N b_N)$, în care elementele se presupun scrise, astfel încît a_j și b_j aparțin aceluiași $\mathcal{F}_{x_j}$.

Luînd pentru fiecare indice j , o vecinătate v_j a lui a_j , pe care proiecția $\pi_{\mathcal{F}}$ o reprezintă omeomorf pe o vecinătate w_j a lui x_j și presupunînd că Ψ reprezintă omeomorf w_j pe aceeași vecinătate $\tilde{w}$ a lui $\tilde{x}$, definim ca vecinătate a lui $(a_1, \dots, a_N)$ mulțimea $v_1 \vee \dots \vee v_N$.

4) În acest mod, fascicolul $\underline{\mathcal{O}}(V)$ definește un fascicol de inele $\tilde{\mathcal{O}}(\tilde{V})$ pe $\tilde{V}$. Se verifică ușor că avem morfismul injectiv $\varepsilon: \underline{\mathcal{O}}(\tilde{V}) \rightarrow \underline{\mathcal{O}}(V)$, și anume dacă $\tilde{c}_{\tilde{x}} \in \underline{\mathcal{O}}(\tilde{V})_{\tilde{x}}$ și este reprezentat de $\tilde{c}$ într-o vecinătate a lui $\tilde{x}$,

$$\varepsilon(\tilde{c}_{\tilde{x}}) = ((\tilde{c} \circ \Psi)_{x_1}, \dots, (\tilde{c} \circ \Psi)_{x_N}).$$

5) Oricare ar fi fascicolul $\underline{\mathcal{F}}$ de $\underline{\mathcal{O}}(V)$ -module, fascicolul $\widetilde{\underline{\mathcal{F}}}$ se organizează ca fascicol de $\widetilde{\underline{\mathcal{O}}}(V)$ -module, punind (la o scriere convenabilă a elementelor)

$$(c_{1x_1}, \dots, c_{Nx_N}) (a_1, \dots, a_N) = (c_{1x_1}a_1, \dots, c_{Nx_N}a_N)$$

și, conform morfismului ε , ca fascicol de $\underline{\mathcal{O}}(\widetilde{V})$ -module

$$\widetilde{c}_x(a_1, \dots, a_N) = \varepsilon(\widetilde{c}_x) (a_1, \dots, a_N).$$

6) Dacă fascicolul $\underline{\mathcal{F}}$ este analitic coerent, $\widetilde{\underline{\mathcal{F}}}$ are aceeași proprietate pe $\widetilde{V}$.

7) Dată o acoperire $\mathcal{W}$ arbitrară a lui V , pentru orice rafinare $\mathcal{U}$ construită ca la punctul 2) și orice fascicol $\underline{\mathcal{F}}$ analitic coerent pe V , avem $H^1(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}}) = 0$.

Într-adevăr, dacă $c \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}})$, fie $\widetilde{c} \in C^1(\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\underline{\mathcal{F}}})$ definit astfel: pentru $(\alpha_0, \alpha_1) \in A^2$

$$\widetilde{c}_{\alpha_0 \alpha_1} = (c_{(\alpha_0 1)} (\alpha_1 j_1)^\circ x_1 \Psi^{-1}, \dots, c_{(\alpha_0 N)} (\alpha_1 j_N)^\circ x_N \Psi^{-1}).$$

Se verifică ușor relația $\widetilde{c} \in Z^1(\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\underline{\mathcal{F}}})$.

Deoarece $\widetilde{V}$ este o varietate Stein, $H^1(\widetilde{V}, \widetilde{\underline{\mathcal{F}}}) = 0$ și conform observației 5 din cap. II, §7, nr. 5, $H^1(\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\underline{\mathcal{F}}}) = 0$. Prin urmare există $\widetilde{b} \in C^0(\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\underline{\mathcal{F}}})$, astfel încît $\delta \widetilde{b} = \widetilde{c}$.

Să construim colanțul $b \in C^0(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}})$: pentru orice $\alpha_0 \in A$ și $j = 1, \dots, N$, $b_{\alpha_0 j}$ este componenta lui $\widetilde{b}_{\alpha_0} = (b_{\alpha_0 1}, \dots, b_{\alpha_0 N})$, care corespunde perechii (α_0, j) . Se verifică prin calcul că $\delta b = c$, deci $H^1(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{F}}) = 0$. Aceasta implică însă $H^1(V, \underline{\mathcal{F}}) = 0$, deoarece $\mathcal{W}$ este o acoperire arbitrară a lui V . În concluzie, conform teoremei 5, V este o varietate Stein.

Din consecințele 1 și 2 se obține ușor și o altă caracterizare a varietăților Stein:

Teorema 7. *Condiția necesară și suficientă pentru ca o varietate analitică complexă numerabilă la infinit să fie varietate Stein este dată de (β) , (γ) și*

(α') *Oricare ar fi șirul de puncte $a_j \in V$, fără punct limită pe V , există o funcție $f \in O(V)$, astfel încât $|f(a_j)| \rightarrow +\infty$, când $j \rightarrow +\infty$.*

BIBLIOGRAFIE

1. S. Abhyankar. *Local Analytic Geometry*. Academic Press, 1964.
2. C. Andreian Cazacu. *Suprafețe riemanniene*, în volumul: „Topologie categorii, suprafețe riemanniene”. București, Editura Academiei, 1966.
3. C. Bănică, A. Duma și O. Stănășilă. *Proprietăți ale spațiilor Stein*. „Studii și cercet. matematice” 21, 6, 1969, p. 877—907.
4. C. Bănică și O. Stănășilă. *Some remarks on the finite morphisms*. „Revue Roum. Math. pures et appl.”, 12, 10, 1967, p. 1424—1429.
5. H. Behnke. *Funktionentheorie auf komplexen Mannigfaltigkeiten*. Proc. of the International Congress of Mathematicians, 3, 1954, p. 45—57.
6. H. Behnke și H. Grauert. *Analysis in Non-Compact Complex Spaces*, în volumul: „Analytic functions”. Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1960.
7. H. Behnke și F. Sommer. *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*. Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer, 1955, ed. II, 1965.
8. H. Behnke și K. Stein. *Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen*. „Math. Ann.”, 120, 1947—49, p. 430—461.
9. H. Behnke și P. Thullen. *Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen*. Berlin, Springer, 1934, retipărită de Chelsea Publ. Co, N. Y, ed. II, Springer, 1970.
10. L. Bers. *Introduction to Several Complex Variables*. New York Univ, 1964.
11. S. Bochner și W. T. Martin. *Several complex variables*, Princeton 1948, ed. rusă, I. L., Moscova, 1951.
12. N. Bourbaki. *Eléments de mathématique. Les structures fondamentales de l'analyse*. Livre 2: Algèbre, Livre 3: Topologie générale, Livre 4: Espaces vectoriels topologiques, Hermann, Paris, ed. rusă, Moscova, 1959—66.
13. I. Bucur. *Algebră omologică*. București, Editura didactică și pedagogică, 1965.

30. P. Cousin. *Sur les fonctions de n variables complexes*. „Acta math.“, 19, 1895, p. 1—62.
31. R. Cristescu. *Analiză funcțională*. București, Editura didactică și pedagogică, 1965.
32. A. Deleanu. *Teoria dimensiunii*, în volumul citat la nr. 2.
33. P. Dolbeault. *Sur la cohomologie de variétés analytiques complexes*. C. R. Acad. Sci. Paris, 236, 1953, p. 175—177.
34. A. Douady. *Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique*, în volumul: „Séminaire sur les équations aux dérivées partielles“, Collège de France, 1964—65. și Ann. Fourier, Univ. Grenoble, 16, 1966, p. 1—95.
35. B. A. Fuks. *Vvedenie v teoriu analiticeskih funkcii mnogih kompleksnyh peremennih*, F.M.L., Moscova, 1962.
36. * * * *Spezialne glavj teorii analiticeskih funkcii mnogih kompleksnyh peremennih* F.M.L., Moscova, 1963.
37. R. Godement. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. Paris, Hermann 1958, ed. rusă, I. L., Moscova.
38. H. Grauert. *Charakterisierung der holomorph vollständigen Räume*. „Math Ann.“, 129, 1955, p. 233—255.
39. H. Grauert și R. Remmert. *Singularitäten komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannsche Gebiete*. „Math. Zeitschr.“, 67, 1967, p. 103—128.
40. * * * *Komplexe Räume*. „Math. Ann.“, 136, 1958, p. 245—318.
41. * * * *Nichtarchimedische Funktionentheorie*, în volumul citat la nr. 25, p. 393—476.
42. A. Grothendieck. *Techniques de construction en géométrie analytique*. I—X (expunerile 7—17 din volumul Séminaire H. Cartan: „Familles d'espaces complexes et fondements de la Géométrie analytique“, Ecole Norm., Paris, 1960—61).
43. R. C. Gunning. *On Cartan's theorems A and B in several complex variables*. „Annali di Mat. pura ed appl.“, 55, 1961, p. 1—12.
44. R. C. Gunning și H. Rossi. *Analytic functions of several complex variables*. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N. J., 1965.
45. F. Hartogs. *Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten*, „Math. Ann.“, 62, 1906, p. 1—88.
46. M. Hervé. *Several complex variables. Local theory*, Oxford, Univ. Press, 1963, ed. rusă, Mir, Moscova, 1965.

66. * * * *Introduction to the theory of Analytic spaces*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 1966.
67. M. Nicolescu. *Analiza matematică* (3 vol.). București, Editura tehnică, 1957, 1958, 1960.
68. M. Nicolescu. *Funcții reale și elemente de topologie*. Ediția II, București, Editura didactică și pedagogică, 1968.
69. K. Oka. *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables complexes* (ciclu de 10 lucrări, 1936—62), VII. *Sur quelques notions arithmétiques*. „Bull. Soc. Math. France”, 78, 1950, p. 1—27.
70. D. Pompeiu. *Opera matematică*. București, Editura Academiei, 1959.
71. N. Radu. *Inele locale*. București, Editura Academiei, 1968 și 1970.
72. G. de Rham. *Variétés différentiables*. Paris, Hermann, 1955; ed. rusă, I. L., Moscova, 1956.
73. L. Schwartz. *Variedades analíticas complejas*. Bogota, Univ. Nac. de Colombia, 1956, ed. rusă, Moscova, Mir, 1964.
74. H. Seifert. *Topologie dreidimensionaler gefaserter Räume*. „Acta Math.”, 60, 1933, p. 147—238.
75. J. P. Serre. *Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein*, în volumele citate la nr. 21, „Colloque...”, p. 57—68, iar „Rassloennie...”, p. 363—371.
76. * * * *Faisceaux algébriques cohérents*. „Ann. Math.”, 61, 1955, p. 197—278.
77. * * * *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, „Ann. Inst. Fourier”, VI, 1955—56.
78. O. Stănășilă. *Algebre analitice și quasianalitice*, teză de doctorat, București, 1968.
79. N. Steenrod. *The topology of fibre bundles*. Princeton 1951, ed. rusă, Moscova, 1953.
80. K. Stein. *Analytische Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Periodizitätsmoduln und das zweite Cousinsche Problem*. „Math. Ann.”, 123, 1951, p. 201—222.
81. S. Stoilov. *Teoria funcțiilor de o variabilă complexă*. Vol. I, ediția I, Editura Academiei, 1954 sau ediția II, Editura didactică și pedagogică, 1962, vol. II. Editura Academiei, 1958, București, ed. rusă, I. L., Moscova, 1962.
82. * * * *Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques*. Paris, Gauthier Villars, 1938, ediția II, 1956, ed. rusă, Nauka, Moscova, 1964.
83. O. Teichmüller. *Veränderliche Riemannsche Flächen*. „Deutsche Math.” 1944, p. 344—359.

CUPRINS

Introducere	3
Cap. I. Funcții analitice în C^n	9
§ 1. Spațiul numeric complex n -dimensional C^n	9
§ 2. Funcții și aplicații de n variabile complexe	12
§ 3. Funcții olomorfe sau analitice	20
§ 4. Reprezentarea funcțiilor olomorfe cu ajutorul formulei integrale a lui Cauchy. Aplicații	32
§ 5. Aplicații olomorfe sau analitice	41
§ 6. Șiruri de funcții olomorfe	44
§ 7. Spațiile $\mathcal{O}(\Delta)$ și $\mathcal{O}(\Delta)$	49
§ 8. Serii Taylor. Proprietăți relative la convergență	55
§ 9. Echivalența celor două definiții ale olomorfiei. Aplicații	64
§ 10. Funcții olomorfe într-un domeniu Reinhardt și într-un domeniu circular. Aplicații	69
§ 11. Proprietăți algebrice locale ale funcțiilor olomorfe	78
§ 12. Teorema de pregătire a lui Weierstrass	82
§ 13. Proprietăți ale inelului $\mathcal{O}_0$	92
Cap. II. Considerații auxiliare	108
§ 1. Fascicule	108
§ 2. Fascicule cu structuri algebrice	118
§ 3. Fascicule de germeni	122
§ 4. Categoria fasciculelor de module peste un fascicol de inele $\mathcal{A}$	127
§ 5. Categoria fasciculelor coerente de $\mathcal{A}$ -module	132
§ 6. Teoreme de prelungire	145
§ 7. Coomologie cu coeficienți într-un fascicol	152
§ 8. Coomologia spațiilor paracompacte	174
§ 9. Fibrat	189
§ 10. Fibrat vectoriale	197
Cap. III. Teoria funcțiilor analitice pe varietăți analitice complexe ..	203
§ 1. Varietăți analitice complexe	203
§ 2. Varietăți analitice complexe etalate în C^n	217

§ 3. Fascicolul germenilor de aplicații olomorfe	221
§ 4. Prelungirea analitică	228
§ 5. Domeniu de olomorfe	240
§ 6. Aplicații ale prelungerii analitice	255
§ 7. Fascicole analitice	262
§ 8. Submulțimi analitice și subvarietăți analitice	268
§ 9. Fascicolul germenilor de funcții meromorfe pe V	279
Cap. IV. Problemele lui Cousin	283
§ 1. Formularea problemelor lui Cousin	283
§ 2. Integrala lui Pompeiu	296
§ 3. Teorema lui Grothendieck	299
§ 4. Problema I a lui Cousin generalizată în cazul cubului	304
§ 5. Teoreme de aproximare	306
§ 6. Funcții matriciale	310
§ 7. Teorema lui H. Cartan despre matricile olomorfe nesingulare	317
§ 8. Fibrat analitice complexe	321
§ 9. Legătura dintre problema a II-a a lui Cousin și fibratelor vectoriale analitice. Cazul cubului	326
Cap. V. Coomologie pe varietăți analitice complexe	328
§ 1. Fascicole de germeni de forme diferențiale exterioare	328
§ 2. Coomologia cubului cu coeficienți în fascicolul germenilor de funcții olomorfe	333
§ 3. Teoremele A și B ale lui H. Cartan	334
§ 4. Teoremele A și B pentru unele compacte din C^n	338
Cap. VI. Teoria funcțiilor analitice pe varietăți Stein	345
§ 1. Varietăți Stein	345
§ 2. Teoremele A și B pentru unele compacte dintr-o varietate Stein	347
§ 3. Spațiul Fréchet $H^0(V, \mathcal{F})$	351
§ 4. Teoreme de aproximare	356
§ 5. Teoremele A și B pentru varietăți Stein	359
§ 6. Aplicații ale teoremelor A și B	365
Bibliografie	375
Indice alfabetic	381

Coli tipo: 24,25



Tiparul executat sub comanda
nr. 2873
la întreprinderea poligrafică
„13 Decembrie 1918”
str. Grigore Alexandrescu nr. 89-97
Republica Socialistă România
București,

E R A T Ă

<u>Pag.</u>	<u>Rîndul</u>	<u>În loc de</u>	<u>Se va citi:</u>
12	18	R^{n-1}	R_+^{*n+1}
58	5	z^k	z_k^0
176	17	U^*	U_x^*
182	1	$V_i \subset U_i$	$\bar{V}_i \subset U_i$
206	5 de jos	U	U_i
227	5	$\varphi_x (f_{\varphi(x)})$	$\varphi_x^* (f_{\varphi(x)})$
260	2 de jos	$j_{h \ h}$	$j_{h \ \rho_h}$
268	10 de jos	O	$\underline{O}$
281	11	$\mathcal{M}$	$\underline{\mathcal{M}}$
286	9 de jos	$c_{\alpha\beta}$	$c_{\alpha\beta}^*$
287	8	$\dot{c}_{\alpha\beta} = c^* - c_{\beta}^*$	$c_{\alpha\beta}^* = c_{\alpha}^* - c_{\beta}^*$
307	1	R	R^q
315	12	,	pe o vecinătate a lui K
330	11	$\zeta_a^{(p,2)}$	$\zeta_a^{(p,q)}$
342	13	$K \dots \varphi^{-1}(\hat{K}^*)$	$\hat{K} \dots \varphi^{-1}(K^*)$
347	1 de jos	M	M_p
349	15 de jos	nu există	nu, există
351	7 de jos	K	K_p